This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

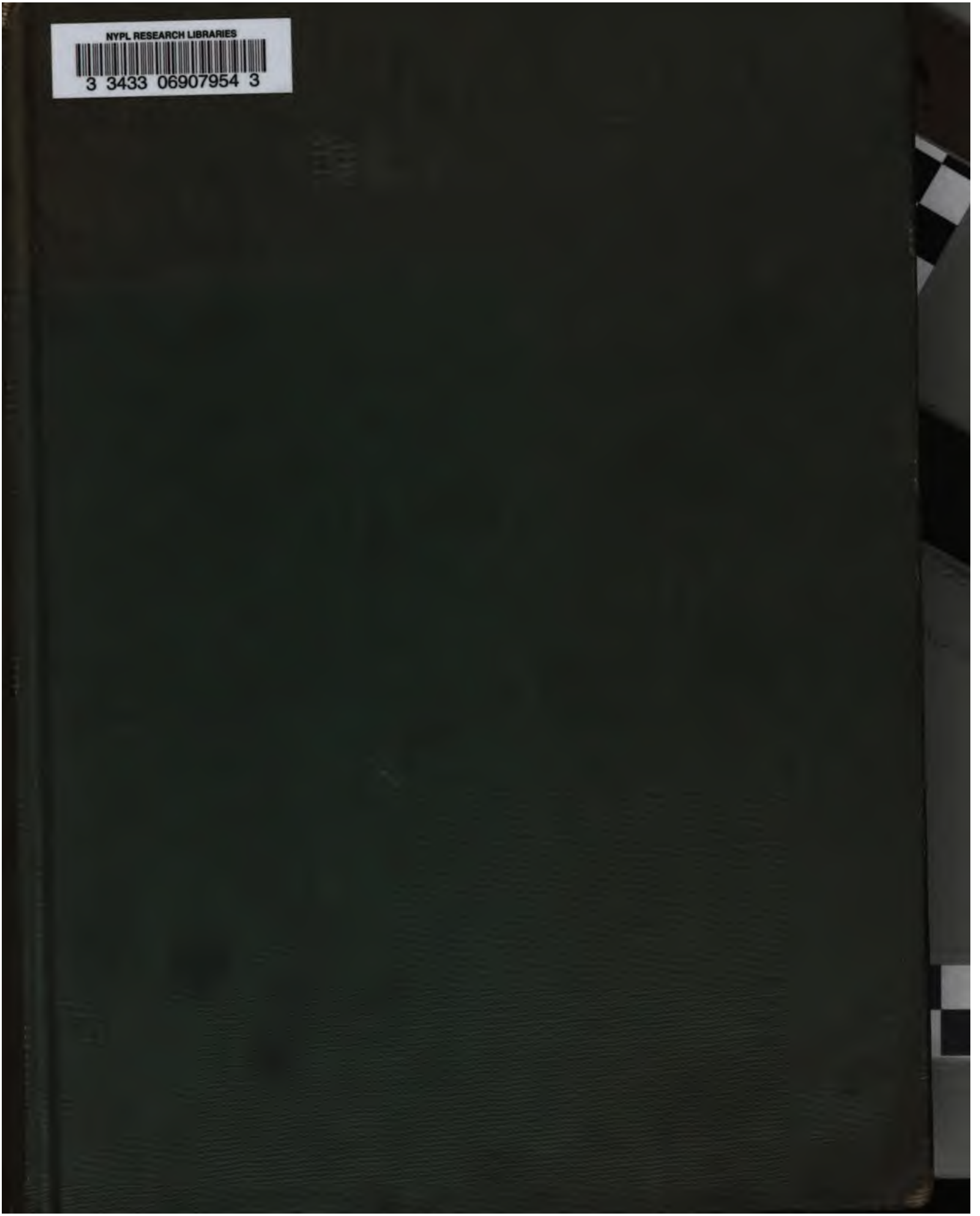
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907954 3

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX

DES PRINCIPALES PARTIES

DES MATHÉMATIQUES,

NÉCESSAIRES

A L'ARTILLERIE ET AU GÉNIE.

Par M. l'Abbé DEIDIER, *Professeur Royal de Mathématique aux Ecoles d'Artillerie de* LA FERE.

NOUVELLE ÉDITION,

Dirigée, rectifiée, présentée avec plus d'ordre & de goût; &, en plusieurs articles, réformée ou perfectionnée, par l'Auteur de la *THÉORIE DES ÊTRES SENSIBLES.*

TOME SECOND.

PUBLIC

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Pere, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie.

M. DCC. LXXIII.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

TABLE
DES MATIERES
Contenues dans ce ſecond Volume.

LES SECTIONS CONIQUES:
SUITE DU LIVRE SECOND,
OU DE LA GÉOMÉTRIE.

DÉFINITIONS & Principes, ou idée générale des Sections Coniques enviſagées dans le Cône, page 1
LA PARABOLE SUR UN PLAN HORS DU CONE, 5
Diametres de la Parabole, 11
Meſurer une Parabole, 29
L'ELLIPSE SUR UN PLAN HORS DU CONE, 34
Diametres de l'Ellipſe, 49
Meſurer une Ellipſe, 68
L'HYPERBOLE SUR UN PLAN HORS DU CONE, 79
Aſymptotes de l'Hyperbole, 93
Hyperboles conjuguées, 100
Équations aux Sections Coniques: article ajouté, 116

LIVRE TROISIEME.
Contenant l'Arithmétique des Infinis, & la Méchanique ou la Théorie du Mouvement.

ARITHMÉTIQUE DES INFINIS.

PRINCIPES de l'Arithmétique des Infinis, page 123
Obſervations touchant les Nombres infinis, 134
Application des Principes précédents à la Géométrie, 141

THÉORIE DU MOUVEMENT.

Définitions & Axiomes, 159
Des Loix du Mouvement uniforme, 162

Des Loix du Mouvement uniformément accéléré, 166
Loix du Mouvement retardé, 174
Du Mouvement composé de deux ou plusieurs forces uniformes, 181
Du Mouvement composé d'une force uniforme, & d'une force uniformément accélérée, où l'on traite du mouvement des corps projettés, & du jet des Bombes, 185
De l'inclinaison d'une bouche à feu : article ajouté, 202
Des Loix du Choc des Corps, 223
Du Choc oblique des Corps, 242
Du Choc des Bombes contre les Corps qu'elles rencontrent, & de leur enfoncement dans les terres, 245
DE LA STATIQUE. Du centre de gravité des Corps solides, 256
Application des Principes précédents à la Géométrie, 265
De la descente des Corps sur les Plans inclinés, 304
Des Puissances qui tirent des Poids avec des cordes, 320
Des Leviers, 325
De la Roue sur son aissieu, 338
Des Roues dentées, 339
Des Poulies, des Mousles, de la Chevre, du Cric, 340
De la Vis, 346
Du Coin, 347
DE L'HYDROSTATIQUE, 348
De l'Equilibre des Liqueurs, 351
Des Corps plongés dans des Fluides qui ont moins de pesanteur spécifique que ces Corps, 359
Des Corps plongés dans des Fluides qui ont plus de pesanteur spécifique qu'eux, 362
DE L'AIROMÉTRIE OU MESURE DE L'AIR, 365
Du Barometre, 372
Du Manometre, ou Manoscope, 373
Du Thermometre : article ajouté en entier, 374
De l'Hygrometre, 378
DE L'HYDRAULIQUE, 381
Des Machines hydrauliques, 394
Du Siphon, 397
De la Fontaine de Héron d'Alexandrie, 400
De la Pompe Aspirante, 401
De la Pompe Foulante, 403
Du Choc des Fluides contre les Corps solides, ibid.

Fin de la Table.

ÉLÉMENTS
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHÉMATIQUES.

LIVRE SECOND.

Suite de la Géométrie.

CHAPITRE XII.

LES SECTIONS CONIQUES.

DÉFINITIONS ET PRINCIPES.

626. UN eſpace ABC (*Fig.* 383), terminé par une courbe ABC toujours concave du même côté, étant donné avec pluſieurs lignes droites MN, OP, QR, paralleles entre elles, & qui ſe terminent

de part & d'autre à la courbe : s'il ſe trouve une ligne droite XZ qui coupe les paralleles chacune en deux également ; cette droite XZ ſe nomme *diametre* de la courbe, quand elle n'eſt pas perpendiculaire ſur les paralleles ; & *axe*, quand elle eſt perpendiculaire.

Le point B, où la ligne XZ coupe la courbe, ſe nomme *ſommet* du diametre ou de l'axe : les paralleles MN, OP, QR, ſe nomment *doubles ordonnées :* leurs moitiés HN, VP, ſont les *ordonnées ;* & les parties BH, BV, du diametre ou de l'axe, compriſes entre le ſommet B & chaque ordonnée, ſont les *abſciſſes.* Ainſi l'abſciſſe de l'ordonnée HN eſt la droite BH : celle de l'ordonnée VP eſt la droite BV ; & ainſi du reſte.

Si du point quelconque M pris ſur la courbe, on mene une ordonnée MH, & une tangente MX qui coupe le diametre ou l'axe prolongé en X ; la partie XH de cet axe ou diametre, compriſe entre la tangente MX & l'ordonnée MH, ſe nomme la *ſoutangente :* & ſi au même point M, on éleve ſur la tangente MX une perpendiculaire MY qui coupe l'axe en Y ; la partie HY de cet axe, compriſe entre l'ordonnée MH & la perpendiculaire MY, ſe nomme la *ſouperpendiculaire.* C'eſt par la connoiſſance de ces lignes & de leurs rapports entre elles, qu'on connoît les propriétés des courbes.

Formation & Sections du Cône.

627. HYPOTHESE. Si l'on fait tourner un triangle rectangle ABC (*Fig.* 384) autour du côté fixe AB, on concevra aiſément qu'il décrira un cône droit ACH ; & que ſes éléments DE, FG, CB, paralleles à la baſe CB, décriront des cercles qui auront tous leurs centres ſur la droite AB qui ſera par conſéquent l'axe du cône. Or, de là il ſuit :

I°. Que ſi d'un point quelconque Q de la circonférence de la baſe du cône, on mene une droite QA au ſommet A ; cette droite ſera toute entiere ſur la ſurface du cône, puiſqu'elle ne ſera autre choſe que la droite CA du triangle générateur ABC, lorſqu'en tournant il ſera parvenu à la poſition ABQ.

II°. Qu'en quelque point D qu'on coupe le cône par un plan parallele à ſa baſe, ce plan ſera un cercle, puiſqu'il ne différera pas du cercle décrit par l'élément DE.

III°. Enfin, que ſi l'on coupe un cône par un plan perpendiculaire ſur la baſe, & qui paſſe par le centre B, la ſection ſera un triangle : car l'axe BA, étant perpendiculaire ſur la baſe, ſera dans le plan coupant, lequel par conſéquent paſſera par le ſommet A ;

& la commune ſection du plan coupant & de la baſe ſera un diametre CH de la baſe. Ainſi par les points C & H, menant au ſommet les droites CA, CH, qui ſeront ſur la ſurface du cône, comme il vient d'être dit, ces droites feront avec le diametre CH un triangle qui ſera le même que le plan coupant.

Formation de la Parabole.

628. HYPOTHESE. Si l'on conçoit dans un cône BAC (*Fig.* 385), la ſection triangulaire BAC, dans laquelle ſoit une ligne DE parallele à l'un des côtés AB; & que l'on vienne à couper le cône par un plan perpendiculaire au triangle, & qui paſſe par la ligne DE; la ſection ſera une ſurface plane QDO terminée par une courbe QDO, qu'on nomme *parabole.*

629. REMARQUE. *La droite DE eſt l'axe de la parabole.* Car ſi l'on coupe le cône & la parabole par une infinité de plans MN, paralleles à la baſe BC du cône; tous ces plans ou cercles ſeront perpendiculaires ſur le triangle BAC, à cauſe que ce triangle eſt perpendiculaire ſur la baſe BC. Et comme la parabole eſt auſſi perpendiculaire ſur le même triangle, il s'enſuit que les droites RT, OQ, qui ſont les communes ſections des cercles MN, BC, & de la parabole, ſeront perpendiculaires ſur le triangle (478), & par conſéquent ſur les droites MN, BC, DE, qui ſont dans le plan de ce triangle, & qui ſe coupent aux points S, E, par où les perpendiculaires RT, OQ, paſſent (463). Or, MN, BC, ſont les diametres des cercles; & RT, OQ ſont leurs cordes: donc, puiſque ces cordes ſont perpendiculaires ſur leurs diametres, elles ſont coupées en deux également en S, E, &c. Par conſéquent la droite DE qui paſſe par tous ces points, coupe les droites RT, OQ, en deux également; & à cauſe qu'elle leur eſt perpendiculaire, elle eſt leur axe (626).

630. THÉORÊME. *La principale propriété de la parabole eſt, que les quarrés des ordonnées ST, EQ, ſont entre eux comme leurs abſciſſes DS, DE* (Fig. 385).

DÉMONSTRATION. Dans les cercles MN, BC, nous avons $\overline{ST}^2 = MS \times SN$, & $\overline{EQ}^2 = BE \times EC$: donc $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$.

Mais, à cauſe des paralleles AB, DE, les paralleles MS, BE, ſont égales: donc les rectangles $MS \times SN$ & $BE \times EC$, ayant une dimenſion égale, ſont entre eux comme les dimenſions inégales SN, EC. Ainſi nous avons $\overline{ST}^2 . \overline{EQ}^2 :: SN . EC$.

Mais les triangles ſemblables DSN, DEC donnent SN. EC :: DS. DE : donc $\overline{ST}$. $\overline{EQ}$ :: DS. DE, Ce qu'il falloit démontrer.

Formation de l'Ellipſe.

631. HYPOTHESE. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC (*Fig.* 386), la ſection triangulaire BAC avec une droite DE qui coupe les côtés non parallèlement à la baſe BC, & qu'on coupe le cône par un plan perpendiculaire ſur le triangle, & qui paſſe par la droite DE ; la ſection ſera une ſurface plane terminée par une courbe DTPEQR, qu'on nomme *ellipſe*.

Si l'on coupe le cône & l'ellipſe par des plans FG, HI, paralleles à la baſe BC, on démontrera, comme dans la parabole, que les communes ſections TR, PQ, de ces plans ou cercles & de l'ellipſe, ſont perpendiculaires ſur la droite DSE qui les coupe en deux également, & qui par conſéquent eſt leur axe (626).

632. THÉORÊME. *La principale propriété de l'ellipſe eſt, que les quarrés des ordonnées TS, PO, ſont entre eux comme les rectangles DS × SE, DO × OE, des parties de l'axe qu'elles coupent* (Fig. 386).

DÉMONSTRATION. A cauſe des cercles FG, HI, nous avons $\overline{TS} = FS \times SG$, & $\overline{PO} = HO \times OI$: donc $\overline{TS}$. $\overline{PO}$ :: FS × SG. HO × OI. Or les triangles ſemblables FSD, HOD, donnent FS. HO :: DS. DO ; & à cauſe des triangles ſemblables GSE, IOE, nous avons GS. IO :: SE. OE. Multipliant donc les termes de ces deux proportions les unes par les autres, nous aurons FS × GS. HO × IO :: DS × SE. DO × OE.

Mais nous venons de trouver $\overline{TS}$. $\overline{PO}$ :: FS × GS :: HO × IO : donc $\overline{TS}$. $\overline{PO}$ :: DS × SE. DO × OE. Ce qu'il falloit démontrer.

Formation de l'Hyperbole.

633. HYPOTHESE. Si l'on conçoit dans un cône droit BAC la ſection triangulaire BAC avec une droite DE perpendiculaire à la baſe BC, & qui ſoit différente de l'axe ; & qu'on coupe le cône par un plan perpendiculaire au triangle, & qui paſſe par la droite DE, la ſection ſera une ſurface plane terminée par une courbe DQOD, qu'on nomme *hyperbole* (Fig. 387).

Si l'on coupe l'hyperbole & le cône par des plans MN, paralleles à la baſe BC, on démontrera, comme dans la parabole, que les droites RT, OQ, ſont perpendiculaires ſur DE qui les coupe

en deux également, & qui par conſéquent eſt leur axe (626).

Si l'on conçoit un cône XAZ, oppoſé par ſon ſommet au cône BAC; & qu'ayant prolongé le côté BA du triangle BAC en Z, on prolonge la droite DE juſqu'à la rencontre de AZ en Z; la partie DZ de cette droite, compriſe entre les deux cônes, ſe nomme *premier axe de l'hyperbole* : nous parlerons du ſecond axe dans la ſuite.

634. THÉORÊME. *La principale propriété de l'hyperbole eſt, que les quarrés des ordonnées ST, EQ, ſont entre eux comme les rectangles SD × SZ, ED × EZ, faits ſous les abſciſſes SD, ED, & les droites SZ, EZ, qui ſont l'axe ZD prolongé juſqu'aux ordonnées* (Fig. 387).

DÉMONSTRATION. A cauſe des cercles MN, BC, nous avons $\overline{TS}^2 = MS \times SN$; & $\overline{QE}^2 = BE \times EC$: donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$. Mais les triangles ſemblables MSZ, BEZ, donnent MS. BE :: SZ. EZ; & à cauſe des triangles ſemblables DSN, DEC, nous avons SN. EC :: DS. DE. Multipliant donc les termes de ces deux dernieres proportions les uns par les autres, nous aurons $MS \times SN . BE \times EC :: SZ \times DS :: EZ \times DE$.

Or, nous venons de trouver $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: MS \times SN . BE \times EC$: donc $\overline{TS}^2 . \overline{QE}^2 :: SZ \times DS . EZ \times DE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Comme il ſeroit trop embarraſſant de déduire les autres propriétés des ſections coniques dans le cône même, nous allons les conſidérer dans un plan.

LA PARABOLE CONSIDÉRÉE DANS UN PLAN, HORS DU CONE.

635. PROBLÊME. *Décrire une parabole ſur un plan* (Fig. 388).

SOLUTION. Je prends une ligne indéfinie AB, que je nomme la *directrice*. Sur le point du milieu C, j'éleve une perpendiculaire indéfinie CS, ſur laquelle je prends à diſcrétion deux parties égales CD, DO; & je nomme le point O, *foyer*. Je conçois que ſur tous les points de DS, ſoient élevées des perpendiculaires indéfinies MN, PQ, RT, VX, &c. Je prends avec le compas la diſtance HC de la perpendiculaire PQ à la directrice; & portant l'une des pointes du compas ſur le foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe PQ en deux points P & Q. Je prends de même la diſtance LC de la perpendiculaire VX à la directrice; & portant l'une des pointes du compas au foyer O, je décris avec cette ouverture un arc qui coupe la perpendiculaire en deux points V, X. Je fais la même choſe à l'égard des autres perpendiculaires,

qui par conſéquent me donnent toutes deux points également éloignés de CS, à l'exception de la droite MN qui ne me donne que le point D; à cauſe que ſa diſtance DC à la directrice étant égale à la diſtance OD, l'arc que je décrirois avec cette diſtance, en prenant le foyer pour centre, ne fait que toucher cette perpendiculaire MN en D ſans la couper. Quant aux autres perpendiculaires, telles que EF, qui couperoient la partie CD, il eſt clair qu'en prenant leurs diſtances GC à la directrice, & prenant pour centre le foyer, l'arc décrit avec cette ouverture ne couperoit point la perpendiculaire, à cauſe de OG plus grand que GC. Faiſant donc paſſer une courbe ZVRPDQTXY par tous les points trouvés, l'axe de cette courbe eſt la droite DS: ſes ordonnées ſont les droites PH, RO, &c. & ſes abſciſſes ſont les droites DH, DO, &c. il reſte donc à faire voir que cette courbe eſt une parabole.

Il y a ici deux ſortes d'ordonnées; les unes VL, ZK, &c. qui ſont en deſſous du foyer; & les autres, telles que PH, qui ſont entre le foyer O & le ſommet D. Commençons par les premieres (*Fig.* 389).

I°. Je mene du foyer O la droite OV à l'extrémité de l'ordonnée VL: ce qui me donne un triangle rectangle VOL, dans lequel j'ai $\overline{VL}=\overline{VO}-\overline{OL}$; & à cauſe de VO=LC par la conſtruction, j'ai $\overline{VL}=\overline{LC}-\overline{OL}$: & faiſant le quarré LB de LC, & le quarré LR de LO, j'ai le quarré $\overline{VL}$ égal au gnomon ou équerre CBFIRO.

Or la ligne CL eſt diviſée en deux parties CO, OL: le gnomon contient le quarré RB de la partie CO, plus deux rectangles égaux CR, RF, des parties CO, OL (140). Ainſi coupant le quarré RB en deux également par la droite MN, parallele à RE, & donnant la moitié de ce quarré à chacun des deux rectangles, le gnomon ſera égal à deux fois le rectangle IMNF, c'eſt-à-dire à IM multiplié par deux fois IF. Or, IM=DL. Car à cauſe de HR égal à CO, & du point M qui diviſe HR en deux également, de même que CO eſt diviſé en deux également en D, on a DO=MR; & DO+OL =MR+RI=MI; & IF égal à OC, à cauſe de LC=LF, & de LI=LO: donc le rectangle IMNF=DL × OC; & par conſéquent 2 IMNF=DL × 2 OC: c'eſt-à-dire, le gnomon ou le quarré de l'ordonnée VL eſt égal à l'abſciſſe correſpondante DL multipliée par 2 fois la diſtance OC du foyer à la directrice, ou par 4 fois la diſtance OD du foyer au ſommet.

Or, je prouverai de la même façon, que le quarré de l'ordonnée ZY eſt égal à ſon abſciſſe DY multipliée par 4 fois la diſtance OD:

donc les quarrés des ordonnées VL, ZV, ſont entre eux comme leurs abſciſſes DL, DV, multipliées chacune par 4OD, & par conſéquent comme leurs abſciſſes, à cauſe du multiplicateur commun 4OD.

II°. Maintenant, ſoit une ordonnée PM (*Fig.* 390) entre le foyer O & le ſommet D. Je mene du foyer O la droite OP; & dans le triangle rectangle PMO, j'ai $\overline{PM}=\overline{PO}-\overline{MO}=\overline{MC}-\overline{MO}$: car par la conſtruction, j'ai PO=MC. Je fais le quarré CH de CM; & prenant CL=MO, je fais le quarré CR, & par conſéquent le quarré $\overline{PM}$ eſt égal au gnomon MHASRL qui contient le quarré RH de la partie LM, & deux rectangles AR, RM, des parties CL, LM. Je diviſe le quarré RH en deux également par la ligne QX; & donnant la moitié de ce quarré à chaque rectangle, le gnomon ou le quarré PM eſt égal à 2 fois le rectangle SXQA, ou à 2SX×SA. Mais SA=LM, & LM=2MD, à cauſe de DO=DC, & de MO=CL: donc le quarré $\overline{PM}$=2SX×2MD=4SX×MD; c'eſt-à-dire, le quarré de l'ordonnée PM égal à ſon abſciſſe MD multipliée par 4SX, ou 4CD, ou 4DO.

Ainſi le quarré de l'ordonnée PM eſt au quarré de l'ordonnée VE, qui eſt au-deſſous du foyer, comme l'abſciſſe DM, multipliée par 4DO, eſt à l'abſciſſe DE multipliée par 4DO, ou comme DM eſt à DE: donc la courbe eſt une parabole (630).

636. REMARQUE. La droite égale à 4DO ſe nomme *parametre* de l'axe.

637. COROLLAIRE I. *La droite MN, parallele aux ordonnées, & qui paſſe par le ſommet D, eſt tangente de la parabole.* Car tous les autres points de la parabole ſont au-deſſous de cette droite par la conſtruction (*Fig.* 388).

Il faut obſerver ici que lorſqu'on veut conſtruire une parabole par pluſieurs points, cette parabole ſera d'autant plus exacte, que les perpendiculaires PQ, RT, &c. ſeront plus proches entre elles.

638. COROLLAIRE II. *Du foyer O* (Fig. 391) *ayant mené une droite OS qui coupe la parabole en un point quelconque V, je dis:*

I°. *Que ſi du point V on mene une perpendiculaire VT ſur la directrice, cette perpendiculaire VT ſera toujours égale à la droite VO, compriſe entre la courbe & le foyer.*

II°. *Que ſi du point X de la droite SO, pris entre la courbe &*

le foyer, on mene une perpendiculaire XH ſur la directrice, cette perpendiculaire ſera plus grande que la droite XO compriſe entre elle & le foyer.

III°. *Enfin que ſi du point S de la droite OS pris hors de la courbe, on mene une perpendiculaire SA ſur la directrice, cette perpendiculaire SA ſera plus courte que la droite SO compriſe entre elle & le foyer.*

I°. DÉMONSTRATION. Du point V, je mene l'ordonnée VE à l'axe; & par la conſtruction de la parabole, j'ai EC=OV. Mais à cauſe des paralleles, j'ai EC=VT: donc VT=VO.

II°. Du point X, je mene XR perpendiculaire ſur TV. Dans le triangle rectangle VRX, l'hypothénuſe XV eſt plus grande que le côté RV: or nous avons TV=VO: donc TV—VR, c'eſt-à-dire TR, eſt plus grand que VO—VX, c'eſt-à-dire que XO. Mais TR=HX: donc HX eſt plus grande que XO.

III°. Du point V, je mene VM perpendiculaire ſur SA; & dans le triangle rectangle SMV, j'ai MS plus petite que SV. Or nous avons TV ou AM=VO: donc AM+MS eſt plus petite que VO +VS, c'eſt-à-dire AS eſt plus petite que SO. Ce qu'il falloit démontrer.

639. COROLLAIRE III. Donc, 1°. quand la perpendiculaire VT, menée ſur la directrice, eſt égale à VO; le point V eſt ſur la courbe. 2°. Quand la perpendiculaire XH eſt plus grande que XO; le point X eſt entre la courbe & le foyer. 3°. Quand la perpendiculaire SA eſt moindre que SO; le point S eſt hors de la courbe.

640. PROBLÊME. *D'un point donné P, pris ſur la courbe d'une parabole hors du ſommet A de l'axe, mener une tangente à la parabole* (Fig. 392).

SOLUTION. Du point P, je mene l'ordonnée PS, la droite PR perpendiculaire ſur la directrice, la droite PO au foyer O; & joignant la droite RO, que je diviſe en deux également en H, je mene par les points P & H, la droite PHT qui eſt la tangente demandée.

Car ſi l'on veut que la droite PT touche la courbe en quelque autre point; ce point ſera, ou entre P & T comme en M, ou en delà comme en Z. Suppoſé donc qu'il ſoit en M; je mene du point M la droite MO au foyer, la droite MR au point R, & la droite MV perpendiculaire ſur la directrice: le triangle RPO eſt iſoſcele; car PR=NS, à cauſe des paralleles; & PO=NS, par

la

la conſtruction de la parabole. Or la droite PH étant perpendiculaire ſur le milieu de RO, tous ſes points tels que M ſont également éloignés de R & O : donc RM=MO ; & le triangle RMO eſt iſoſcele. Mais dans le triangle rectangle RVM, l'hypothénuſe RM eſt plus grande que le côté MV : donc MO eſt auſſi plus grand que MV ; & par conſéquent le point M eſt hors de la parabole (639). On prouvera de la même façon que le point Z eſt hors de la parabole. Donc la droite ZT ne touchera la parabole qu'en P.

641. COROLLAIRE I. *La ſoutangente TS eſt coupée en deux également au ſommet A de l'axe* (Fig. 392).

DÉMONSTRATION. Les triangles rectangles PRH, THO, ſont ſemblables & égaux ; à cauſe de l'angle aigu RPT, égal à ſon alterne PTO, ce qui rend les trois angles égaux chacun à chacun ; & à cauſe du côté RH égal au côté HO : donc PR=TO. Mais PR=NS ; donc TO=NS : & retranchant de TO la partie AO, & de la droite NS la partie NA=AO par la conſtruction de la parabole, j'ai TA=AS.

642. COROLLAIRE II. Donc *pour mener une tangente d'un point P*, il n'y a qu'à mener l'ordonnée, puis prolonger l'axe au-delà du ſommet juſqu'à ce que TA ſoit égal à AS, & mener la droite PT qui ſera la tangente demandée.

643. COROLLAIRE III. *Si ſur le point d'attouchement P, on éleve la droite PL perpendiculaire ſur la tangente ; la ſouperpendiculaire SL eſt égale à la moitié du parametre.*

DÉMONSTRATION. La droite RO étant perpendiculaire ſur la tangente, eſt par conſéquent parallele & égale à PL, à cauſe des paralleles PR, LN ; & la droite RN eſt auſſi égale à PS : donc les triangles rectangles PSL, RNO, ſont ſemblables & égaux ; & SL=NO. Mais NO eſt la moitié du parametre (636) : donc la ſouperpendiculaire SL eſt égale à la moitié du parametre.

644. COROLLAIRE IV. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la parabole, ſont inclinées entre elles, & ſe coupent entre les points d'attouchement* (Fig. 393).

DÉMONSTRATION. I°. Soient les points d'attouchement H, Q, pris l'un à gauche & l'autre à droite de l'axe. Je mene les ordonnées HS, QE ; & faiſant AB=AS, & AC=AE, la tangente au

point H ſera HB, & la tangente au point Q ſera QC (642). Ainſi comme ces deux tangentes ſont inclinées ſur l'axe, il eſt clair qu'en prolongeant la plus courte HB, elle coupera l'autre en un point D, qui ſera entre les points d'attouchement H, Q.

II°. De même ſoient les points d'attouchement H, P, pris du même côté de l'axe. Menant les ordonnées HS, PN, & faiſant BA = AS, & AT égal à AN; la tangente du point H ſera BH ou BX; & la tangente du point P ſera PT. Or PT ne peut aller aboutir en T, qui eſt plus éloigné du ſommet A que le point B, ſans couper BX, & elle ne peut couper BX entre B & H, par exemple, en R: car ſi cela étoit, il faudroit qu'elle paſſât entre l'axe & le point d'attouchement H; & par conſéquent elle couperoit la parabole, & ne ſeroit plus tangente: donc il faut néceſſairement qu'elle coupe BX en quelque point M entre les points d'attouchement P & H.

645. COROLLAIRE V. *Une tangente PT ne peut toucher la parabole en deux points* (Fig. 394).

DÉMONSTRATION. Si l'on veut que PT touche la parabole en P & R; la droite PR, menée entre ces deux points, ſera la plus courte qu'on puiſſe mener: or l'arc parabolique PR eſt courbe; & comme par la formation de la parabole dans le cône, ſa concavité eſt toujours tournée vers l'axe, la droite PR doit paſſer entre l'axe & la courbe: donc PR doit couper la courbe au lieu de la toucher; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

646. COROLLAIRE VI. *D'un même point P, on ne peut mener deux tangentes* (Fig. 395).

DÉMONSTRATION. Si l'on veut qu'on puiſſe en mener deux, la ſeconde tangente coupera l'axe en un point C, plus près du ſommet A que le point T où la premiere tangente PT la coupe; ou en un point S plus éloigné. Suppoſons donc qu'elle la coupe en C.

Je prends AN = CA: du point N, je mene l'ordonnée NQ; & du point Q par le point C, je mene la droite QC qui ſera tangente en Q, puiſque la ſoutangente NC eſt double de l'abſciſſe AN (641); & CQ prolongée coupera PT en un point M entre les points d'attouchement P, Q (644). Or, la ſeconde tangente menée du point P au point C, paſſera néceſſairement entre M & Q; car autrement elle entreroit dans la parabole: ainſi elle coupera CM entre M & Q, & enſuite en Q; ce qui n'eſt pas poſſible: & on démontreroit la même choſe, ſi la ſeconde tangente coupoit l'axe en S.

PROPOSITION I.

647. *Toutes les lignes DK, paralleles à l'axe AB, coupent la parabole, & ne la coupent qu'en un point; & toutes les lignes RT qui ne ſont pas paralleles à l'axe, & qui coupent la parabole en un point, la coupent encore en un autre point* (Fig. 396).

DÉMONSTRATION. I°. Les quarrés des ordonnées étant entre eux comme leurs abſciſſes, il eſt clair qu'à meſure que les abſciſſes ſont plus grandes, les quarrés des ordonnées ſont plus grands, & par conſéquent les ordonnées ſont auſſi plus grandes. Ainſi la courbe de la parabole s'éloigne de plus en plus de ſon axe. Or la diſtance DN de la ligne DK à l'axe, quelque grande qu'elle ſoit, eſt toujours la même, à cauſe du paralléliſme: donc il ſe trouvera toujours quelque ordonnée OF égale à DN, & par conſéquent DK coupera la parabole en O. Après quoi les autres ordonnées croiſſant toujours, la courbe s'éloignera de plus en plus de DK, qui par conſéquent ne la coupera plus.

II°. Par la ſuppoſition, la ligne RT eſt oblique à l'axe, & coupe la parabole en R. Or de tous les points H, X, de l'arc parabolique indéfini RHXP, on peut mener des tangentes MHN, SXQ; & ces tangentes ſont toutes diverſement inclinées, de façon que les inférieures SXQ coupent les ſupérieures MHN (644). Ainſi les angles NHE, QXF, qu'elles font avec les ordonnées HE, XF, menées des points d'attouchement H, X, vont en augmentant à meſure que les points d'attouchement s'éloignent du ſommet A de la parabole. Donc il faut néceſſairement qu'il ſe trouve quelque tangente, telle que QXS, qui faſſe avec l'ordonnée XF, un angle QXF, plus grand que l'angle que la ligne RT fait avec la même ordonnée. Or en ce cas les droites QXS, RTS, n'étant pas paralleles, ſe couperont en quelque point S; & ce point ſera hors de la parabole, à cauſe que QXS eſt tangente: donc la ligne RT, qui entre dans la parabole en R, & qui viendra couper la tangente QXS en S, doit néceſſairement couper la parabole en un autre point T. Ce qu'il falloit démontrer.

DIAMETRES DE LA PARABOLE.

648. DÉFINITION. Toute ligne DK, parallele à l'axe AB, ſe nomme *diametre* de la parabole, à cauſe qu'on peut toujours trouver une infinité de lignes paralleles entre elles, & terminées de part & d'autre à la courbe, leſquelles ſeront coupées chacune en

deux également par la ligne DK, comme il ſera démontré plus bas (*Fig.* 396).

PROPOSITION II.

649. *L'axe AB, un diametre PR, & leurs tangentes AP, NT, aux ſommets A & N, étant donnés ; le triangle TOA fait par ces tangentes & l'axe, eſt égal au triangle PON fait par les mêmes tangentes & le diametre* (Fig. 397).

DÉMONSTRATION. Les triangles rectangles TOA, PON, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle aigu PNT, égal à ſon alterne NTA. Mais en menant du point N l'ordonnée NB à l'axe, on a PN = AB, & nous avons auſſi AB = AT (641) : donc le côté AB étant égal au côté AT, les deux triangles ſont non ſeulement ſemblables, mais encore égaux. C. Q. F. D.

650. COROLLAIRE. *Le rectangle PANB fait par la tangente PA, & l'ordonnée NB, avec l'axe & le diametre, eſt égal au triangle NTB fait par l'autre tangente avec l'ordonnée NB, & ſa ſoutangente.* Car ſi à chacun des triangles égaux TOA, PON, on ajoute le quadrilatere OANB, on aura PANB = NTB.

651. REMARQUE. Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont le fondement de preſque tout ce que nous allons dire, & par conſéquent il faut y faire attention. Il faut auſſi remarquer que les tangentes NT, AP, compriſes entre l'axe & le diametre, ſont coupées chacune également au point O ; car les triangles TOA, PON, ſemblables & égaux, donnent NO = OT, & PO = OA.

PROPOSITION III.

652. *L'axe AB, un diametre PR, & leurs tangentes AP & NT, aux ſommets A & N, étant donnés ; ſi d'un point quelconque S, pris ſur la courbe, on mene deux droites ZSX, CD, paralleles aux tangentes, il ſe formera deux triangles, l'un SZD avec l'axe, & l'autre CSV avec le diametre ; & je dis :*

I°. *Que le triangle SZD, fait par les paralleles & l'axe, eſt égal au rectangle PADC, fait par la tangente de l'axe & ſa parallele entre l'axe & le diametre.*

II°. *Que le triangle CSV, fait par les mêmes paralleles & le diametre, eſt égal au parallélogramme NTZV, fait par la tangente du diametre & ſa parallele compriſes entre l'axe & le diametre* (Fig. 398).

DÉMONSTRATION. I°. Commençons d'abord par le *triangle fait*

avec l'axe. Mais auparavant il faut remarquer, en premier lieu, que le point d'où l'on mene les paralleles peut être pris entre le diametre & l'axe, comme le point S; & alors le triangle fait par les paralleles & l'axe, eſt ZSD: en ſecond lieu, que ce point peut être pris en-delà du diametre, comme le point X; auquel cas le triangle fait par les paralelles XZ, XB, & l'axe, eſt ZXB: en troiſieme lieu enfin, que ce point peut être pris au-delà de l'axe, comme le point E; & alors le triangle fait par les paralleles DC, DH, & l'axe, eſt DEH. Cela poſé:

Si le point eſt en S, je ſais que le triangle TNQ eſt égal au rectangle PAQN (650): or à cauſe des paralleles NT, SZ, & NQ, SD, ces deux triangles ſont ſemblables, & ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues NQ, SD: donc TNQ, ZSD :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$. Mais NQ, SD, étant ordonnées à l'axe, nous avons $\overline{NQ}^2$, $\overline{SD}^2$ :: QA, DA. Donc TNQ, ZSD :: QA, DA; & multipliant les deux derniers termes par la même grandeur AP, nous aurons TNQ, ZSD :: QA × AP, DA × AP. Or QA × AP = PAQN, & DA × AP = PADC: donc TNQ, ZSD :: PAQN, PADC. Mais TNQ = PAQN: donc ZSD = PADC.

De même ſi le point d'où l'on mene les paralleles eſt X, le triangle TNQ eſt ſemblable au triangle ZXB fait par les paralleles ZX, XB, & l'axe: donc on aura encore TNQ, ZXB :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{XB}^2$ :: QA, BA :: QA × AP, BA × AP :: PAQN, PABR. Or TNQ = PAQN: donc ZXB = PABR.

Enfin, ſi le point d'où l'on mene les paralleles eſt E, le triangle TNQ eſt encore ſemblable au triangle DEH fait par les paralleles & l'axe, à cauſe de l'angle aigu NTH égal à ſon alterne THE: donc aura encore TNQ, DEH :: $\overline{NQ}^2$, $\overline{DE}^2$ :: QA, DA :: QA × AP, DA × AP :: PAQN, PADC. Or TNQ = PAQN; donc DEH = PADC.

II°. Venons enſuite au *triangle fait avec les paralleles & le diametre.*

D'abord ſi le point d'où l'on mene les paralleles eſt S, le triangle eſt CSV. Or je dis: le triangle TNQ eſt égal au rectangle PANQ: & retranchant du triangle TNQ, le triangle ZSD; & du rectangle PAQN, le rectangle PADC, égal au triangle ZSD, comme on vient de le voir, il reſte TNLZ + SLQD = CDNQ: & retranchant la partie commune SLQD, il reſte TNLZ = CSLN; & ajoutant de part & d'autre le triangle NLV, nous aurons TNVZ = CSV.

Enſuite ſi le point d'où l'on mene les paralleles eſt X, le triangle fait

avec les paralleles & le diametre, eſt VXR. Or nous avons trouvé ZXB=PABR : retranchant donc du triangle ZXB, le triangle ZSD ; & du rectangle PABR, le rectangle PADC=ZSD ; nous aurons SDBX=CDBR : & retranchant la partie commune SDBRV, nous aurons XVR=CSV. Mais CSV=NTZV : donc XVR=NTZV.

Enfin, ſi le point d'où l'on mene les paralleles eſt E ; le triangle fait avec les paralleles & le diametre, ſera EKC. Or le triangle EDH, fait par les mêmes paralleles avec l'axe, eſt égal à PADC : donc le triangle EKC=PAHK ; & retranchant du ſecond membre le triangle PNO, & lui donnant en ſa place le triangle TOA=PON (649), nous aurons EKC=NTHK. Ce qu'il falloit démontrer.

653. COROLLAIRE. *Toute ligne SX, parallele à une tangente NT, & terminée de part & d'autre à la courbe parabolique, eſt diviſée en deux également en V, par le diametre PR qui paſſe par le point d'attouchement* (Fig. 398).

DÉMONSTRATION. Nous venons de trouver le triangle CSV égal au triangle XVR (652) : or ces deux triangles ſont ſemblables, à cauſe des angles oppoſés au ſommet égaux, & de l'angle aigu VXR égal à ſon alterne VSC : donc les côtés de ce triangle ſont égaux, & nous avons SV=VX.

REMARQUE. On a donc eu raiſon de dire (648), que toute ligne PR parallele à l'axe eſt un diametre. Car en quelque point N que cette ligne coupe la courbe, on n'aura qu'à mener une tangente par ce point, & des paralleles à cette tangente compriſes entre la courbe ; & l'on prouvera toujours que PR eſt un diametre : d'où il ſuit que tous les diametres ſont paralleles à l'axe.

654. COROLLAIRE II. *Donc les moitiés de toutes les lignes, telles que SV, paralleles à une tangente NT, ſont les ordonnées du diametre PR qui paſſe par le point d'attouchement* (626).

655. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées à un diametre ſont entre eux comme les abſciſſes de ce diametre* (Fig. 399).

DÉMONSTRATION. Soit le diametre PR, l'axe AB, les tangentes NT & AP, & les droites SM, EH, ordonnées au diametre PR. Je prolonge ces ordonnées juſqu'à l'axe ; & des points S, E, je mene des droites SI, EL, paralleles à la tangente AP. Le triangle ISM, fait par deux paralleles aux tangentes & par le diametre, eſt donc égal au parallélogramme NTOM (652) : & par la même raiſon,

le triangle LEH eſt égal au parallélogramme NTQH: donc ISM, LEH :: NTOM, NTQH.

Mais à cauſe de la ſimilitude des triangles ISM, LEH, nous avons ISM, LEH :: $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$: donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NTOM, NTQH. Mais ces deux derniers termes, ou parallélogrammes, étant entre mêmes paralleles PR, TB, ſont entre eux comme leurs baſes NM, NH: donc $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH.

PROPOSITION IV.

656. *Si l'on cherche une troiſieme proportionnelle à une abſciſſe NM d'un diametre PR, & à ſon ordonnée MS, les quarrés des ordonnées à ce diametre ſeront égaux à leurs abſciſſes multipliées par cette troiſieme proportionnelle* (Fig. 399).

DÉMONSTRATION. Nous avons $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM, NH (655). Nommant donc la troiſieme proportionnelle x, & multipliant les deux abſciſſes par la même grandeur x, nous aurons encore $\overline{MS}^2$, $\overline{HE}^2$ :: NM × x, NH × x. Mais à cauſe de la proportion continue :: NM. MS. x, nous avons $\overline{MS}^2$ = NM × x, c'eſt-à-dire, les deux antécédents $\overline{MS}^2$, NM × x, de la proportion $\overline{MS}^2$. $\overline{HE}^2$ :: NM × x. NH × x, ſont égaux : donc les deux conſéquents $\overline{HE}^2$, NH × x, ſont auſſi égaux. C. Q. F. D.

657. REMARQUE. La troiſieme proportionnelle à l'abſciſſe NM, & à l'ordonnée MS d'un diametre PR, ſe nomme le *parametre de ce diametre*, à cauſe que cette proportionnelle, multipliant l'abſciſſe, fait un produit égal au quarré de l'ordonnée; de même qu'à l'égard de l'axe, le produit de l'abſciſſe par le parametre eſt égal au quarré de l'ordonnée.

658. COROLLAIRE I. *Le parametre d'un diametre ayant été pris troiſieme proportionnelle à une abſciſſe NM, & à ſon ordonnée MS, eſt auſſi troiſieme proportionnelle à une autre abſciſſe quelconque NH, & à ſon ordonnée HE.* Car nommant ce parametre x, nous avons $\overline{HE}^2$ = NH × x (656): donc :: NH. HE. x.

659. COROLLAIRE II. *Si du ſommet N d'un diametre PR, on mene une ordonnée NB à l'axe, le parametre du diametre PR ſera égal au parametre de l'axe, plus quatre fois l'abſciſſe AB de cet axe* (Fig. 400).

DÉMONSTRATION. Du ſommet A, je mene l'ordonnée AR au

diametre PR : ainſi le parametre du diametre ſera une troiſieme proportionnelle à l'abſciſſe NR, & à l'ordonnée AR. Mais à cauſe des paralleles NT, RA, & NR, TA, nous avons NR=TA, & AR=NT : donc le parametre du diametre ſera troiſieme proportionnelle à la moitié TA de la ſoutangente TB, & à la tangente NT. Par conſéquent :: TA. TN. x : d'où je tire $\overline{TN}=TA\times x$.

Mais à cauſe du triangle rectangle NTB, j'ai $\overline{TN}=\overline{NB}+\overline{TB}$ $=AB\times 4AO+4\overline{TA}=TA\times 4AO+4\overline{TA}$. Car TA=BA(641); & par la propriété de la parabole, $\overline{NB}=AB\times 4AO=TA\times 4AO$, en ſuppoſant que le point O ſoit le foyer.

Comparant donc enſemble les deux valeurs de $\overline{TN}$, j'ai $TA\times x$ $=TA\times 4AO+4\overline{TA}$: & diviſant tout par TA, le quotient eſt $x=$ $4AO+4TA=4AO+4AB$; c'eſt-à-dire, le parametre du diametre PR eſt égal à 4AO, ou au parametre de l'axe, plus 4 fois l'abſciſſe AB.

660. COROLLAIRE III. *Si du ſommet N d'un diametre PR, on mene la droite NO au foyer, cette droite ſera le quart du parametre du diametre PR : de même que la droite AO, menée du ſommet de l'axe au foyer, eſt le quart du parametre de l'axe* (Fig. 400).

DÉMONSTRATION. Je mene la directrice PQ, & j'ai NO=LB $=AB+LA$; c'eſt-à-dire, NO égal à l'abſciſſe AB de l'axe, plus le quart du parametre de cet axe. Mais le parametre du diametre eſt égal à 4 fois l'abſciſſe AB, plus le parametre ou 4LA (659) : donc le parametre du diametre eſt quadruple de NO.

661. COROLLAIRE IV. *L'angle ONT, fait par la droite NO menée du ſommet N du diametre PR au foyer O, avec la tangente NT, eſt égal à l'angle XNR fait par la même tangente avec le diametre PR* (Fig. 400).

DÉMONSTRATION. Du point P, où le diametre PR coupe la directrice, je mene au foyer la droite PO. Ainſi la tangente NT coupe PO en Z en deux également (640) ; & à cauſe des triangles ſemblables & égaux PZN, TZO, j'ai PN=TO. Mais PN=LB $=NO$, par la conſtruction de la parabole : donc NO=TO ; & par conſéquent le triangle NOT étant iſoſcele, l'angle TNO eſt égal à l'angle NTO. Mais celui-ci eſt égal à l'angle XNR, à cauſe des paralleles PR, TB ; donc l'angle ONT eſt égal à l'angle XNR.

PROPOSITION V.

PROPOSITION V.

662. *Deux diametres, ou l'axe & deux diametres, étant donnés avec leurs tangentes PO, OM, ſi l'on mene d'un point d'attouchement à l'autre la droite PM, & qu'on la diviſe en deux également en V; la droite OV, qui paſſera par le point V & par le point O où les deux tangentes ſe coupent, ſera le diametre de la droite PM & de ſes paralleles* (Fig. 401).

DÉMONSTRATION. La droite PM & ſes paralleles ont néceſſairement un diametre : car les tangentes en nombre infini qu'on peut mener ſur tous les points de l'arc parabolique PM, étant toutes diverſement inclinées entre elles, il faudra bien qu'il y en ait quelqu'une qui ſoit parallele à la droite PM; par conſéquent du point d'attouchement de cette tangente, menant une ligne parallele à l'axe, cette ligne coupera PM & ſes paralleles chacune en deux également (653).

Si l'on veut donc que la ligne OV, qui coupe PM, ne coupe pas les paralleles à PM auſſi en deux également, il y aura donc quelque autre ligne qui paſſera par le point V, & qui diviſera les paralleles en deux également; & cette ligne prendra ſa direction ou à droite ou à gauche du point O, où les tangentes PO, MO, ſe coupent; lequel point eſt entre les points P, M, d'attouchement (644).

Suppoſons donc que ce ſoit la ligne VL : du point L je mene la droite LP, laquelle coupera la parabole; à cauſe que PO, qui paſſe par le même point P, eſt tangente. Ainſi PL aura une partie PE dans la parabole. Je mene une droite ST parallele à PM, & qui coupe PE en un point R; & je prolonge ST en H. Les triangles ſemblables LPV, LRK, donnent PV. RK :: VL. KL; & à cauſe des triangles ſemblables LVM, LKH; j'ai VM. KH :: VL. KL : donc PV. RK :: VM. KH. Or PV=VM; donc RK=KH. Mais SK eſt plus grand que RK; & au contraire, KT eſt moindre que KH : donc SK eſt plus grand que KT; & par conſéquent la droite LV, qui diviſe PM en deux parties égales, ne diviſe pas en deux également la droite ST parallele à PM. D'où il ſuit qu'elle n'eſt pas un diametre.

On démontrera de la même façon que toute autre ligne qui paſſera par le point V, & qui prendra ſa direction entre P & O, ne ſera pas un diametre : donc puiſqu'il doit y en avoir un, il faut néceſſairement que ce ſoit la droite VO. Ce qu'il falloit démontrer.

663. COROLLAIRE. La droite VO, menée du point O où les

tangentes ſe coupent, ſur le milieu de la droite PM qui joint les points d'attouchement, eſt parallele aux diametres PZ, MN. Car tous les diametres d'une parabole doivent être paralleles à l'axe (648, 653), & par conſéquent paralleles entre eux.

664. REMARQUE. Tout ce que nous avons dit (649, 650 & 652) à l'égard de l'axe & d'un diametre, peut ſe démontrer auſſi à l'égard de deux diametres, par le moyen de la Propoſition précédente (*Fig.* 402).

Soient, par exemple, les deux diametres PZ, MN, & leurs tangentes PT, MD, qui ſe coupent en O. Je mene la droite PM, que je diviſe en deux également en V : je mene auſſi la droite VO, laquelle, étant un diametre (662), eſt parallele aux deux diametres PZ, MN : du point P, je mene PN parallele à la tangente MD ; & du point M, la droite MZ parallele à la tangente PT : par conſéquent PN eſt ordonnée au diametre MN ; & MZ eſt ordonnée au diametre PZ ; & la figure POMR eſt un parallélogramme. Or, la diagonale PM eſt diviſée en deux également en V par la droite OV : donc cette droite OV étant prolongée, doit être l'autre diagonale, & paſſer par le point R.

Ainſi à cauſe des paralleles PT, ZM, les paralleles PZ, OR, TM, ſont égales ; c'eſt-à-dire, OR eſt égale à chacune des droites PZ, TM : & à cauſe des paralleles DM, PN, la droite OR eſt auſſi égale à chacune des droites PD, NM. D'où il ſuit que les quatre lignes TM, MN, PD, PZ, ſont égales.

Donc I°. à cauſe de TM=MN, la ſoutangente TN du diametre MN eſt diviſée en deux également au ſommet M de ce diametre, & par conſéquent elle eſt double de l'abſciſſe MN : & à cauſe de DP=PZ, la ſoutangente DZ du diametre PZ eſt double de l'abſciſſe PZ.

Donc II°. les triangles DOP, TOM, faits par les tangentes & les diametres, ſont égaux : car ces triangles ſont ſemblables, & le côté PD eſt égal au côté TM.

Donc III°. le triangle PTN, fait par la tangente PT, par la ſoutangente TN, & par l'ordonnée PN au diametre MN, eſt égal au parallélogramme MNPD fait par la même ordonnée PN, & par la tangente MD du même diametre MN, compriſes entre les deux diametres. Car ſi à chacun des triangles égaux TOM, DOP, on ajoute la partie commune OPNM, on aura PTN=MNPD ; & on démontrera de même que MDZ=PZMT.

Donc IV°. ſi d'un point quelconque S (*Fig.* 403) pris ſur la courbe, on mene XR, LH, paralleles aux deux tangentes TP,

MD ; le triangle HSR fait par les deux paralleles avec le diametre MN, eſt égal au parallélogramme MDXR fait par la tangente MD de ce diametre, & ſa parallele compriſe entre les deux diametres. Car menant du point P l'ordonnée PN, nous aurons TPN=MDPN, comme on vient de voir : or, les triangles TPN, HSR, étant ſemblables, nous avons TPN. HSR :: $\overline{PN}.\overline{SR}$. Mais PN, SR, étant ordonnées au diametre MN, donnent $\overline{PN}.\overline{SR}$ :: MN. MR : donc TPN. HRS :: MN. MR. Mais les parallélogrammes MNPD, MRXD, étant entre deux paralleles, ſont entre eux comme leur baſe MN. MR : donc TPN. HSR :: MNPD. RXD. Or TPN= MNPD : donc HSR=MRXD (*Fig.* 403).

On prouvera de même que l'autre triangle XSL, fait par les deux paralleles & l'autre diametre, eſt égal au parallélogramme fait par la tangente PT de ce diametre, & par ſa parallele compriſe entre les diametres. Car de l'autre point d'attouchement M, menant l'ordonnée MZ au diametre PZ, les triangles ſemblables DMZ, XSL, ſeront entre eux comme les quarrés de leurs baſes, ou des ordonnées MZ, SL ; & par conſéquent comme les abſciſſes PZ, PL, ou comme les parallélogrammes PTMZ, PTHL, qui ſont dans la même raiſon que leurs baſes PZ, PL ; à cauſe qu'ils ſont entre deux paralleles : donc on aura DMZ. XSL :: PTMZ. PTHL. Mais DMZ=PTMZ : donc XSL=PTHL.

Et on prouvera la même choſe en quelque point de la courbe que ſoit le point S.

665. COROLLAIRE. *Dans la parabole, deux tangentes PT, DM, qui ſe coupent en allant aboutir aux diametres oppoſés, ſe coupent chacune en deux parties égales.* Car les triangles DOP, TOM, étant ſemblables & égaux, on a PO=OT, & DO=OM (*Fig.* 403).

PROPOSITION VI.

666. *Deux diametres PZ, MN, étant donnés avec leurs tangentes PT, MD ; ſi l'on prend ſur la courbe deux points R, S, entre les deux ſommets P & M, & que de chacun de ces points on mene des droites RL, RC, SH ou IH, SE ou XE, paralleles aux tangentes ; le trapézoïde QCES fait avec le diametre MN, par les deux paralleles QC, SE, qui le coupent, & par la plus proche HS des deux autres, eſt égal au trapézoïde LRQH fait avec l'autre diametre PZ, par les deux paralleles QH, RL, qui le coupent, & par la plus proche RC des deux autres* (Fig. 404).

DÉMONSTRATION. A cauſe que RC, LN, ſont paralleles aux tangentes; nous avons CRN=NMDL (664): & retranchant de part & d'autre la partie commune RBMN, nous aurons CBM=BDLR. De même à cauſe des droites HI, SE, paralleles aux tangentes; nous avons ESI=IHDM: & retranchant de part & d'autre la partie commune SVMI, nous aurons EVM=VDHS; & par conſéquent CBM—EVM=BDLR—VDHS. Mais CBM—EVM=CBVE: donc CBVE=BDLR—VDHS, ou CBVE+VDHS=BDLR; & retranchant de part & d'autre la partie commune VDHS, nous aurons enfin CQSE=HQRL. Ce qu'il falloit démontrer.

667. COROLLAIRE. Si l'on ajoute à chacun des trapézoïdes égaux CQSE, HQRL, le petit parallélogramme QRXS, nous aurons CRXE=HSXL: c'eſt-à-dire, *le trapézoïde CRXE fait avec le diametre MN par les paralleles RC, XE, qui le coupent, & par la plus éloignée XL des deux autres paralleles, eſt égal au trapézoïde HSXL fait avec l'autre diametre par les paralleles HS, LX, qui le coupent, & par la plus éloignée XE des deux autres.*

Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont d'une grande utilité dans les trois Sections coniques, comme on va voir dans les Propoſitions ſuivantes touchant la Parabole, & dans celles que nous donnerons touchant l'Ellipſe & l'Hyperbole.

PROPOSITION VII.

668. *Si deux droites SX, RY, qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe parabolique, ſe coupent dans la parabole, le rectangle SK × KX des parties inégales de la premiere, eſt au rectangle RK × KY des parties inégales de la ſeconde, comme le quarré $\overline{PO}$ de la tangente du diametre PB de la premiere, eſt au quarré $\overline{OM}$ de la tangente du diametre MV de la ſeconde* (Fig. 405, 406, 407).

DÉMONSTRATION. Il peut arriver ou que les deux lignes SX, RY, coupent toutes les deux l'arc parabolique PM compris entre les deux diametres PB, MV (*Fig.* 405); ou que l'une SX *Fig.* 406) coupe l'arc PM, & l'autre RY ne le coupe pas; ou enfin que toutes les deux SX, RY, ne coupent point cet arc (*Fig.* 407).

I°. Dans le premier cas (*Fig.* 405), je prolonge les lignes SX, RY juſqu'à la rencontre des diametres prolongés en E & L: & de leurs points S, R, qui ſont ſur l'arc PM, je mene les droites SH, RC, paralleles aux tangentes. La droite SX étant coupée en deux égale-

ment en B par ſon diametre, & en deux inégalement en K; nous avons $SK \times KX = \overline{SB}^2 - \overline{KB}^2$ (146). Or dans les triangles ſemblables BSH, BKL, nous avons $\overline{SB}^2 . \overline{KB}^2 :: BSH . BKL$ (392) : donc $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2 . \overline{SB}^2 :: BSH - BKL . BSH$; ou $\overline{SB}^2 - \overline{KB}^2 . BSH - BKL :: \overline{SB}^2 . BSH$; c'eſt-à-dire, $SK \times KX . KSHL :: \overline{SB}^2 . BSH$. Mais les triangles ſemblables BSH, POD, donnent $\overline{BS}^2 . BSH :: \overline{PO}^2 . POD$: donc $SK \times KX . KSHL :: \overline{PO}^2 . POD$, ou $SK \times KX . \overline{PO}^2 :: KSHL . POD$. Je trouverai, par un raiſonnement tout ſemblable, que $RK \times KY . \overline{OM}^2 :: RCEK . TOM$.

Nous avons donc d'une part $SK \times KX . \overline{PO}^2 :: KSHL . POD$; & de l'autre $RK \times KY . \overline{OM}^2 :: RCEK . OMT$. Or, à cauſe de KSHL = RCEK (667), & de POD = OMT (664), la derniere raiſon KSHL, POD, de la premiere proportion, eſt égale à la derniere raiſon RCEK, OMT, de la ſeconde proportion: donc les deux premieres raiſons de ces proportions ſont égales; & partant $SK \times KX . \overline{OP}^2 :: RK \times KY . \overline{OM}^2$, ou $SK \times KX . RK \times KY :: \overline{PO}^2 . \overline{OM}^2$.

II°. Dans le ſecond cas (*Fig.* 406), je prolonge XS en E; & des points S, X, je mene les droites SH, XZ, paralleles à la tangente DM: je mene auſſi du point R, la droite RC parallele à la tangente PT, & du point Q, la droite QL parallele à la tangente DM. Cela fait, je trouverai, en raiſonnant comme ci-deſſus, $SK \times KX . XKFZ :: \overline{XB}^2 . XBZ :: \overline{PO}^2 . POD$; ou $SK \times KX . \overline{PO}^2 :: XKFZ . POD$; & de même $RK \times KY . \overline{MO}^2 :: RCEK . MOT$. Or POD = MOT: ſi je prouve donc que XKFZ = RCEK, nous aurons $SK \times KX . RK \times KY :: \overline{PO}^2 . \overline{MO}^2$.

Or pour le prouver, j'obſerve d'une part que XKFZ = XBZ − KBF; & qu'à cauſe de l'ordonnée XS, diviſée en deux également en B, les triangles ſemblables XBZ, BHS, ſont égaux: donc XKFZ = BHS − KBF. Mais à cauſe des droites SH, SB, paralleles aux tangentes; nous avons BHS = PTEB (664): donc XKFZ = PTEB − KBF. D'autre part, la partie RGBK du trapézoïde RCEF, eſt égale au triangle RGF moins le triangle KBF. Or à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G, les triangles ſemblables RGF, GQL, ſont égaux. Donc RGBK = QGL − KBF. Mais à cauſe des droites QL, QG, paralleles aux tangentes, nous avons GQL = PTCG (664): donc RGBK = PTCG − KBF; & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCEB, nous aurons

RCEK=PTEB—KBF. Mais nous avons trouvé XKFZ=PTEB—KBF : donc RCEK=XKFZ.

III°. Dans le troiſieme cas (*Fig.* 407), je mene des points R, S, des paralleles RC, SH, aux tangentes ; & des points Q, F, où ces droites coupent la courbe, je mene auſſi des droites QL, FE, paralleles aux tangentes. Cela fait, nous aurons, comme auparavant, SK×KX. $\overline{PO}^2$ :: SHIK. POD ; & RK×KY. $\overline{OM}^2$ :: RCNK. OMT ; & à cauſe de POD=OMT, il ne reſte qu'à prouver que SHIK=RCNK, ce qui donnera SK×KX. RK×KY :: $\overline{PO}^2$. $\overline{MO}^2$.

J'obſerve donc d'une part, qu'à cauſe de l'ordonnée SF diviſée en deux également en Z ; les triangles ſemblables ZSN, ZEF, ſont égaux. Or à cauſe de FE, FZ, paralleles aux tangentes ; nous avons ZEF=MDHZ : donc ZSN=MDHZ ; & ajoutant de part & d'autre la partie commune ZHIKN, nous aurons SHIK=MDIKN.

D'autre part, à cauſe de l'ordonnée RQ diviſée en deux également en G ; les triangles ſemblables GRI, HQG, ſont égaux. Or à cauſe des droites GL, GQ, paralleles aux tangentes ; nous avons LQG=PTCG : donc GRI=PTCG ; & ajoutant de part & d'autre la partie commune GCNKI, nous aurons RCNK=PTNKI. Mais OMT=POD : donc en ajoutant la partie commune POMNKI, nous aurons PTNKI=MDIKN : donc RCNK=MDIKN. Mais nous avons trouvé SHIK=MDIKN : donc SHIK=RCNK. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VIII.

669. *Si deux lignes AX, AZ, qui coupent la parabole, ſe coupent en un point A hors de la parabole ; le rectangle AX×AQ de la premiere AX par ſa partie extérieure AQ, eſt au rectangle AZ×AS de la ſeconde AZ par ſa partie extérieure AS ; comme le quarré $\overline{PO}^2$ de la tangente du diametre PD de la premiere, eſt au quarré $\overline{OM}^2$ de la tangente du diametre ME de la ſeconde* (Fig. 408).

Démonstration. Je prolonge les droites AX, AZ, juſqu'à la rencontre des diametres en C & H ; & des points Q, S, où elles coupent la courbe, je mene les droites QL, SE, paralleles aux tangentes. La droite QX étant diviſée en deux également en B, & la droite QA lui étant ajoutée, nous avons AX×AQ=$\overline{AB}^2$—$\overline{BQ}^2$ (148). Or les triangles BAH, BQL, ſemblables, donnent $\overline{AB}^2$. $\overline{BQ}^2$ :: ABH. BQL : donc $\overline{AB}^2$—$\overline{BQ}^2$. $\overline{AB}^2$ :: ABH—BQL. ABH ; c'eſt-à-dire,

AX × AQ. $\overline{AB}^2$ :: AHLQ. ABH ; ou AX × AQ. AHLQ :: $\overline{AB}^2$. ABH.

Mais les triangles ſemblables ABH, OPD, donnent $\overline{AB}^2$. ABH :: $\overline{OP}^2$. OPD : donc AX × AQ. AHLQ :: $\overline{OP}^2$. OPD ; ou AX × AQ. $\overline{OP}^2$ :: AHLQ. OPD ; & par un ſemblable raiſonnement, nous trouverons AZ × AS. $\overline{OM}^2$ :: ACES. OMT. Mais OPD=OMT (664) ; & AHLQ=ACES (666) : donc dans les deux dernieres proportions que nous venons de trouver, la raiſon AHLQ. OPD, eſt la même que la raiſon ACES. OMT ; & par conſéquent les deux autres raiſons ſont égales, & nous avons AX × AQ. $\overline{OP}^2$ :: AZ × AS. $\overline{OM}^2$; ou AX × AQ. AZ × AS :: $\overline{OP}^2$. $\overline{OM}^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IX.

670. *L'axe AB, un diametre PK, & leurs tangentes AY, PT, étant donnés avec l'ordonnée PZ menée à l'axe du point d'attouchement P ; je dis que ſi du point T on mene une ſécante TS qui coupe la parabole en R & S, & l'ordonnée PZ en N ; cette ſécante ſera coupée harmoniquement* (202) *aux points R, N* (Fig. 409).

DÉMONSTRATION. Des points R, S, je mene les droites MC, BV, paralleles à la tangente AY, & les droites LE, SH, paralleles à la tangente TPV : enfin du point X, où la droite SH coupe la courbe, je mene XD parallele à AY.

Les triangles ſemblables BVT, MQT, donnent BV. MQ :: BT. MT ; & à cauſe des triangles ſemblables BST, MRT, nous avons BS. MR :: BT. MT. Donc BV. MQ :: BS. MR ; & partant $\overline{BV}^2$. $\overline{MQ}^2$ :: BS. $\overline{MR}^2$. Mais les triangles ſemblables BVT, MQT, ſont entre eux comme les quarrés $\overline{BV}^2$, $\overline{MQ}^2$, de leurs côtés homologues BV, MQ ; & par la même raiſon, les triangles ſemblables BSH, MRL, ſont entre eux comme $\overline{BS}^2$, $\overline{MR}^2$: donc BVT. MQT :: BSH. MRL ; ou BVT. BSH :: MQT. MRL ; & par conſéquent BVT. BVT—BSH :: MQT. MQT—MRL ; c'eſt-à-dire BVT. TVSH :: MQT. TQRL.

Mais à cauſe de l'ordonnée au diametre XS, diviſée en deux également en O, les triangles ſemblables KOS, XDO, ſont égaux ; & à cauſe des droites XD, XO, paralleles aux tangentes ; le triangle XDO eſt égal au parallélogramme PTHO : donc KOS= PTHO ; & ajoutant de part & d'autre le trapézoïde POSV, nous

aurons KPV=VTHS. De même le triangle CRE eſt égal au parallélogramme PTLE ; & retranchant la partie commune PQRE, nous aurons CQP=QTLR. Mettant donc dans la proportion trouvée ci-deſſus BVT. TVSH :: MQT. TQRL, les valeurs de TVSH, TQRL, que nous venons de trouver ; nous aurons BVT. KPV :: MQT. CQP ; ou BVT. MQT :: KPV. CQP.

Mais les triangles BVT, MQT, ſont entre eux comme les quarrés $\overline{VT}^2$, $\overline{QT}^2$, de leurs côtés homologues ; & les triangles KPV, CQP, ſont entre eux comme $\overline{VP}^2$. $\overline{QP}^2$: donc $\overline{VT}^2$. $\overline{QT}^2$ :: $\overline{VP}^2$. $\overline{QP}^2$; & partant VT. QT :: VP. QP ; ou QT. QP :: VT. VP.

Mais à cauſe des paralleles MR, ZP, BV ; la droite TS eſt diviſée en même raiſon que la droite VT : donc TR. RN :: TS. SN ; & on démontreroit la même choſe, quand même TB ſeroit un diametre. C. Q. F. D.

671. REMARQUE. De cette propoſition on peut en tirer les ſuivantes.

I°. *L'axe AB* (Fig. 410), *une tangente TP, & l'ordonnée PR, étant données ; ſi par le point T on mene MN parallele à PR, & deux ſécantes TV, TZ, également éloignées de l'axe ; je dis que les droites QZ, XV, qui paſſent par les points où les ſécantes coupent la courbe, paſſeront par le point R.*

II°, *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi d'un point quelconque M pris ſur MN, on mene une droite MV qui coupe la courbe en X & V, & qui paſſe par le point R, cette ligne ſera coupée harmoniquement aux points X, R, V.*

III°. *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi d'un point quelconque P* (Fig. 411) *pris ſur MN, on mene deux tangentes PV, PX à la courbe, ainſi qu'il ſera enſeigné plus bas, la ligne XV, menée par les points d'attouchement, paſſera par le point R.*

IV°. *Poſant toujours les mêmes choſes, ſi l'on prolonge RP en H* (Fig. 412), *& que d'un point quelconque H pris ſur PH, on mene deux tangentes HQ, HZ, à la courbe, la droite ZQ, menée par les points d'attouchement, paſſera par le point T.*

Ces propoſitions ſe démontrent de la même façon que nous les avons démontrées à l'égard du cercle (300. 302. 303. &c.) ; & ſi l'on ſe donne la peine de relire ce que nous avons dit dans le Chapitre du Cercle, touchant la ligne diviſée harmoniquement, on en déduira ſans peine d'autres propriétés de la parabole.

PROPOSITION X.

PROPOSITION X.

672. *Deux diametres PB, MV, étant donnés, avec leurs tangentes PT, MD; ſi l'on mene une ordonnée CA à l'un des diametres, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre en E la tangente DM de l'autre diametre; le rectangle CE × EA de la toute CE par l'ajoutée EA, eſt au quarré $\overline{EM}$ de la partie EM de la tangente DE qu'elle coupe, comme le quarré $\overline{PO}$ de la tangente du diametre PB, eſt au quarré $\overline{OM}$ de la tangente de l'autre diametre* (Fig. 413).

DÉMONSTRATION. I°. Du point A je mene LX parallele à la tangente; & par conſéquent, en ſuivant le raiſonnement que nous avons fait ci-deſſus (669); j'ai EC × EA. EDLA :: $\overline{PO}$. POD. Or à cauſe des droites XL, AN, paralleles aux tangentes; nous avons NAX=MDLX: donc en retranchant la partie commune MEAX, nous aurons ENM=EDLA.

Mais nous avons auſſi POD=MOT (664): mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC× EA. ENM :: $\overline{PO}$. MOT; ou EC × EA. $\overline{PO}$ :: ENM. MOT.

Et au lieu de ces deux derniers triangles qui ſont ſemblables, mettant les quarrés $\overline{EM}$, $\overline{OM}$, de leurs côtés homologues; nous aurons EC × EA. $\overline{PO}$ :: $\overline{EM}$. $\overline{OM}$; ou EC × EA. $\overline{EM}$ :: $\overline{PO}$. $\overline{OM}$.

II°. Si la droite CA (*Fig.* 414) coupe la parabole en un point A, hors de l'arc parabolique PM compris entre les diametres; je mene AL parallele à la tangente DM; & du point Q, où cette parallele coupe la parabole, je mene QN parallele à l'autre tangente. Ainſi j'ai toujours EC × EA. EDLA :: $\overline{PO}$. POD. Or les triangles ſemblables AVX, NQX étant égaux, à cauſe de l'ordonnée AQ, diviſée en deux également par ſon diametre MV; & le triangle NQX étant égal au parallélogramme MDLX; nous avons AVX=MDLX; & ajoutant de part & d'autre la partie commune MXAE, nous aurons MVE=EDLA.

Mais POD=MOT: mettant donc dans notre proportion les valeurs de EDLA & de POD, nous aurons EC × EA. MVE :: $\overline{PO}$. MOT; ou EC × EA. $\overline{PO}$ :: MVE. MOT; & mettant les quarrés des côtés homologues de ces deux derniers triangles, nous aurons

EC × EA. $\overline{PO}^2 :: \overline{ME}^2 . \overline{OM}^2$, ou EC × EA. $\overline{ME}^2 :: \overline{PO}^2 . \overline{OM}^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE. Ce seroit la même chose, si l'un des diametres étoit l'axe.

Base & Segments de la Parabole.

673. DÉFINITION. La portion ABC d'une parabole coupée par une droite AC, se nomme *segment de parabole :* la droite AC en est la *corde* ou la *base* (415).

Tout triangle AEC, ABC, &c. qui a pour base la base AC du segment, & dont le sommet est sur l'arc parabolique ABC, se nomme *triangle inscrit ;* & celui dont le sommet est au sommet B du diametre BR de la base, est le *plus grand.* Car si à ce même point B on mene la tangente MN, qui sera parallele à l'ordonnée ou base AC, & qu'entre ces deux paralleles on mene la perpendiculaire BR ; il est aisé de voir que le point B est de tous les points de l'arc ABC, celui qui est le plus éloigné de la base ; & que par conséquent, tous les triangles inscrits ayant même base ; ceux qui n'auront pas le sommet en B, seront moindres que le triangle ABC : à cause qu'ils auront moins de hauteur ou moins de distance du sommet à la base.

PROPOSITION XI.

674. *Deux segments APC, BME, d'une même parabole ACE étant donnés ; si les parties PR, MV, des diametres de leurs bases comprises dans ces segments, sont égales ; les plus grands triangles inscrits dans ces mêmes segments sont égaux* (Fig. 416, 417).

DÉMONSTRATION. Il peut arriver, ou que les bases AC, BE, des segments, se coupent dans la parabole (*Fig.* 416) ; ou qu'elles se coupent en dehors en X (*Fig.* 416, II°.) ; ou qu'elles se coupent à un point de la courbe (*Fig.* 417).

I°. Si les bases AC & BE se coupent en dedans (*Fig.* 416) ; je mene les droites AP, EM : ce qui donne les moitiés APR, EMV, des plus grands triangles inscrits, à cause de AR=RC, & de EV=VP. Ainsi ce que nous dirons des triangles APR, EMV, se dira des plus grands triangles inscrits. Des sommets P, M, des diametres, je mene les tangentes PO, MO, & la droite PM : je mene aussi, par les extrémités & les milieux des bases, les droites BC, AE, RV ; & cette derniere est parallele à PM, à cause des paralleles égales PR,

MV : enfin par le point O où les tangentes ſe coupent, & par le milieu de la ligne PM qui joint leurs points d'attouchement, je mene la droite OL, laquelle eſt un diametre (662); & par conſéquent cette droite eſt parallele aux deux diametres, & coupe auſſi en deux également la droite RV parallele à PM.

Or les triangles ſemblables POM, RXV, ayant les baſes PM, RV, égales, ſont égaux : & partant RX=PO, VX=MO; $\overline{RX}$=$\overline{PO}$, & $\overline{VX}$=$\overline{MO}$. D'où il ſuit que RX. VX :: PO. MO. Mais à cauſe que les baſes AC, BE, des ſegments ſe coupent en X; nous avons CX × AX. BX × XE :: PO. MO (668); ou $\overline{CR}$—$\overline{XR}$. $\overline{BV}$—$\overline{XV}$ :: PO. MO; à cauſe des baſes AC, BM, diviſées en deux également en R & V, & en deux inégalement en X. Donc $\overline{CR}$—$\overline{XR}$. $\overline{BV}$—$\overline{XV}$ :: RX. VX; ou $\overline{CR}$—$\overline{XR}$. $\overline{XR}$ :: $\overline{BV}$—$\overline{XV}$. $\overline{XV}$: & compoſant, $\overline{CR}$—$\overline{XR}$+$\overline{XR}$. $\overline{XR}$ :: $\overline{BV}$—$\overline{XV}$+$\overline{XV}$. $\overline{XV}$; ce qui ſe réduit à $\overline{CR}$. $\overline{XR}$ :: $\overline{BV}$. $\overline{XV}$: d'où l'on tire CR. XR :: BV. XV; ce qui rend paralleles les lignes RV, BC. Or CR=AR, & BV=VE : donc AR. XR :: VE. VX; & par conſéquent les lignes AE, RV, ſont paralleles. Ainſi les quatre lignes BC, PM, RV, AE, ſont paralleles entre elles, & coupées en deux également par le diametre OL: ce qui fait que le parallélogramme PMVR, le trapézoïde RVEA, & le trapézoïde PMEA, ſont tous diviſés en deux également par le même diametre.

Retranchant donc de ce dernier trapézoïde, d'une part le parallélogramme PSIR, & le trapézoïde RILA; & de l'autre, le parallélogramme MSIV=PSIR, & le trapézoïde VILE=RILA; il reſtera PAR=MVE : & par conſéquent les doubles de ces triangles, c'eſt-à-dire les plus grands triangles inſcrits dans les ſegments APC, BME, ſont égaux.

II°. Si les baſes AC, EB, des ſegments ſe coupent en dehors en X (*Fig.* 416. II°.), je mene les droites CB, PM, RV, AE, & la droite OL, par le milieu S de PM : & par conſéquent la droite OL étant un diametre (662), eſt parallele aux deux autres diametres, & coupe auſſi en deux également la ligne RV égale & parallele à PM, à cauſe des paralleles égales PR, MV. De plus, les triangles ſemblables POM, RXV, ayant leurs baſes PM & RV égales, ſont égaux; & RX=PO, VX=OM, $\overline{RX}$=$\overline{PO}$, $\overline{XV}$=$\overline{OM}$: d'où je tire $\overline{RX}$. $\overline{XV}$ :: $\overline{PO}$. $\overline{OM}$.

Or, les ſécantes AX, XE, donnent AX × XC. EX × XB ::

$\overline{PO}^2.\overline{MO}^2$ (669); ou $\overline{XR}^2-\overline{CR}^2.\overline{XV}^2-\overline{BV}^2 :: \overline{PO}^2.\overline{MO}^2$; à cauſe des lignes AC, BE, diviſées également en R, V; & des ajoutées CX, BX: donc $\overline{XR}^2-\overline{CR}^2.\overline{XV}^2-\overline{BV}^2 :: \overline{RX}^2.\overline{XV}^2$; ou $\overline{XR}^2-\overline{CR}^2.\overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2-\overline{BV}^2.\overline{XV}^2$: & retranchant de chaque conſéquent ſon antécédent, puis comparant le reſte au conſéquent, nous aurons $\overline{XR}^2-\overline{XR}^2+\overline{CR}^2.\overline{XR}^2 :: \overline{XV}^2-\overline{XV}^2+\overline{BV}^2.\overline{XV}^2$; ce qui ſe réduit à $\overline{XR}^2.\overline{CR}^2.\overline{XV}^2 :: \overline{BV}^2$. Donc XR. CR :: XV. BV; & par conſéquent les lignes CB, RV, ſont paralleles. Or RC=AR; & VB=EV: donc XR. AR :: XV. VE; ce qui rend auſſi les droites RV, AE, paralleles.

Ainſi les quatre lignes CB, PM, RV, AE, ſont paralleles & diviſées chacune en deux également par le diamètre OL: d'où il ſuit que le parallélogramme PMVR, le trapézoïde RVAE, & le trapézoïde PMAE, ſont auſſi diviſés chacun en deux également par le même diametre. Retranchant donc de ce dernier d'une part PSIR, & RILA; & de l'autre SMVI=PSIR, & VILE=RILA, il reſtera PAR=MVE.

III°. Enfin, ſi les baſes AC & BE des ſegments ſe coupent en un point de la courbe (*Fig.* 417); je mene les droites PM, RV, AE, leſquelles ſont paralleles entre elles. Car PM eſt parallele à RV; & à cauſe de CR. CA :: BV. BE, la droite RV eſt parallele à AE: menant donc le diametre OS, & achevant le reſte, comme ci-deſſus, on trouvera APR=MVE. Ce qu'il falloit démontrer.

675. PROBLÊME I. *Une parabole ABC étant donnée; trouver ſon axe, ſon parametre, & ſon foyer* (Fig. 418).

SOLUTION. I°. Je mene pluſieurs lignes paralleles AN, QD, &c. qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe: je les diviſe chacune en deux également en R, S, &c: & par les points de diviſion, je fais paſſer une ligne droite SH, laquelle ſera le diametre des paralleles. Ainſi, ſi ce diametre eſt perpendiculaire ſur ſes ordonnées AN, QD; il ſera l'*axe cherché*.

Mais ſi cela n'eſt pas: du point H, où ce diametre coupe la courbe, je mene HG perpendiculaire ſur HS: & coupant HG en deux également en X; j'éleve la perpendiculaire XB, qui eſt l'axe demandé. Car HG doit avoir un diametre qui la coupe en deux également, & ce diametre doit être parallele au diametre HS: or, nulle autre ligne que XB ne peut avoir ces conditions. Donc cette ligne XB eſt l'*axe cherché*.

II°. L'axe étant trouvé; je mene en H, la droite HT parallele

aux ordonnées RN, SD, du diametre HS; & par conſéquent HT ſera tangente en H. Du point H, je mene HZ, perpendiculaire ſur HT; & la ſouperpendiculaire XZ eſt égale à la moitié du parametre (643): donc le double de cette droite ZX eſt le *parametre de l'axe*; & prenant le quart de ce parametre, & le portant de B en O, le point O eſt le *foyer.*

III°. Ou bien je fais en H, avec la tangente TH, l'angle THO égal à l'angle EHS que cette tangente fait avec le diametre HS; & le point O, où la droite HO coupe l'axe, eſt le *foyer* (661): par conſéquent BO eſt le *quart du parametre.*

IV°. Ou bien encore par le ſommet B de l'axe, je mene la droite BL perpendiculaire à l'axe: je diviſe l'angle droit XBL en deux également par la ligne BV; & du point V, où cette ligne coupe la parabole, je mene l'ordonnée VM, laquelle eſt *égale au parametre.* Car l'angle XBL étant droit, ſa moitié XBV eſt de 45 degrés: donc dans le triangle rectangle BMV, l'autre angle aigu BVM eſt auſſi de 45 degrés; & par conſéquent ce triangle eſt iſoſcele, & MV=BM: d'où il ſuit que $\overline{MV}=\overline{MB}=MB\times MB$. Mais en nommant p le parametre; nous avons, par la propriété de la parabole, $\overline{MV}=MB\times p$: donc $MB\times p=MB\times MB$; & partant en diviſant par MB, nous aurons $p=MB$.

V°. Ou bien enfin, je cherche une troiſieme proportionnelle à une abſciſſe quelconque BX, & à ſon ordonnée XG; & cette troiſieme proportionnelle, que je nomme p, ſera le parametre: car à cauſe de :: BX. XG. p; nous aurons $\overline{XG}=BX\times p$.

676. DÉFINITION. Une parabole ABC, terminée par une baſe AC, étant donnée; ſi par le ſommet B, on mene la tangente MN, & par les extrémités A & C de ſa baſe, les droites AM, CN, perpendiculaires ſur MN; le rectangle AMNC ſe nomme *rectangle circonſcrit*: la figure mixtiligne AFBECNM eſt le *complément* de la parabole; & la figure mixtiligne BECN eſt le *complément* de la demi-parabole (*Fig.* 419).

677. PROBLÊME II. *Meſurer une parabole ABC, terminée par une baſe ou double ordonnée AC* (Fig. 419).

SOLUTION. Je décris le rectangle circonſcrit AMNC; & les deux tiers de ce rectangle ſont la valeur de la parabole: ce que je démontre ainſi.

I°. Je conçois que BN ſoit diviſé en une infinité de parties égales BH, HL, LG, GN; & que des points de diviſion ſoient menées

à la courbe, une infinité de droites HR, LV, GE, NC, leſquelles ſeront les éléments du demi-complément BVCN. Des points R, V, E, C, je mene les ordonnées SR, TV, DC : ainſi les éléments HR, LV, NC, du demi-complément, ſeront égaux aux abſciſſes BS, BT, BD ; & les diſtances BH, BL, BC, BN, des droites HR, LV, GE, NC, au ſommet B du demi-complément, ſeront *égales aux ordonnées* SR, TV, KE, DC.

Mais par la propriété de la parabole (630), les abſciſſes BS, BT, &c. ſont entre elles comme les quarrés des ordonnées SR, TV, &c. donc les éléments HR, SV, &c. ſeront entre eux comme les quarrés de leurs diſtances BH, BL, au ſommet B.

II°. Or, ſelon ce que nous avons démontré (499), ſi l'on coupe une pyramide par une infinité de plans paralleles à ſa baſe, leſquels ſeront les éléments de cette pyramide ; ces plans ſont entre eux comme les quarrés de leurs diſtances au ſommet de la pyramide : donc les éléments du demi-complément BVCN ſont entre eux comme les plans élémentaires d'une pyramide.

Mais la ſomme des plans élémentaires d'une pyramide eſt égale à la baſe multipliée par le tiers de ſa diſtance au ſommet (504) : donc la ſomme des éléments du demi-complément BVCN, eſt égale à la baſe ou plus grand élément NC multiplié par le tiers de ſa diſtance NB au ſommet B.

III°. Or NC, multiplié par NB, eſt le rectangle BDCN ; & NC $\times \frac{1}{3}$ NB, en eſt le tiers : donc la ſomme des éléments du demi-complément, c'eſt-à-dire le demi-complément lui-même, eſt égale au tiers du rectangle BDCN. Or, ſi de ce rectangle nous retranchons le demi-complément, le reſte eſt la demi-parabole DBNC : donc cette demi-parabole eſt égale aux deux tiers du rectangle BDCN. Et comme on démontrera de la même façon que l'autre demi-parabole eſt égale aux deux tiers du rectangle BDAM ; il s'enſuit que la parabole entiere ABC eſt égale aux deux tiers du rectangle circonſcrit AMNC.

678. COROLLAIRE I. Si le rectangle circonſcrit eſt 1, la parabole ſera $\frac{2}{3}$; & le triangle ABC ſera $\frac{1}{2}$, à cauſe qu'il eſt la moitié. Ainſi en réduiſant tout en même dénomination, ces trois figures ſeront entre elles comme $\frac{6}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}$, ou comme 6, 4, 3. Or, en retranchant de la parabole le triangle ABC, le reſte eſt la valeur des deux ſegments AFBX, BVCZ, pris enſemble : donc le rectangle circonſcrit, la parabole, le triangle inſcrit, & la ſomme des deux ſegments, ſont entre eux comme 6, 4, 3, 1. Par conſéquent, la ſomme

des deux ſegments eſt le $\frac{1}{6}$ du rectangle; le $\frac{1}{4}$ de la parabole; & le $\frac{1}{3}$ du triangle: d'où il ſuit que le ſegment BVCZ eſt auſſi le $\frac{1}{6}$ du rectangle BNCD; le $\frac{1}{4}$ de la demi-parabole BDC; & le $\frac{1}{3}$ du triangle BDC.

679. COROLLAIRE II. *Un ſegment ABC de parabole dont le diametre BP eſt incliné ſur la baſe AC, eſt auſſi les deux tiers du parallélogramme circonſcrit; c'eſt à-dire du parallélogramme AMNC, dont les côtés AM, NC, ſont paralleles & égaux au diametre BP* (Fig. 420).

DÉMONSTRATION. Menant les éléments HQ, LV, &c. du demi-complément BNCV, paralleles à la baſe NC de ce demi-complément; & les ordonnées QS, TV, &c: les éléments HQ, LT, &c, ſeront égaux aux abſciſſes BS, BT, &c: & les parties BH, BL, &c, que les éléments coupent ſur BN, ſeront égales aux ordonnées QS, VT, &c: donc les éléments HQ, LV, ſeront entre eux comme les quarrés des parties BH, BL, &c, qu'ils coupent. Or, ſi du ſommet B j'abaiſſe la perpendiculaire BK ſur la baſe CN prolongée; les éléments étant prolongés couperont cette perpendiculaire en E, O, &c, en même raiſon qu'ils coupent la droite BN en H, L, &c: par conſéquent les diſtances BE, BO, &c, des éléments au ſommet, ſeront entre elles comme les droites BH, BL, &c, que ces éléments coupent: donc les quarrés de BE, BO, &c, ſeront auſſi en même raiſon que les quarrés de BH, BL, &c. Ainſi les éléments HQ, LV, &c, ſeront entre eux comme les quarrés de leurs diſtances BE, BO, &c, au ſommet B: & partant ils ſeront le tiers du plus grand élément NC multiplié par ſa diſtance BK, au ſommet B; ainſi qu'il a été démontré ci-deſſus (677).

Or le rectangle CN × BK eſt égal au parallélogramme PBNC de même baſe & de même hauteur: donc la ſomme des éléments HQ, LV, &c, c'eſt-à-dire le demi-complément BNCV, eſt le tiers du parallélogramme PBNC; & par conſéquent le demi-ſegment PBC eſt les deux tiers de ce parallélogramme. D'où il eſt aiſé de voir que le ſegment entier ABC eſt les deux tiers du parallélogramme AMNC.

680. COROLLAIRE III. *Si deux ſegments ABC, DEF, d'une même parabole ont les portions BP, RE, de leurs diametres compriſes dans ces ſegments, égales entre elles; ces ſegments ſont égaux* (Fig. 421).

DÉMONSTRATION. Les plus grands triangles ABC, DEF, inſcrits dans ces ſegments, ſont égaux (674): donc les parallélogrammes

circonſcrits ſont égaux, puiſqu'ils ſont doubles des triangles. Or les ſegments ſont les deux tiers de leurs parallélogrammes (679): donc ils ſont égaux.

681. PROBLÊME III. *Une parabole VHAS étant donnée, avec ſon axe AX; mener deux tangentes PS, PV, d'un point P qui n'eſt pas ſur l'axe* (Fig. 422).

SOLUTION. Du point P, je mene un diametre PHR, qui coupe la parabole en H: je mene en H la tangente HT: je prends l'abſciſſe HR, égale à PH; & par le point R, menant au diametre PR l'ordonnée VS qui coupe la parabole en V & S; je mene de ces points les droites SP, PV, qui ſont les tangentes demandées. Car à cauſe que la droite SP eſt menée de l'extrémité S de l'ordonnée RS, & que la droite PR eſt diviſée en deux également en H; il eſt clair que PR eſt ſoutangente, & que PS eſt tangente; & par la même raiſon PV eſt auſſi tangente.

682. COROLLAIRE I. *D'un point extérieur P, on ne peut mener que deux tangentes à la parabole.* Ce qui eſt évident: car une autre ligne qu'on voudroit mener du point P paſſeroit, ou entre les deux points V, S, d'attouchement, ou en dehors. Ainſi dans le premier cas elle couperoit la parabole; & dans le ſecond, elle ſeroit toute entiere hors de la courbe, & ne la toucheroit pas.

683. COROLLAIRE II. *Leux deux tangentes PS, PV, qu'on peut mener à la parabole d'un point extérieur P qui n'eſt pas ſur l'axe, ſont néceſſairement inégales* (Fig. 422).

DÉMONSTRATION. Du point H, je mene l'ordonnée HM à l'axe. Le triangle XHR étant rectangle en H; l'angle HRX eſt aigu, & ſon angle de ſuite HRV eſt obtus. Or les deux triangles PRS, PRV, ont le côté PR commun, & le côté RS égal au côté RV. Mais l'angle compris PRS eſt moindre que l'angle compris PRV: donc la baſe PS eſt moindre que la baſe PV.

684. COROLLAIRE III. *Au contraire, les deux tangentes TH, TL, qu'on peut mener d'un point T pris ſur l'axe, ſont égales.* Car prenant l'abſciſſe AM égale à TA, & menant la double ordonnée HL; les deux tangentes paſſeront par les points H, L: & à cauſe que les triangles rectangles TMH, TML, ont le côté TM commun, & le côté HM égal au côté ML; il eſt clair que le troiſieme TH eſt égal au troiſieme TL.

Paraboles

Paraboles ſemblables.

685. DÉFINITION. Deux paraboles ABC, *abc*, qui ont des parametres BR, *br*, différents, & qui ſont terminées par des baſes AC, *ac*, ſont dites *ſemblables*, lorſqu'une figure quelconque AMBNC étant inſcrite dans l'une, on peut en inſcrire une ſemblable *ambnc* dans l'autre (*Fig.* 423).

686. PROBLÊME IV. *Une parabole ABC étant donnée, décrire avec un autre parametre* br, *une autre parabole* abc *ſemblable à la parabole donnée* (Fig. 423).

SOLUTION. Je décris une parabole dont la diſtance de la directrice au foyer ſoit égale à la moitié du parametre *br*. Cette parabole étant décrite (635), ſuppoſons que la ligne des abſciſſes ſoit la droite indéfinie *bx*. Je prends une quatrieme proportionnelle au parametre BR de la parabole donnée, à ſa hauteur PB, & au parametre *br*: & portant cette quatrieme proportionnelle ſur *bx*, de *b* en *p*; je mene par le point *p* la baſe *ac*: & je dis que la parabole *abc*, terminée par la double ordonnée ou baſe *ac*, eſt ſemblable à la parabole donnée ABC, terminée par la double ordonnée ou baſe AC.

Car ſoient menées dans la parabole ABC, la double ordonnée MN, & les cordes MB, MA, BN, NC. Je diviſe la hauteur *bp* en *t*, en même raiſon que la hauteur BP eſt diviſée en T: & menant par le point *t* la double ordonnée *mn*, & enſuite les cordes *mb*, *ma*, *nb*, *nc*; la figure inſcrite *ambnc* eſt ſemblable à la figure inſcrite AMBNC: & par conſéquent les deux paraboles ſont ſemblables; ce que je prouve ainſi.

Par la propriété de la parabole, nous avons $\overline{TN}^2 = TB \times BR$: donc :: TB. TN. BR; & partant $\overline{TB}^2$. $\overline{TN}^2$:: TB. BR (393). De même dans la parabole *abc*, nous trouverons $\overline{tb}^2$. $\overline{tn}^2$ :: *tb*. *br*: mais nous avons fait TB. *tb* :: BP. *bp*; & BP. *bp* :: BR. *br*: donc TB. *tb* :: BR. *br*; ou TB. BR :: *tb*. *br*: par conſéquent $\overline{TB}^2$. $\overline{TN}^2$ :: $\overline{tb}^2$. $\overline{tn}^2$; d'où l'on tire TB. TN :: *tb*. *tn*. Ainſi les deux triangles rectangles BTN, *btn*, ſont ſemblables; & partant le triangle entier MBN, eſt ſemblable au triangle entier *mbn*.

Je mene les droites TC, TA, *tc*, *ta*; & je prouverai aiſément, comme ci-deſſus, que PC. PT :: *pc*. *pt*; & que par conſéquent le triangle TPC eſt ſemblable au triangle *tpc*: ce qui rend auſſi ſemblables les triangles ATC, *atc*. Enfin comme, à cauſe des triangles

ſemblables TPC, *tpc*, nous avons TC. *tc* :: TP. *tp*; & que TP. *tp* :: BT. *bt*; nous aurons TC. *tc* :: BT. *bt*.

Mais nous avons trouvé BT. *bt* :: TN. *tn*; donc TC. *tc* :: TN. *tn*. Or à cauſe des angles droits PTN, *ptn*, & des angles égaux PTC, *ptc*; les angles CTN, *ctn*, ſont auſſi égaux: donc les deux triangles CTN, *ctn*, ſont ſemblables; puiſque les côtés TC, *tc*, & TN, *tn*, qui comprennent les mêmes angles, ſont proportionnels: & de là il ſuit que les deux autres triangles MTA, *mta*, ſont auſſi ſemblables. Ainſi les figures inſcrites AMBNC, *ambnc*, étant compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables chacun à chacun, ſont ſemblables entre elles.

687. COROLLAIRE. *Les paraboles ſemblables ſont entre elles comme les quarrés de leurs baſes ou de leurs côtés homologues* (Fig. 423).

DÉMONSTRATION. Nous avons trouvé PC. *pc* :: PT, *pt*: & à cauſe que nous avons fait PT. TB :: *pt*. *tb*; nous aurons, en compoſant, PT. PB :: *pt*. *pb*; ou PT. *pt* :: PB. *pb*: donc PC. *pc* :: PB. *pb*. Or la demi-parabole BPC eſt les deux tiers du rectangle PC × PB; & la demi-parabole *bpc* eſt les deux tiers du rectangle *pc*×*pb*; & ces deux rectangles ayant les côtés proportionnels, ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues: donc les deux demi-paraboles, & par conſéquent les deux paraboles, ſont comme les quarrés de leurs côtés homologues.

688. COROLLAIRE II. *Toutes les paraboles peuvent être ſemblables*. Car il n'y a qu'à prendre les abſciſſes BP, *bp*, en même raiſon que les parametres BR, *br*; & mener par les points P, *p*, les baſes AC, *ac*.

L'ELLIPSE CONSIDÉRÉE SUR UN PLAN HORS DU CONE.

689. PROBLÊME. *Conſtruire une ellipſe* (Fig. 424).

SOLUTION. Je prends deux lignes droites AB, CD, inégales entre elles: je leur fais faire un angle droit, en ſorte qu'elles ſe coupent l'une & l'autre en deux parties égales au point O. De ce point pris pour centre, & d'un rayon égal à la moitié OA de la plus grande des deux lignes, je décris un cercle AEBH. Je prolonge CD de part & d'autre juſqu'à la circonférence du cercle en H & E; & diviſant AB en pluſieurs parties égales, j'éleve des perpendiculaires *n*N, *t*T, &c. qui ſe terminent de part & d'autre à la circonférence.

Cela fait, je commence par le demi-cercle AEB; & je cherche une

quatrieme proportionnelle au rayon OE, à la droite OD, & à la perpendiculaire MN : cette quatrieme proportionnelle étant trouvée, je la porte ſur MN, de M en R. Je cherche de même une quatrieme proportionnelle SV aux deux OE, OD, & à la perpendiculaire ST : je continue ainſi à chercher des quatriemes proportionnelles toujours aux deux lignes OE, OD, & à quelqu'une des perpendiculaires du demi-cercle AED ; & je fais paſſer une courbe ARVDPB, par les extrémités des quatriemes proportionnelles. Je fais la même choſe à l'égard du demi-cercle AHB : ce qui me donne une courbe ADBC, dont la ligne AB eſt un axe, à cauſe qu'elle coupe en deux également toutes les droites *r*R, *u*V, ſur leſquelles elle eſt perpendiculaire : & la ligne CD eſt l'autre axe, parcequ'elle coupe auſſi en deux également toutes les lignes paralleles à AB qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, comme nous démontrerons plus bas. Il ne reſte donc qu'à faire voir que cette courbe eſt une ellipſe : c'eſt ce que je démontre.

Par la conſtruction nous avons OE. OD :: MN. MR ; & OE. OD :: ST. SV : donc MN. MR :: ST. SV ; ou MN. ST :: MR. SV : c'eſt-à-dire, les ordonnées MR, SV, &c. de la courbe ADBC, ſont entre elles comme les ordonnées MN, ST, &c. du demi-cercle AEB. Par conſéquent, en élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MR}^2$. $\overline{SV}^2$ :: $\overline{MN}^2$. $\overline{ST}^2$.

Mais par la propriété du cercle, $\overline{MN}^2 = AM \times MB$; & $\overline{ST}^2 = AS \times SB$: donc $\overline{MR}^2$. $\overline{SV}^2$ :: AM × MB. AS × SB : c'eſt-à-dire, les quarrés des ordonnées MR, SV, OD, XP, de la courbe ADBC, ſont entre eux comme les rectangles AM × MB, AS × SB, &c. des parties de l'axe AB qu'elles coupent ; & par conſéquent cette courbe eſt une ellipſe (632).

690. COROLLAIRE I. *Le quarré d'une ordonnée quelconque MR au grand axe AB, eſt au rectangle AM × MR des parties de l'axe qu'elle coupe ; comme le quarré du petit axe CD, eſt au quarré du grand axe AB* (Fig. 424).

DÉMONSTRATION. Les droites MR, OD, étant ordonnées au grand axe, nous avons $\overline{MR}^2$. $\overline{OD}^2$ :: AM × MB. AO × OB (689) ; ou $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{OD}^2$. AO × OB. Mais, à cauſe de AO = OB, nous avons AO × OB = $\overline{AO}^2$: donc $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{OD}^2$. $\overline{AO}^2$.

Or OD étant le demi petit axe, & AO le demi grand axe, les quarrés $\overline{OD}^2$, $\overline{AO}^2$, de ces moitiés, ſont entre eux comme les quarrés

de leurs touts CD, AO : donc le quarré de l'ordonnée MR, eſt au rectangle AM × MB ; comme le quarré du petit axe CD, eſt au quarré du grand axe AB.

Parametre de l'Ellipſe.

691. DÉFINITION. Si l'on prend une troiſieme proportionnelle au grand axe AB, & au petit axe CD ; cette troiſieme proportionnelle ſe nommera *parametre* du grand axe : & ſi l'on prend une troiſieme proportionnelle au petit axe CD, & au grand axe AB ; cette troiſieme proportionnelle ſe nommera *parametre* du petit axe (*Fig.* 424).

692. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque MR au grand axe, eſt au rectangle AM × MB des parties de l'axe qu'elle coupe ; comme le parametre du grand axe AB, eſt à cet axe.* Je nomme p le parametre du grand axe ; & j'ai :: AB. CD. p (691) : donc $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$ :: $\overline{AB}^2$. p ; ou $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ :: p. AB. Or j'ai $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$ (690) : donc $\overline{MR}^2$. AM × MB :: p. AB.

693. COROLLAIRE III. *Si ſur l'une des extrémités A du grand axe AB, on éleve une perpendiculaire AX égale au parametre de cet axe ; & que de l'extrémité X de cette perpendiculaire, l'on mene une droite XB à l'autre extrémité B du grand axe, laquelle coupera toutes les ordonnées les unes en dehors de l'ellipſe, & les autres en dedans ; je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque MR eſt égal au rectangle de l'abſciſſe AM par MV ; c'eſt-à-dire par la ligne MV perpendiculaire ſur le grand axe au point M, & compriſe entre le grand axe & la droite XB* (Fig. 425).

DÉMONSTRATION. Nous avons $\overline{MR}^2$. AM × MB :: AX. AB (692) ; & à cauſe des triangles ſemblables VMB, XAB, nous avons VM. MB :: AX. AB : & multipliant les deux premiers termes de cette proportion par la même grandeur AM, nous aurons VM × AM. AM × MB :: AX. AB : donc VM × AM. AM × MB :: $\overline{MR}^2$. AM × MB. Or les deux conſéquents de cette proportion ſont égaux : donc VM × AM = $\overline{MR}^2$.

694. REMARQUE. Dans la parabole, le quarré d'une ordonnée eſt toujours égal au rectangle de ſon abſciſſe par le parametre ; dans l'ellipſe, le quarré de l'ordonnée au grand axe eſt toujours égal au rectangle de ſon abſciſſe AM par une ligne MV moindre que le parametre de cet axe ; & dans l'hyperbole, nous démontrerons

dans la ſuite, que le quarré d'une ordonnée à un axe eſt plus grand que le rectangle de l'abſciſſe par le parametre de cet axe. Or c'eſt de là que les noms de Parabole, d'Ellipſe & d'Hyperbole ſont venus: car Parabole en grec ſignifie *Egalité*; Ellipſe ſignifie *Défaut*; & Hyperbole, *Excès*.

695. COROLLAIRE IV. *Les ordonnées SV, XP, au grand axe AB, également éloignées du centre O, ſont égales* (Fig. 424).

DÉMONSTRATION. Par la génération de l'ellipſe, nous avons SV. XP :: ST. XZ (689): or dans le cercle AEBH, les cordes *t*T, *z*Z, également éloignées du centre O, ſont égales: donc leurs moitiés ST, XZ, ſont auſſi égales; & par conſéquent SV=XP.

696. COROLLAIRE V. *Toutes les lignes comme RZ qui paſſent par le centre O d'une ellipſe, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, ſont coupées en deux également au centre O* (Fig. 426).

DÉMONSTRATION. De l'un des points R, où la droite RZ coupe la courbe, je mene l'ordonnée RM. Je prends ſur l'axe la partie OX=OM; & du point X, je mene la droite XZ parallele à MR; ſans m'embarraſſer ſi le point Z où elle coupe RZ eſt ſur la courbe, ou s'il n'y eſt pas.

Les triangles ſemblables MOR, XOZ, ayant le côté MO égal au côté OX, ſont parfaitement égaux: & partant RO=OZ, & MR=ZX. Or MR, ZX, ſont également éloignées du centre: donc puiſque MR eſt une ordonnée au grand axe, la droite ZX doit être auſſi ordonnée au même axe (695); & partant le point Z, où elle coupe ZR, eſt ſur l'ellipſe; & ZR eſt coupée en deux également en O.

697. COROLLAIRE VI. *Toute ligne comme RP, parallele au grand axe AB, & qui ſe termine de part & d'autre à la courbe, eſt coupée en deux également en T par le petit axe CD* (Fig. 427).

DÉMONSTRATION. Des points R, P, où RP coupe la courbe, je mene les ordonnées MR, PX, leſquelles étant paralleles entre les paralleles MX, RP, ſont par conſéquent égales entre elles. Ainſi leurs diſtances MO, OX, au centre O, ſont égales (695). Mais à cauſe des paralleles MR, OD, XP; les paralleles MO, RT, ſont égales; de même que les paralleles OX, TP: donc à cauſe de MO=OX, nous aurons RT=TP.

698. COROLLAIRE VII. *Le quarré d'une ordonnée RT au petit axe CD, eſt au rectangle des parties CT, TD, de cet axe qu'elle*

coupe, comme le quarré du grand axe AB, eſt au quarré du petit axe CD (Fig. 427).

DÉMONSTRATION. Du point R, je mene l'ordonnée RM au grand axe; & j'ai $\overline{MR}^2$. AM × MB :: $\overline{OD}^2$. $\overline{AO}^2$ (690). Mais à cauſe que AB eſt diviſé également en O, & inégalement en M; nous avons AM × MB = $\overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$; ou AM × MB = $\overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$, à cauſe de MO = RT: & de même, à cauſe de MR = OT, nous avons $\overline{MR}^2 = \overline{OT}^2$.

Mettant donc dans notre proportion les valeurs de $\overline{MR}^2$, & AM × MB; nous aurons $\overline{OT}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{AO}^2$; ou $\overline{OD}^2$. $\overline{OT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{RT}^2$. Par conſéquent $\overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 + \overline{RT}^2$: ce qui ſe réduit à $\overline{OD}^2$. $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{RT}^2$; ou $\overline{RT}^2$. $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$.

Et comme, à cauſe de l'axe CD diviſé également en O & inégalement en T, nous avons $\overline{OD}^2 - \overline{OT}^2$ = CT × TD; nous aurons enfin $\overline{RT}^2$. CT × TD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{CO}^2$: c'eſt-à-dire, le quarré de l'ordonnée RT au petit axe, eſt au rectangle CT × TD; comme le quarré du demi grand axe, eſt au quarré du demi petit axe; ou comme le quarré du grand axe au quarré du petit.

699. COROLLAIRE VIII. *Donc les quarrés des ordonnées au petit axe ſont entre eux, comme les rectangles des parties de cet axe qu'ils coupent.* Soient les deux ordonnées RT, EF: nous aurons donc $\overline{RT}^2$. CT × TD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$; & $\overline{EF}^2$. CF × FD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$: donc $\overline{RT}^2$. CT × TD :: $\overline{EF}^2$. CF × FD; ou $\overline{RT}^2$. $\overline{EF}^2$ :: CT × TD. CF × FD (*Fig.* 427).

700. COROLLAIRE IX. Donc le quarré d'une ordonnée RT au petit axe, eſt au rectangle correſpondant CT × TD; comme le parametre du petit axe, eſt au petit axe. Ce qui ſe démontre comme nous avons fait à l'égard du grand axe (692).

701. COROLLAIRE X. *Si ſur l'une des extrémités D du petit axe* (Fig. 428), *on éleve une perpendiculaire DX égale à ſon parametre; & que du point X on mene à l'autre extrémité C la droite CX; le quarré d'une ordonnée quelconque TP au petit axe, eſt égal au produit de l'abſciſſe TD par TH.* Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard du grand axe (693).

702. COROLLAIRE XI. *Si l'on décrit un cercle CXD autour du petit axe CD ; ce cercle ſera tout entier dans l'ellipſe* (Fig. 429).

Car menant au petit axe l'ordonnée RT qui coupe le cercle en X ; nous aurons $\overline{RT}^2$. CT × TD :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$. Or par la propriété du cercle, CT × TD = $\overline{XT}^2$: donc $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$. Mais $\overline{AO}^2$ eſt plus grand que $\overline{OD}^2$: donc $\overline{RT}^2$ eſt auſſi plus grand que $\overline{XT}^2$. Ainſi le point X du cercle eſt dans l'ellipſe ; & comme cela arrivera à l'égard de toutes les ordonnées de l'ellipſe & du cercle CXD, il s'enſuit que ce cercle eſt inſcrit dans l'ellipſe.

703. COROLLAIRE XII. *L'ellipſe eſt moyenne proportionnelle entre le cercle circonſcrit AEBH, & le cercle inſcrit CXD* (Fig. 429).

DÉMONSTRATION. Par la nature de l'ellipſe, toute ordonnée MS du cercle circonſcrit AEBH, eſt à l'ordonnée correſpondante MN de l'ellipſe ; comme le rayon OE ou la moitié OA du grand axe, eſt à la moitié du petit axe. D'où il ſuit que la ſomme des ordonnées du cercle circonſcrit, ou le cercle circonſcrit, eſt à la ſomme des ordonnées de l'ellipſe, ou à l'ellipſe ; comme la moitié du grand axe eſt à la moitié du petit axe ; ou comme le grand axe eſt au petit. Ainſi nous avons AEBH. ADBC :: AB. CD.

Or comme nous avons $\overline{RT}^2$. $\overline{XT}^2$ :: $\overline{AO}^2$. $\overline{OD}^2$ (699, ce qui donne RT. XT :: AO. OD ; il eſt clair que la ſomme des ordonnées au petit axe de l'ellipſe, c'eſt-à-dire l'ellipſe, eſt à la même ſomme des ordonnées du cercle inſcrit, c'eſt-à-dire au cercle inſcrit ; comme AO eſt à OD, ou comme AB eſt à CD : & par conſéquent nous avons ADBC. CXDV :: AB. CD. Mais nous venons de trouver AEBH. ADBC :: AB. CD : donc AEBH. ADBC :: ADBC. CXDV.

704. COROLLAIRE XIII. *Les ordonnées MR, SV, d'un quart d'ellipſe AOD, vont en diminuant à meſure qu'elles s'approchent du ſommet A du grand axe : & ſi des ordonnées MN, ST, du quart de cercle circonſcrit AOE, on retranche les ordonnées MN, SV ; les reſtes RN, VT, iront auſſi en diminuant en approchant de A, & ſeront entre eux comme les ordonnées MR, SV, &c.* (Fig. 430).

DÉMONSTRATION. Par la nature de l'ellipſe nous avons MR. SV :: MN. ST : mais dans le cercle AEBH, la corde *n*N étant plus éloignée du centre O que la corde *t*T, eſt moindre que *t*T : donc ſa moitié MN eſt auſſi moindre que la moitié ST de *t*T, & par conſéquent MR eſt auſſi moindre que SV.

Maintenant puiſque nous avons MR. SV :: MN. ST, ou MR. MN :: SV. ST, nous aurons auſſi MR. MN—MR :: SV. ST—SV : c'eſt-à-dire, MR. RN :: SV. VT, & partant MR. SV :: RN. VT. Mais MR eſt moindre que SV ; donc RN eſt moindre que VT.

705. COROLLAIRE XIV. *De toutes les lignes RO, VO, qu'on peut mener des points d'un quart AD de circonférence d'ellipſe au centre O ; celles qui font un moindre angle avec le grand axe AB, & qui par conſéquent en ſont plus proches, comme RO, ſont plus grandes que celles qui font un angle plus grand avec cet axe, ou qui en ſont plus éloignées, comme VO* (Fig. 430).

DÉMONSTRATION. Des points R, V, je mene les ordonnées RM, SV, au grand axe ; & je les prolonge juſqu'à la circonférence du cercle circonſcrit en N & T : des points N, T, je mene au centre les droites NO, TO, leſquelles ſont égales, étant rayons du même cercle : ainſi $\overline{NO}^2 = \overline{TO}^2$. Or, le triangle rectangle NMO donne $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2$: & à cauſe que MN eſt diviſé en deux parties en R, nous avons $\overline{MN}^2 = \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$: donc $\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2 + 2MR \times RN + \overline{RN}^2$. De même le triangle rectangle TOS donne $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{ST}^2$; & à cauſe de ST diviſé en deux parties en V, nous avons $\overline{ST}^2 = \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$, & partant $\overline{TO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2 + 2SV \times VT + \overline{VT}^2$.

Or, le triangle rectangle RMO donne $\overline{RO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MR}^2$: donc ce qui manque au quarré $\overline{RO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{NO}^2$, eſt $2MR \times RN + \overline{RN}^2$. De même le triangle rectangle VSO donne $\overline{VO}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{SV}^2$: & par conſéquent ce qui manque au quarré $\overline{VO}^2$ pour être égal au quarré $\overline{TO}^2$, eſt $2SV \times VT + \overline{VT}^2$.

Mais MR eſt moindre que SV ; & RN moindre que VT (704) : donc le défaut $2MR \times RN + \overline{RN}^2$ eſt moindre que le défaut $2SV \times VT + \overline{VT}^2$. Ainſi il manque moins à $\overline{RO}^2$ pour être égal à $\overline{NO}^2$, qu'il ne manque à $\overline{VO}^2$ pour être égal à $\overline{TO}^2$ ou $\overline{NO}^2$: & par conſéquent $\overline{RO}^2$ eſt plus grand que $\overline{VO}^2$; & RO eſt plus grand que VO.

706. COROLLAIRE XV. *Donc de toutes les lignes RH, VL, qui paſſent par le centre O, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe ; les plus grandes ſont celles qui font des angles moindres avec le grand axe.* Nous venons de voir que RO eſt plus grand

que

que VO : or, RH, VL, étant coupées en deux également au centre O (696), ſont doubles de RO, VO : donc RH eſt auſſi plus grande que VL.

707. COROLLAIRE XVI. *Si du centre O d'une ellipſe, & avec un rayon OH plus grand que le demi petit axe OD, & mōindre que le demi grand axe OA, on décrit un cercle ; ce cercle coupera l'ellipſe, & ne la coupera qu'en quatre points M, N, S, R, par leſquels on peut mener deux doubles ordonnées MN, RS, au grand axe, égales entre elles ; & deux doubles ordonnées MR, NS, au petit axe, auſſi égales entre elles* (Fig. 431).

DÉMONSTRATION. I°. Il eſt évident que ce cercle doit couper l'ellipſe. Car prenant ſur le grand axe la partie TO, égale au rayon HO ; la circonférence du cercle paſſera par le point T : par conſéquent elle ne pourra venir du point H au point T, ſans couper le quart AC de l'ellipſe.

II°. Ce cercle doit couper l'ellipſe en quatre points. Car de même que le point H ne peut décrire le quart HT de circonférence, ſans couper le quart AC de l'ellipſe ; de même auſſi il ne peut décrire l'autre quart de circonférence TE, ſans couper l'autre quart d'ellipſe AD : & la même choſe arrivera à l'égard des deux autres quarts d'ellipſe DB, CB.

III°. Le point H, en décrivant le quart de circonférence HT, ne peut couper le quart d'ellipſe AC qu'en un ſeul point M. Car s'il le coupoit encore en un autre point K ; menant des points M, K, des droites au centre, ces droites MO, KO, étant rayons du même cercle, ſeroient égales : par conſéquent de deux différents points M, K, d'un quart d'ellipſe AC, on pourroit mener au centre O deux lignes égales MO, KO : ce qui n'eſt pas poſſible ; puiſque la plus proche KO de l'axe AB, eſt toujours plus grande que l'autre MO (705). Par la même raiſon, le point H, en décrivant le quart de circonférence TE, ne peut couper le quart d'ellipſe AD qu'en un ſeul point N ; & la même choſe doit ſe dire des autres quarts DB, CB, d'ellipſe : donc le cercle ne peut couper l'ellipſe qu'en quatre points.

IV°. Le point T étant le plus haut point du quart de circonférence HMT, c'eſt-à-dire, le plus éloigné du diametre HE ; ſi du point M, où ce quart de circonférence coupe le quart d'ellipſe AC, je mene une droite MN, parallele au diametre HE ; cette droite coupera le cercle en un autre point tel que N, & ſera une corde, laquelle ſera coupée en deux également en P par le rayon OT

perpendiculaire ſur le diametre HE : ainſi nous aurons MN = 2MP. Mais MP étant ordonnée au grand axe AO, la double ordonnée menée du même point M doit être auſſi 2MP : donc cette double ordonnée doit être égale à MN ; & par conſéquent le point N où la corde MN coupe le cercle, eſt le même que le point N où la double ordonnée au grand axe coupe le quart d'ellipſe AP.

On prouvera de même que la ligne qui joint les points N, S, eſt une double ordonnée du petit axe ; que celle qui joint les points S, R, eſt une double ordonnée au grand axe ; & que celle qui joint les points R, M, eſt une double ordonnée au petit axe. Ainſi à cauſe des paralleles MN, RS, & NS, MR ; la figure MNRS ſera un parallélogramme rectangle : & partant les deux doubles ordonnées MN, RS, ſeront égales ; de même que les deux doubles ordonnées NS, MR, au petit axe.

708. PROBLÊME. *D'un point R pris ſur une ellipſe ADBC, mener une tangente à la courbe* (Fig. 432).

SOLUTION. Du point R je mene une ordonnée au grand axe AB ; & cherchant une troiſieme proportionnelle OT à la diſtance OM du centre à l'ordonnée, & au demi grand axe OA ; je mene par l'extrémité T de cette proportionnelle, & par le point donné R, la droite TRY, laquelle eſt la tangente demandée : ce que je prouve ainſi.

Je décris autour du grand axe le cercle AEBH qui ſera circonſcrit à l'ellipſe : je prolonge l'ordonnée MR, juſqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en N ; & du point N menant par le point T la droite NT, cette droite touchera le cercle en N, à cauſe de :: OM. OA. OT (292). Je prends ſur l'axe un autre point quelconque S, d'où je mene une droite SX parallele à MN, & qui coupe la tangente TN en X, la circonférence du cercle en Z, la droite TR en L, & l'ellipſe en V. Les triangles ſemblables MNT, SXT, donnent MN. SX :: MT. ST : & à cauſe des triangles ſemblables MRT, SLT ; nous avons MR. SL :: MT. ST : donc MN. SX :: MR. SL ; ou MN. MR :: SX. SL.

Or par la nature de l'ellipſe, nous avons MN. MR :: SZ. SV : donc SX. SL :: SZ. SV. Or, à cauſe que TN eſt tangente du cercle en N, la droite SX eſt plus grande que l'ordonnée SZ de ce cercle : donc SL doit être plus grand que SV ; & par conſéquent le point L de la droite TY, doit être hors de l'ellipſe. Et comme la même choſe arrivera en quelque part de l'axe où l'on prenne le point S, excepté en M ; il s'enſuit que TRY ne touche l'ellipſe qu'en R.

REMARQUE. Si ſur les extrémités, A, B, du grand axe, on éleve des perpendiculaires ; elles ſeront tangentes de l'ellipſe, à cauſe qu'elles ſeront tangentes du cercle circonſcrit, ſur le diametre duquel elles ſeront perpendiculaires. De même les perpendiculaires élevées ſur les extrémités du petit axe, ſeront tangentes, à cauſe que le petit axe eſt la plus grande de toutes les doubles ordonnées au grand axe.

709. COROLLAIRE I. *Une tangente TR ayant été menée à une ellipſe ; ſi on la prolonge juſqu'à ce qu'elle coupe le petit axe CD en Y, & que du point d'attouchement on mene l'ordonnée RQ au petit axe ; on aura auſſi* :: *OQ. OD. OY* (Fig. 433).

DÉMONSTRATION. Je décris autour du petit axe le cercle CHDF, lequel ſera inſcrit dans l'ellipſe ; & du point E, où ce cercle coupe l'ordonnée QR, menant la droite EY ; cette droite ſera tangente du cercle. Car d'un autre point quelconque P pris ſur le petit axe, menant parallèlement à QR la droite PM, qui coupe la tangente TY en M, l'ellipſe en N, la droite YE prolongée en S, & le cercle en X ; les triangles ſemblables PMY, QRY, donnent PM. QR :: PY. QY : & à cauſe des triangles ſemblables PSY, QEY, nous aurons PS. QE :: PY. QY. Donc PM. QR :: PS. QE ; ou PM. PS :: QR. QE. Mais par la nature de l'ellipſe, nous avons PN. PX :: QR. QE : donc PM. PS :: PN. PX.

Or, à cauſe que TR eſt tangente de l'ellipſe en R ; la droite PM eſt plus grande que l'ordonnée PN : donc la droite PS eſt auſſi plus grande que PX ; & partant le point S de la droite YES, eſt hors du cercle CHDF. Et comme la même choſe arrivera partout où l'on prendra le point P, excepté en Q ; il s'enſuit que la droite YE eſt tangente du cercle en E ; & que par conſéquent, on doit avoir :: OQ. OD. OY (292).

D'où il ſuit qu'un point R étant donné ſur une ellipſe, il eſt indifférent de mener l'ordonnée MR au grand axe (*Fig.* 432), ou l'ordonnée RQ au petit axe (*Fig.* 433). Car dans le premier cas, faiſant :: OM. OA. OT ; le point T ſera le point par où il faut mener la tangente : & dans le ſecond, faiſant :: OQ. OD. OY ; le point Y ſera le point d'où la tangente devra être menée, & cette tangente ſera la même pour l'un & l'autre cas.

710. COROLLAIRE II. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points de la courbe elliptique, ſont toutes inclinées entre elles, & ſe coupent entre leurs points d'attouchement* (Fig. 434).

DÉMONSTRATION. I°. Si les tangentes TP, VQ, ſont menées de

part & d'autre de l'axe ; il eſt clair que ces lignes étant inclinées ſur cet axe, ſont inclinées entre elles, & qu'elles doivent ſe couper en un point R entre les points d'attouchement. Et ce ſeroit la même choſe ſi les tangentes étoient menées de part & d'autre du petit axe CD.

II°. Mais ſi les tangentes TP, VQ (*Fig.* 435), ſont menées de deux points T, V, du même côté de l'axe ; je mene les ordonnées TM, VN. Ainſi par rapport à la tangente TP, j'ai :: OM. OA. OP ; ce qui donne $OM \times OP = \overline{OA}^2$: & par rapport à la ſeconde, j'ai :: ON. OA. OQ, & $ON \times OQ = \overline{OA}^2$: donc $OM \times OP = ON \times OQ$; d'où je tire OM. ON :: OQ. OP.

Mais OM eſt moindre que ON : donc OQ eſt moindre que OP ; c'eſt-à-dire, le point P, où la tangente TP la plus éloignée de l'axe coupe cet axe, eſt plus éloigné du ſommet A, que le point Q, où la tangente VQ coupe l'axe. Donc la tangente TP ne peut point aller aboutir au point P, ſans couper la tangente QVS. Mais elle ne peut la couper au point d'attouchement V : car alors TP toucheroit la courbe en deux points T, V ; ce qui n'eſt pas poſſible (708). Elle ne peut pas non plus la couper entre V & Q : car il faudroit pour cela qu'elle paſſât entre le point V d'attouchement & l'axe ; & par conſéquent elle ne ſeroit plus tangente : donc elle doit la couper néceſſairement en quelque point Z, entre T & V.

711. COROLLAIRE III. *D'un même point on ne peut mener deux tangentes* : ce que l'on prouvera de même que pour la parabole (646).

712. COROLLAIRE IV. *Une tangente RP étant menée d'un point R, & une ordonnée MR menée du point d'attouchement R au grand axe ; on aura PA. AM :: PB. MB* (Fig. 436).

DÉMONSTRATION. Je décris ſur le grand axe le cercle circonſcrit ; & prolongeant l'ordonnée juſqu'à la circonférence en N, la droite NP eſt tangente du cercle (708) ; & la droite MN eſt l'ordonnée de ce cercle menée du point d'attouchement N : donc nous avons PA. AM :: PB. MB (296) ; c'eſt-à-dire, la ſécante PB qui paſſe par le centre O de l'ellipſe, eſt coupée harmoniquement.

713. COROLLAIRE V. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent ; ſi l'on mene par le point P une ſécante PZ qui ne paſſe pas par le centre de l'ellipſe, & qui ſoit coupée par la*

courbe & par l'ordonnée RM aux points X, Z, V; on aura encore PX. XV :: PZ. VZ (Fig. 437).

DÉMONSTRATION. Je décris le cercle circonſcrit : & prolongeant l'ordonnée MR en N ; la droite PN eſt tangente du cercle, & MN eſt ſon ordonnée menée du point d'attouchement. Des points X, Z, je mene les droites QE, TH, juſqu'à ce qu'elles coupent la circonférence en E, H, & l'axe en Q, T. Ainſi par la nature de l'ellipſe, j'ai QX. TZ :: QE. TH. Je mene par le point E, & le point P, la droite PH ; ſans m'embarraſſer ſi elle coupe TH en H, ou en quelque autre point que je nomme *y*.

Les triangles ſemblables PQX, PTZ, donnent QX. TZ :: PQ. PT : & à cauſe des triangles ſemblables PQE, PT*y*, nous avons QE. T*y* :: PQ. TP ; donc QX. TZ :: QE. T*y*.

Mais nous avons QX. TZ :: QE. TH : donc QE. TH :: QE. T*y* ; & par conſéquent TH = T*y* : c'eſt-à-dire la droite P*y* eſt la même que PH.

Or PH eſt une ſécante du cercle, laquelle eſt coupée harmoniquement par le cercle & par l'ordonnée MN menée du point d'attouchement N (296) : & à cauſe des paralleles QE, MN, TH ; la droite PZ eſt coupée en X, V, Z, en même raiſon que la droite PH : donc PX. XV :: PZ. VZ.

714. COROLLAIRE VI. *Poſant toujours la tangente RP, & l'ordonnée RM menée du point d'attouchement ; ſi l'on mene le petit axe CD, on aura PA. PM :: PO. PB* (Fig. 438).

DÉMONSTRATION. Je décris le cercle circonſcrit : je prolonge l'ordonnée en N : & du point N, je mene la tangente PN. Ainſi j'ai par rapport au cercle, PA. PM :: PO. PB (294) : or ces lignes ſont les mêmes par rapport à l'ellipſe : donc, &c.

715. COROLLAIRE VII. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent ; ſi des extrémités A, B, de l'axe, on éleve ſur cet axe des perpendiculaires AH, BL, juſqu'à la rencontre de la tangente PRL ; le rectangle AH × BL de ces deux perpendiculaires eſt égal au quarré du demi-axe OD* (Fig. 438).

DÉMONSTRATION. Je prolonge le petit axe juſqu'à ce qu'il rencontre la tangente en E. Les triangles PAH, PMR, POE, PBL, étant ſemblables ; leurs baſes AH, MR, OE, BL, ſont entre elles comme leurs hauteurs PA, PM, PO, PB. Mais nous avons PA. PM :: PO. PB (714) : donc AH. MR :: OE. BL, & partant AH × BL = MR × OE.

Du point R, je mene l'ordonnée RT au petit axe ; ce qui donne

MR=OT. Or à cauſe de la tangente RE, & de l'ordonnée RT menée du point d'attouchement; nous avons :: OT ou MR. OD : OE : donc $\overline{OD}$=MR × OE. Mais nous venons de trouver AH×BL =MR×OE : donc AH×BL=$\overline{OD}$.

716. Corollaire VIII. *Suppoſant toujours la tangente PR, & l'ordonnée RM à l'axe, menée du point d'attouchement R; le rectangle AM×MB des parties de l'axe que l'ordonnée RM coupe, eſt égal au rectangle PM×MO de la ſoutangente PM par la diſtance MO de l'ordonnée RM au centre O* (Fig. 439).

Démonstration. Je décris le cercle circonſcrit; & prolongeant l'ordonnée en N, la droite PN eſt tangente du cercle en N : donc en menant au centre la droite NO, le triangle PNO eſt rectangle. Or l'ordonnée MN au cercle étant abaiſſée de l'angle droit N de ce triangle perpendiculairement ſur ſon hypothénuſe; nous avons $\overline{MN}$=PM×MO : & par la propriété du cercle, nous avons $\overline{MN}$ =AM×MB : donc PM×MO=AM×MB.

717. Corollaire IX. *Poſant encore les mêmes choſes; ſi du point d'attouchement R on éleve une perpendiculaire RS ſur la tangente RP, cette perpendiculaire coupera le grand axe en un point S, qui ſera entre l'ordonnée RM & le centre O* (Fig. 440).

Démonstration. La droite NO, menée du point d'attouchement N du cercle circonſcrit au centre O, eſt perpendiculaire ſur la tangente PN du cercle : & à cauſe que les deux lignes PR, PN, ſe coupent en P, il eſt clair que la perpendiculaire SR ſur PR, étant prolongée, ſera oblique ſur PN, & fera un angle aigu PXR ſur PN du côté de P, à cauſe que le triangle PRX eſt rectangle en R. Ainſi RS s'éloignera de plus en plus de NO; & par conſéquent elle coupera le diametre entre l'ordonnée MR & le centre O, où la droite NO va aboutir.

Remarquez que ſi du point R on mene l'ordonnée RT au petit axe; la perpendiculaire RZ coupera cet axe en delà du centre O par rapport à l'ordonnée RT : ce qui eſt évident.

718. Corollaire X. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent; je dis que la ſouperpendiculaire MS, eſt à la diſtance MO de l'ordonnée MR au centre O; comme le parametre du grand axe, eſt au grand axe* (Fig. 440).

Démonstration. Par la nature de l'ellipſe, nous avons, en nommant P le parametre du grand axe, $\overline{MR}$. AM×MB :: P. AB

(692). Or, à cauſe du triangle rectangle PRS, & de la droite RM perpendiculaire ſur l'hypothénuſe PS ; nous avons $\overline{MR}^2 = PM \times MS$: & d'autre part, nous avons $AM \times MB = PM \times MO$ (716). Subſtituant donc ces valeurs dans notre proportion, nous aurons $PM \times MS$. $PM \times MO :: P. AB$.

Mais les rectangles $PM \times MS$, $PM \times MO$, ayant une dimenſion commune PM, ſont entre eux comme leurs dimenſions inégales MS. MO : donc MS, MO :: P. AB.

REMARQUE. Si l'on mene du point R l'ordonnée RT au petit axe ; on prouvera de la même façon, que la ſouperpendiculaire TZ, eſt à la diſtance TO de l'ordonnée au centre ; comme le parametre du petit axe, eſt à ce petit axe. Au reſte, il eſt aiſé de voir que tout ce que nous avons dit dans les Corollaires précédents au ſujet du grand axe, peut s'appliquer au petit axe ; à l'exception de ce qui a été remarqué dans la note du Corollaire précédent.

Foyers de l'Ellipſe.

719. DÉFINITION. Une ellipſe ADBC étant donnée ; ſi de l'une des extrémités D du petit axe CD, & avec un rayon égal au demi grand axe AO, on décrit un arc HX, qui coupe le grand axe en deux points H, X ; ces points ſe nommeront les *foyers* de l'ellipſe. Il eſt aiſé de voir que ces foyers ſont également éloignés du centre O ; à cauſe des triagles rectangles égaux DHO, DOX (*Fig.* 441).

720. COROLLAIRE. Il ſuit de cette définition, que *le rectangle $AH \times HB$ des parties AH & HB de l'axe, que l'un des foyers H coupe, eſt égal au quarré de la moitié OD du petit axe.*

DÉMONSTRATION. Le triangle rectangle HOD donne $\overline{OD}^2 = \overline{HD}^2 - \overline{HO}^2$; ou $\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$: à cauſe de HD = AO. Mais le grand axe AB étant diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en H ; nous avons $AH \times HB = \overline{AO}^2 - \overline{HO}^2$: donc $AH \times HB = \overline{OD}^2$; & de même, $AX \times XB = \overline{OD}^2$.

PROPOSITION XII.

721. *Une tangente PR, & l'ordonnée RM au grand axe, menée du point d'attouchement R, étant données ; je dis que ſi l'on décrit le cercle circonſcrit, & que des points T, S, où ce cercle coupe la tangente PRL, on éleve des perpendiculaires TH, SX, ſur la tan-*

gente ; ces perpendiculaires paſſeront par les foyers H, X, de l'ellipſe (Fig. 442).

DÉMONSTRATION. La droite TS étant corde du cercle circonſcrit; les droites T*t*, SQ, élevées perpendiculairement aux extrémités de cette corde, ſont deux cordes égales du même cercle circonſcrit (265) : & à cauſe que le diametre BA du cercle coupe ces cordes obliquement; les parties TH, *t*H, de la corde T*t*, ſont égales chacune à chacune aux parties SX, XQ, de la corde SQ (266). Cela poſé :

Je mene par les extrémités A, B, de l'ellipſe, les tangentes AN, BL, qui coupent la tangente PL en N & L. Les triangles rectangles PBL, PSX, étant ſemblables, à cauſe de l'angle aigu P, qui leur eſt commun, donnent PB. PS :: BL. SX : & à cauſe des triangles rectangles ſemblables PTH, PAN ; nous avons PT. PA :: TH. AN.

Or les droites PB, PS, étant ſécantes du cercle, donnent PB. PS :: PT. PA (272) : donc BL. SX :: TH. AN, & par conſéquent BL×AN=SX×TH. Mais BL×AN=$\overline{OD}^2$ (715) : donc SX×TH=$\overline{OD}^2$, ou *t*H×TH=$\overline{OD}^2$, à cauſe de *t*H=SX.

Or les droites *t*T, AB, étant des cordes du cercle circonſcrit, leſquelles ſe coupent en H; nous avons *t*H×TH=AH×HB (279): donc AH×HB=$\overline{OD}^2$; c'eſt-à-dire, le rectangle des parties inégales AH, HB, du grand axe, eſt égal au quarré de la moitié OD du petit axe : donc le point H eſt un des foyers de l'ellipſe (720); & on prouvera de même que le point X eſt l'autre foyer. C. Q. F. D.

722. COROLLAIRE I. *Une tangente PR étant donnée, ſi des deux foyers H & X de l'ellipſe, on mene des droites HR, XR, au point d'attouchement R ; les angles HRT, XRS, faits par ces droites avec la tangente PS, ſont égaux* (Fig. 443).

DÉMONSTRATION. Je décris le cercle circonſcrit ; & des points T, S, où ſa circonférence coupe la tangente PS, élevant des perpendiculaires TH, SX, qui paſſent par les foyers H, X (721); les triangles HRT, XRS, ſont rectangles ; & les triangles ſemblables HTP, XSP, donnent HT. XS :: PT. PS.

Je mene l'ordonnée MR, que je prolonge juſqu'à la circonférence du cercle en N ; & menant NP, cette droite NP eſt tangente du cercle : donc la ſécante PS, étant coupée en R par l'ordonnée NM menée du point d'attouchement, donne PT. TR :: PS. RS (296); ou PT. PS :: TR. RS. Donc HT. XS :: TR. RS ; & par conſéquent

conſéquent les triangles rectangles HTR, XSR, ſont ſemblables; & l'angle HRT eſt égal à l'angle XRS.

723. COROLLAIRE II. *Si des foyers H, X, d'une ellipſe, on mene des droites au point R où une tangente quelconque touche l'ellipſe; la ſomme de ces deux droites HR, XR, eſt égale au grand axe AB* (Fig. 443).

DÉMONSTRATION. Je décris le cercle circonſcrit; & du centre O, je mene la droite OS, à l'un des points S où le cercle coupe la tangente TS. J'éleve en S la droite SX, perpendiculaire ſur la tangente, laquelle paſſe par le foyer X; & je prolonge XS juſqu'à ce qu'elle rencontre en V la droite HR prolongée. L'angle SRV étant égal à l'angle TRH qui lui eſt oppoſé au ſommet, eſt par conſéquent égal à l'angle XRS, lequel eſt égal à l'angle TRH (722). Ainſi les triangles rectangles XRS, SRV, ſont ſemblables & égaux; à cauſe du côté commun RS: & partant XS=SV.

Or, par la définition des foyers, on a XO=OH: donc la droite OS eſt parallele à la droite HV; & les triangles ſemblables HXV, OXS, donnent HV. OS :: HX. OX. Mais HX eſt double de OX: donc HV eſt auſſi double de OS. Or, à cauſe des triangles rectangles ſemblables & égaux RXS, RSV; nous avons XR=RV: donc HV=HR+RV=HR+XR; & partant HR+RX eſt double de OS ou de OB, c'eſt-à-dire HR+RX=AB.

724. REMARQUE. Comme il n'eſt aucun point R ſur la courbe de l'ellipſe, auquel on ne puiſſe mener une tangente; il s'enſuit qu'il n'en eſt aucun auſſi où les droites HR, RX, menées du foyer, ne ſoient enſemble égales à l'axe. Ainſi on peut aiſément décrire une ellipſe dont le grand axe AB, & les foyers H, X, ſont connus. Car ſi l'on prend un fil égal à la longueur AB; & qu'ayant attaché ſes deux extrémités aux deux foyers H, X, on tienne ce fil toujours tendu par le moyen d'un ſtyle que l'on conduira autour des deux foyers juſqu'à ce qu'il revienne au même point d'où il étoit parti; *la pointe du ſtyle décrira une courbe elliptique;* puiſqu'en quelque part R que ſe trouve cette pointe, on aura toujours HR+RX=AB.

Diametres de l'Ellipſe.

725. DÉFINITION. Toute ligne droite qui paſſe par le centre d'une ellipſe, & qui ſe termine de part & d'autre à la courbe, ſe nomme *diametre;* parcequ'on peut aiſément trouver une infinité de lignes paralleles, terminées de part & d'autre à la courbe, qui

ſeront coupées chacune en deux également par ce diametre, comme il ſera dit plus bas.

PROPOSITION XIII.

726. *Le grand axe AB, & un diametre RS, étant donnés; ſi par les ſommets A, R, on mene des tangentes AZ, RP, qui ſe coupent en X; les triangles PXA, ZXR, faits par ces tangentes avec l'axe & le diametre, ſont égaux* (Fig. 444).

DÉMONSTRATION. Du point R je mene l'ordonnée RM au grand axe AB, laquelle eſt parallele à la tangente AZ, l'une & l'autre étant perpendiculaires ſur le grand axe AB: & du point A, je mene la droite AH, parallele à la tangente RP. A cauſe de la tangente RP, & de l'ordonnée RM menée du point d'attouchement; j'ai OM. OA :: OA. OP (708). Or les triangles ſemblables OMR, OAZ, donnent OR. OZ :: OM. OA: donc OR. OZ :: OA. OP: & par conſéquent menant la droite RA, & la droite ZP, ces deux lignes RA, ZP, ſont paralleles; & les triangles ARP, ARZ, qui ſont entre ces deux paralleles, & qui ont la même baſe RA, ſont égaux: donc en retranchant de l'un & de l'autre le triangle RXA, nous aurons PXA=ZXR. Ce qu'il falloit démontrer.

727. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes; ſi du point d'attouchement R de la tangente RP menée par le ſommet du diametre RS, on mene l'ordonnée RM au grand axe; le triangle RPM fait par la tangente, l'ordonnée, & le grand axe, eſt égal au quadrilatere ZAMR fait par la tangente de l'axe, par l'ordonnée RM, & par l'axe & le diametre.* Les triangles PXA, ZXR, ſont égaux (726): ajoutant de part & d'autre la partie commune RXAM, nous aurons RPM=ZAMR (*Fig.* 444).

REMARQUE. Cette Propoſition & ſon Corollaire ſont de conſéquence, pour bien entendre ce qui ſuit, comme on le verra bientôt.

PROPOSITION XIV.

728. *Le grand axe AB, un diametre RS, étant donnés avec leurs tangentes AZ, RP, menées par les ſommets; ſi par un point quelconque E pris ſur la courbe, on mene deux paralleles aux tangentes:*

1°. *Le triangle EHV, fait par ces deux paralleles & le grand axe, eſt égal au trapézoïde AZTV, fait par la tangente du grand axe & ſa parallele TV compriſe entre l'axe & le diametre:*

II°. *Le triangle TEL, fait par les deux paralleles & le diametre RS, eſt égal au trapézoïde RPHL, fait par la tangente de ce diametre & ſa parallele compriſe entre l'axe & le diametre* (Fig. 445, 446, 447, 448, 449).

DÉMONSTRATION I. D'abord EHV=AZTV. Il y a ici pluſieurs cas, que nous allons examiner en commençant par le triangle fait par les deux paralleles avec l'axe AB (*Fig.* 445).

I°. Si le point E, d'où l'on mene les paralleles TV, HL, eſt *entre l'axe & le diametre ;* je ſais que le triangle PRM eſt égal au trapézoïde ZAMR (727). Or les triangles PRM, HEV, étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RM, EV : donc PRM. HEV :: $\overline{RM}$. $\overline{EV}$.

Mais par la nature de l'ellipſe, nous avons $\overline{RM}$. $\overline{EV}$ :: AM × MB. AV × VB (689) : & à cauſe que AB eſt diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en M ; nous avons AM × MB = $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$; & par la même raiſon, AV × VB = $\overline{AO}$ — $\overline{VO}$. Donc PRM. HEV :: $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$. $\overline{AO}$ — $\overline{VO}$: & mettant, au lieu des quarrés $\overline{AO}$, $\overline{MO}$ & $\overline{VO}$, les triangles ſemblables AZO, VTO, MRO, qui ſont en même raiſon ; à cauſe que les droites AO, MO & VO ſont leurs côtés homologues ; nous aurons PRM. HEV :: AZO — MRO. AZO — VTO : c'eſt-à-dire, PRM. HEV :: AZRM. AZTV. Mais PRM = AZRM (727) : donc HEV = AZTV.

II°. Si le point E (*Fig.* 446), d'où l'on mene les paralleles TV & HL, eſt *entre le diametre RS & le petit axe CD ;* les triangles ſemblables PRM, HEV, donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}$. $\overline{EV}$; & nous aurons auſſi $\overline{RM}$. $\overline{EV}$ :: $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$. $\overline{AO}$ — $\overline{VO}$ :: AZO — MRO. AZO — VTO :: AZRM. AZTV. Donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV : & partant HEV = AZTV, à cauſe de PRM = AZRM.

III°. Si le point E (*Fig.* 447), d'où l'on mene les paralleles, eſt *en deſſous du petit axe CD ;* la tangente AZ, & ſa parellele EV, ne formeront plus un trapézoïde : mais en menant à l'autre extrémité B du grand axe la tangente Bz qui coupe le diametre RS en z, cette tangente formera avec ſa parallele & l'axe & le diametre, le trapézoïde VTzB.

Or, les triangles ſemblables PRM, HEV, donneront toujours PRM. HEV :: $\overline{RM}$. $\overline{EV}$: & nous aurons auſſi $\overline{RM}$. $\overline{EV}$ :: $\overline{AO}$ — $\overline{MO}$.

$\overline{OB}$—$\overline{OV}$ :: AOZ—MRO. OBζ—OVT :: AZRM. VTζB. Donc PRM. HEV :: AZRM. VTζB : & partant HEV=VTζB, à cauſe de PRM=AZRM.

IV°. Si le point E (*Fig.* 448) eſt *de l'autre côté du grand axe*, on aura toujours PRM. HEV :: $\overline{AO}$—$\overline{MO}$. $\overline{AO}$—$\overline{VO}$ :: AZO—MRO. AZO—VTO :: AZRM. AZTV. Donc PRM. HEV :: AZRM. AZTV : & par conſéquent HEV=AZTV ; de même que PRM=AZRM.

V°. Enfin, ſi le point E (*Fig.* 449) eſt *ſur le quart d'ellipſe DB*, je mene par l'autre extrémité B de l'axe la tangente Bζ ; & je trouve encore PRM. HEV :: $\overline{RM}$. $\overline{EV}$ :: $\overline{AO}$—$\overline{MO}$. $\overline{BO}$—$\overline{VO}$ :: AZO—MRO. BOζ—VOT :: AZRM. BVTζ : & par conſéquent HEV=BVTζ ; de même que PRM=AZRM. Ce qu'il falloit démontrer.

Démonstration II. Venons au ſecond triangle, & faiſons voir que TEL=RPHL (*Fig.* 445).

I°. Si le point E eſt *entre l'axe & le diametre*, le triangle fait par les paralleles & le diametre, eſt TEL. Or PRM=AZRM : retranchant donc d'une part le triangle HEV, & de l'autre le trapézoïde AZTV=HEV ; nous aurons PRIH+EVMI=TVMR : & retranchant la partie commune EVMI, nous aurons PRIH=TERI ; & ajoutant de part & d'autre le triangle RIL, nous aurons PRLH=TEL.

II°. Si le point E (*Fig.* 446) eſt *entre le diametre RS & le petit axe CD ;* le triangle fait par les paralleles & le diametre RS, eſt TEL. Par l'autre point *e*, où la parallele EH coupe l'ellipſe, je mene la parallele *tu* à la tangente AZ de l'axe : ce qui donne H*eu* =AZ*tu*, comme on vient de voir.

Or HEV=AZTV : retranchant donc d'une part H*eu*, & de l'autre AZ*tu*, nous aurons *eu*EV=*tu*TV : & retranchant la partie commune *eu*VTL, il reſtera TEL=*te*L. Or *te*L=RPHL : donc TEL=RPHL.

III°. Si le point E (*Fig.* 447) eſt *ſur le quart d'ellipſe CB*, je mene par l'autre extrémité B du grand axe la tangente ζ*p*, juſqu'à ce qu'elle rencontre le diametre RS en ζ', & la tangente prolongée en *p*.

Les triangles rectangles ſemblables AZO, BζO, ſont égaux, à cauſe de OB=AO : & les triangles AZO, PRO, ſont auſſi égaux, à cauſe de la partie commune ORXA & du triangle PAX égal au triangle ZXR (716). Donc PRO=BOζ : & ajoutant la partie

commune R*p*BO, nous aurons P*p*B=R*pχ*. Je retranche de part & d'autre la partie R*p*BVEL ; & il reſte PRLH+HEV=VB*χ*T +LET. Or HEV, étant le triangle fait par les paralleles avec l'axe, eſt égal au trapézoïde VB*χ*T : donc le triangle LET, fait par les paralleles avec le diametre, eſt égal au trapézoïde PRLH.

IV°. Si le point E (*Fig.* 448) eſt *de l'autre côté du grand axe* ſur le quart de l'ellipſe AD, je mene par l'autre extrémité S du diametre RS la tangente *χp*, qui rencontre l'axe prolongé en *p*, & ſa tangente ZA prolongée en *χ*.

Ainſi je démontrerai, comme dans le cas précédent, que *pχ*A =Z*χ*S ; & retranchant la partie commune S*χ*AVEL, il reſtera *p*SLH+HEV=VAZT+LET. Or le triangle HEV, fait par les paralleles & l'axe, eſt égal au trapézoïde VAZT : donc le triangle LET, fait par les paralleles & le diametre, eſt égal au trapézoïde *p*SHL.

V°. Enfin ſi le point E (*Fig.* 449) eſt *dans le quart d'ellipſe DB ;* menant par les extrémités S, B, du diametre & de l'axe, les tangentes S*p*, B*χ*, on démontrera que le triangle LET, fait par les paralleles & le diametre, eſt égal au trapézoïde HLS*p*, de même que nous l'avons démontré à l'égard du triangle LET (*Fig.* 446). Par conſéquent, dans tous les cas poſſibles, TEL=RPHL. Ce qu'il falloit démontrer.

729. COROLLAIRE I. *Toute ligne Ee, terminée de part & d'autre à la courbe de l'ellipſe, & parallele à une tangente RP menée à l'extrémité d'un diametre SR, eſt coupée en deux également en L par ce diametre ; & par conſéquent elle en eſt la double ordonnée* (Fig. 450).

DÉMONSTRATION. Des extrémités E, *e*, de la ligne E*e*, je mene les droites ET, *et*, paralleles à la tangente ZA de l'axe, & qui coupent le diametre prolongé, en T, *t*. Ainſi à cauſe que les droites *et*, *e*L, ſont paralleles aux tangentes AZ, RP ; le triangle *et*L eſt égal au trapézoïde RPHL (728) ; & par la même raiſon, le triangle ETL=RPHL : donc *et*L=ETL. Or ces triangles ſont ſemblables : donc ils ſont parfaitement égaux ; & nous avons *e*L=EL. On démontrera la même choſe, de quelque point E de l'ellipſe que ſoit menée la droite E*e* parallèlement à RP, en obſervant ce qui a été dit ci-deſſus (728).

730. COROLLAIRE II. *Les quarrés des ordonnées ET, IV, à un diametre quelconque RS, ſont entre eux comme les rectangles*

RT × TS, RV × VS, des parties du diametre que les ordonnées coupent (Fig. 451).

Démonstration. Je prolonge les ordonnées juſqu'à ce qu'elles coupent l'axe en *t*, *u*: & des extrémités E, I, je mene des droites EL, IH, paralleles à la tangente de l'axe. Les triangles ſemblables TEL, VIH, donnent $\overline{TE}$. $\overline{VI}$:: TEL. VIH (392).

Or les droites EL, ET, étant paralleles aux tangentes de l'axe & du diametre; nous avons TEL=RP*t*T (728); & par la même raiſon VIH=RP*u*V: donc $\overline{TE}$. $\overline{VI}$ :: RP*t*T. RP*u*V.

Or RP*t*T=RPO—T*t*O, & RP*u*V=RPO—V*u*O; donc $\overline{TE}$. $\overline{VI}$ :: RPO—T*t*O. RPO—V*u*O: & au lieu des triangles RPO, T*t*O, V*u*O, mettant les quarrés $\overline{RO}$, $\overline{TO}$, $\overline{VO}$, qui ſont en même raiſon, à cauſe que les triangles étant ſemblables ſont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues RO, TO, VO; nous aurons $\overline{TE}$. $\overline{VI}$ :: $\overline{RO}$—$\overline{TO}$. $\overline{RO}$—$\overline{VO}$.

Or RS étant diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en T; nous avons $\overline{RO}$—$\overline{TO}$=RT × TS; & par la même raiſon $\overline{RO}$—$\overline{VO}$=RV × VS: donc $\overline{TE}$. $\overline{VI}$ :: RT × TS. RV × VS. On démontrera la même choſe, de quelques points de l'ellipſe que ſoient menées les ordonnées ET, IV, en obſervant ce qui a été dit ci-deſſus (728).

PROPOSITION XV.

731. *Deux diametres MN, RS, étant donnés avec les tangentes au ſommet MX, RX, qui ſe coupent en X; ſi l'on mene la droite RM qui joint les points d'attouchement; & que du point X où les tangentes ſe coupent, on mene par le milieu L de la droite RM, la droite XO; cette droite ſera un diametre, & paſſera, par conſéquent, par le centre O* (Fig. 452).

Démonstration. Pour prouver que XO eſt un diametre, il n'y a qu'à faire voir qu'elle coupera en deux également toutes les droites paralleles à RM, qui ſeront terminées de part & d'autre à la courbe; & la démonſtration s'en fera de même que pour la parabole (662).

732. Remarque. Par le moyen de cette propoſition, tout ce qui a été dit ci-deſſus à l'égard d'un axe & d'un diametre, peut ſe démontrer de même à l'égard de deux diametres (*Fig.* 453).

Soient par exemple les diametres MN, RS, avec leurs tangentes

MT, RP, qui ſe coupent en X. Je mene du ſommet M, la droite MZ, parallele à la tangente RP, & par conſéquent ordonnée au diametre RS (729); & du ſommet R, la droite RH, ordonnée au diametre MN. Je joins les points d'attouchement R, M, par la droite TM; & coupant cette ligne en deux également en L, la droite XL eſt un diametre (731), & paſſe par le centre O. Or, à cauſe que RXME eſt un parallélogramme, & que ſa diagonale RM eſt coupée en deux également en L par la droite XL; il eſt clair que XL prolongé paſſe par l'angle E, & que XE eſt l'autre diagonale.

Les triangles ſemblables OEH, OXM, donnent OH. OM :: OE. OX: & à cauſe des triangles ſemblables OEM, OXP, nous avons OM. OP :: OE. OX: donc OH. OM :: OM. OP. De même les triangles ſemblables OEZ, OXR, donnent OZ. OR :: OE. OX: & à cauſe des triangles ſemblables OER, OXT, nous avons OR. OT :: OE. OX. Par conſéquent OZ. OR :: OR. OT : ce qui fait voir que la ligne OP eſt diviſée aux points H, M, en même raiſon que la ligne OT eſt diviſée aux points Z, R; & que par conſéquent les droites ZH, RM, TP, ſont paralleles.

Donc, I°. un diametre MN étant donné; ſi d'un point R on veut mener une tangente, il faut de ce point mener une ordonnée RH au diametre MN : puis chercher une troiſieme proportionnelle OP, aux droites OH, OM; & le point P ſera le point où la tangente menée par R, coupera le diametre MN. Ainſi c'eſt la même opération à faire à l'égard d'un diametre, qu'à l'égard de l'axe (708).

Donc, II°. les triangles PXM, TXR, faits par les tangentes & par les diametres, ſont égaux. Car à cauſe des paralleles TP, RM; les triangles PRM, TRM, qui ont la baſe commune RM, ſont égaux : & retranchant le triangle commun RXM, il reſtera PXM=TXR.

Donc, III°. le triangle PRH eſt égal au trapézoïde MTRH: Car les triangles PXM, TXR, étant égaux; ſi on ajoute de part & d'autre la partie commune MXRH, on aura PRH=MTRH.

Donc, IV°. ſi d'un point quelconque E (*Fig.* 454), pris ſur la courbe, on mene des droites DL, CF, paralleles aux tangentes; le triangle LEC, fait par ces paralleles & par le diametre MN, eſt égal au trapézoïde MTFC fait par la tangente MT de ce diametre & ſa parallele CF. Car menant par le point R, l'ordonnée RH au diametre; nous aurons PRH=MTRH. Or les triangles PRH,

LEC, étant ſemblables, donnent PRH. LEC :: $\overline{RH}$. $\overline{CE}$ (392): & à cauſe que RH & CE ſont ordonnées au diametre MN; nous avons $\overline{RH}$. $\overline{CE}$ :: MH×HN. MC×CN :: $\overline{MO}$—$\overline{HO}$. $\overline{MC}$—$\overline{CO}$ (730): donc PRH. LEC :: $\overline{MO}$—$\overline{HO}$. $\overline{MC}$—$\overline{CO}$; & au lieu des quarrés $\overline{MO}$, $\overline{HO}$, $\overline{CO}$, mettant les triangles ſemblables MTO, CFO, HRO, qui ſont en même raiſon (392); nous aurons PRH. LCE :: MTO—HRO. MTO—CFO :: MTRH. MTFC. Mais PRH=MTRH: donc LEC=MTFC.

De même le triangle FED, fait par les deux paralleles & le diametre RS, eſt égal au trapézoïde RPLD, fait par la tangente RP de ce diametre & ſa parallele DL. Ce que l'on démontrera de la même façon, en menant du point M, l'ordonnée MZ au diametre RS.

PROPOSITION XVI.

733. *Deux diametres MN, RS, étant donnés, avec leurs tangentes MT, RP; ſi de deux points Q, V, pris ſur la courbe entre ces diametres, on mene des droites QL, QK, VH, VF, paralleles aux tangentes.*

I°. Le trapézoïde ELHV, fait par deux de ces paralleles QL & VH avec le diametre MN & la plus proche des deux autres VF, eſt égal au trapézoïde FEQK, fait par les deux autres paralleles VF, QK, avec l'autre diametre RS & la plus proche QL des deux autres paralleles:

II°. Le trapézoïde QLHY, fait par les paralleles QL & YH avec le diametre MN & la plus éloignée YK des deux autres paralleles, eſt égal au trapézoïde FVYK, fait par les deux autres paralleles VF & YK avec le diametre RS & la plus éloignée YH des paralleles (Fig. 455).

La démonſtration de ceci eſt la même que pour la parabole (666, 667).

PROPOSITION XVII.

734. *Si deux lignes HZ, TV, qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe, ſe coupent dans l'ellipſe; le rectangle HL×LZ des parties de la premiere, eſt au rectangle TL×LV des parties de la ſeconde; comme le quarré de la tangente MX au ſommet du diametre de la premiere, eſt au quarré de la tangente RX au ſommet du diametre de la ſeconde* (Fig. 456, 457, 458).

La

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (668) pour les trois cas repréſentés par les figures 456, 457, 458.

PROPOSITION XVIII.

735. *Si deux ſécantes HZ, HV, partent d'un même point extérieur H; le rectangle de la premiere HZ par ſa partie extérieure HQ, eſt au rectangle de la ſeconde HV par ſa partie extérieure HL; comme le quarré de la tangente RX parallele à la premiere, eſt au quarré de la tangente MX parallele à la ſeconde* (Fig. 459).

Même démonſtration que pour la parabole (669).

PROPOSITION XIX.

736. *Deux diametres ou deux demi-diametres MO, RO, étant donnés avec leurs tangentes MX, RX; ſi l'on mene une double ordonnée VZ à l'un des diametres RO, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre la tangente de l'autre diametre en H; le rectangle HZ×HV de la ligne entiere HZ par la partie extérieure HV, eſt au quarré de la partie HM qu'elle coupe ſur la tangente MX; comme le quarré de la tangente RX de ſon diametre, eſt au quarré de la tangente MX de l'autre diametre* (Fig. 460, 461).

Même démonſtration que pour la parabole (672) pour les deux cas repréſentés par les figures 460, 461.

PROPOSITION XX.

737. *Deux ſegments AMB, CRD, étant donnés; ſi les parties ML, RH, de leurs diametres compriſes dans ces ſegments, ſont entre elles comme leurs diametres ou demi-diametres MO, RO; les plus grands triangles inſcrits dans ces ſegments ſont égaux* (Fig. 462, 463, 464).

DÉMONSTRATION. Je mene les droites RD, MB: ce qui donne des triangles RDH, MBL, qui ſont les moitiés des plus grands triangles inſcrits dans les ſegments; à cauſe qu'ils ont leur ſommet aux ſommets R & M des diametres, & que leurs baſes DH, BL, ſont les moitiés des baſes DC, AB, des ſegments. Ainſi ce que nous dirons des triangles RDH, MBL, ſe dira auſſi des plus grands triangles inſcrits. Or il peut ſe faire, ou que les baſes AB, DC, ſe coupent dans l'ellipſe (*Fig.* 462); ou qu'elles ſe coupent en dehors (*Fig.* 463); ou enfin qu'elles ſe coupent ſur la courbe (*Fig.* 464).

I°. Si les baſes AB, CD, *ſe coupent en dedans* en V (*Fig.* 462); je mene les tangentes MR, RX, aux ſommets des diametres ou demi-diametres MO, RO; la droite RM, qui joint les points d'attouchement; & les droites AC, HL, DB, qui paſſent par les extrémités & par les milieux des baſes AB, CD. Je coupe la droite RM en deux également; & par le point X, où les tangentes ſe rencontrent, & le milieu de RM, je mene la droite XF, laquelle eſt un diametre (731), & paſſe par le centre O.

Or, par la ſuppoſition, nous avons ML. MO :: RH. RO : donc les triangles ROM, HOL, ſont ſemblables; & les baſes RM, HL, ſont paralleles : & comme la baſe RM du triangle RMO eſt coupée en deux également par la droite XO qui paſſe par le ſommet O, la baſe HL du triangle HOL ſera auſſi coupée en deux, également en S par la même droite XO. D'autre part, à cauſe des paralleles RM & HL, & des tangentes RX & XM paralleles aux doubles ordonnées DC, AB; les triangles RXM, HVL, ſont ſemblables : & à cauſe que la droite XF, qui coupe la baſe RM du triangle RXM en deux également & qui paſſe par ſon ſommet X, coupe auſſi la baſe HL du triangle HVL en deux également & fait l'angle XSH égal à l'angle XVR; il faut néceſſairement que cette droite XF paſſe auſſi par le ſommet V du triangle HVL. Ainſi nous avons VL. HV :: XM. RX; & partant $\overline{VL}$. $\overline{HV}$ :: $\overline{XM}$. $\overline{RX}$.

Or à cauſe que les baſes AB & CD des ſegments ſe coupent en dedans de l'ellipſe; nous avons AV × VB. CV × VD :: $\overline{MX}$. $\overline{RX}$ (734): donc AV × VB. CV × VD :: $\overline{VL}$. $\overline{HV}$. Mais à cauſe des baſes AB, CD, diviſées en deux également en L & H, & en deux inégalement en V; nous avons AV × VB = $\overline{AL}$ — $\overline{VL}$, & CV × VD = $\overline{CH}$ — $\overline{HV}$; donc $\overline{AL}$ — $\overline{VL}$. $\overline{CH}$ — $\overline{HV}$ :: $\overline{VL}$. $\overline{HV}$; ou $\overline{AL}$ — $\overline{VL}$. $\overline{VL}$ :: $\overline{CH}$ — $\overline{HV}$. $\overline{HV}$: & compoſant, nous aurons $\overline{AL}$ — $\overline{VL}$ + $\overline{VL}$. $\overline{VL}$ :: $\overline{CH}$ — $\overline{HV}$ + $\overline{HV}$. $\overline{HV}$; c'eſt-à-dire, $\overline{AL}$. $\overline{VL}$ :: $\overline{CH}$. $\overline{HV}$, & partant AL. VL :: CH. HV. D'où il ſuit que les droites HL, AC, ſont paralleles. Or AL = LB, & CH = DH : donc LB. VL :: DH. HV.

Ainſi les droites DB, HL, ſont paralleles; & par conſéquent les quatre lignes AC, RM, HL, DB, ſont paralleles & diviſées chacune en deux également par la droite XF : d'où il ſuit que les trapézoïdes RMBD, RMLH, LHDB, ſont auſſi diviſés chacun

en deux également par la même droite XF. Retranchant donc du trapézoïde RMBD, d'un côté le trapézoïde RVSH, & le trapézoïde HSFD; & de l'autre le trapézoïde VMLS=RVSH, & le trapézoïde LSFB=HSFD; il reſtera d'une part le triangle RHD égal au triangle MLB de l'autre.

II°. Si les baſes AB, CD (*Fig.* 463), ſe coupent en T *hors de l'ellipſe*; je fais la même conſtruction que ci-deſſus, & je démontrerai de la même façon que les droites RM, HL, ſont paralleles entre elles, & coupées en deux également par le diametre XO; que ce diametre paſſe par le point T, & que nous aurons $\overline{TL}.\overline{TH} :: \overline{MX}.\overline{RX}$: à cauſe que les triangles ſemblables LTH, MXR, donnent TL. TH :: MX. RX. Or les ſécantes TB, TD, donnent $TB \times TA.\ TD \times TC :: \overline{MX}.\overline{RX}$: donc $TB \times TA.\ TB \times TC :: \overline{TL}.\overline{TH}$.

Mais $TB \times TA = \overline{TL} - \overline{AL}$; & $TD \times TC = \overline{TH} - \overline{CH}$: donc $\overline{TL} - \overline{AL}.\ \overline{TH} - \overline{CH} :: \overline{TL}.\overline{HT}$; ou $\overline{TL}.\ \overline{TL} - \overline{AL} :: \overline{TH}.\ \overline{TH} - \overline{CH}$: & diviſant, $\overline{TL}.\ \overline{TL} - \overline{TL} + \overline{AL} :: \overline{TH}.\ \overline{TH} - \overline{TH} + \overline{CH}$; c'eſt-à-dire, $\overline{TL}.\overline{AL} :: \overline{TH}.\overline{CH}$: & partant, TL. AL :: TH. CH; ce qui rend les lignes HL, CA, paralleles. Et comme à cauſe de AL=BL, & de CH=HD, nous avons TL. LB :: TH. HD; les lignes DB, HL, ſont auſſi paralleles.

Ainſi les quatre lignes CA, RM, HL, DB, ſont paralleles & diviſées chacune en deux également par le diametre XF: & par conſéquent les trapézoïdes RMDB, RMLH, & HLBD, ſont auſſi diviſés chacun en deux également par ce même diametre. Achevant donc le reſte comme ci-deſſus, nous trouverons auſſi RDH =MBL.

III°. Enfin, ſi les baſes AB, CD (*Fig.* 464), ſe coupent *ſur la courbe*; je fais la même conſtruction: & les droites RM, HL, ſont paralleles & diviſées chacune en deux également par la droite XF. Or AL=LB, & AH=HD: donc AL. AB :: AH. AD. Par conſéquent les droites DB, HL, ſont paralleles & diviſées chacune en deux également par le diametre XF. Ainſi les trapézoïdes RMDB, RMLH, HLBD, ſont auſſi diviſés chacun en deux également par ce même diametre; & partant achevant le reſte comme ci-deſſus, on aura RDH=MBL. Ce qu'il falloit démontrer.

738. DÉFINITION. Un diametre RS étant donné, avec ſa tangente RT; ſi par le centre O on mene un diametre MN parallele

à la tangente, ce diametre MN ſe nomme *diametre conjugué* du diametre RS (*Fig.* 465).

PROPOSITION XXI.

739. *Le quarré d'une ordonnée quelconque HE, à un diametre RS, eſt au rectangle RH × HS des parties de ce diametre qu'elle coupe; comme le quarré du diametre MN conjugué du diametre RS, eſt au quarré du diametre RS* (Fig. 465).

DÉMONSTRATION. Les droites HE, MO, étant ordonnées au diametre RS; nous avons $\overline{EH}$. RH×HS :: $\overline{MO}$. RO×OS (730). Mais RO=OS: donc $\overline{EH}$. RH×HS :: $\overline{MO}$. $\overline{RO}$. Or $\overline{MO}$. $\overline{RO}$ :: $\overline{MN}$. $\overline{RS}$: donc $\overline{EH}$. RH×HS :: $\overline{MN}$. $\overline{RS}$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXII.

740. *Toute ligne EF qui ſe termine de part & d'autre à la courbe, & qui eſt parallele à un diametre RS, eſt coupée en deux également par le diametre MN conjugué du diametre RS* (Fig. 465).

DÉMONSTRATION. Par les extrémités E, F, de la droite EF, je mene au diametre RS les ordonnées EH, FL, leſquelles ſont paralleles & égales entre elles, à cauſe des paralleles EF, RS. Or nous avons $\overline{HE}$. RH×HS :: $\overline{LF}$. RL×LS (730); & $\overline{HE}$=$\overline{LF}$, à cauſe de HE=LF : donc RH×HS=RL×LS. Mais RH×HS =$\overline{RO}$—$\overline{HO}$; & RL×LS=$\overline{SO}$ ou $\overline{RO}$—$\overline{LO}$: donc $\overline{RO}$—$\overline{HO}$ =$\overline{RO}$—$\overline{LO}$; & par conſéquent $\overline{HO}$=$\overline{LO}$ & HO=LO. Mais à cauſe des paralleles HE, MO, LF, & EF, RS; nous avons HO= EV, LO=VF : donc EV=VF. Ce qu'il falloit démontrer.

741. COROLLAIRE. Donc *toutes les paralleles au diametre RS ſont des doubles ordonnées à ſon diametre conjugué MN:* & par conſéquent la tangente TQ, menée par le ſommet M, eſt parallele au diametre RS. D'où il ſuit que le diametre RS eſt le diametre conjugué de ſon conjugué MN; & que le quarré d'une ordonnée quelconque EV au diametre MN, eſt au rectangle MV × VN des parties de ce diametre qu'elle coupe, comme le quarré du diametre RS eſt au quarré du diametre MN.

PROPOSITION XXIII.

742. *Les deux axes AB, CD, & deux diametres conjugués MN, RS, étant donnés; le rectangle PQTV des deux axes, c'eſt-à-dire,*

le rectangle fait par les quatre tangentes des deux axes, eſt égal au parallélogramme des deux diametres, c'eſt-à-dire au parallélogramme XZHL, fait par les tangentes des diametres (Fig. 466).

DÉMONSTRATION. Le ſegment ADB coupé par le grand axe AB, & le ſegment MSN coupé par le diametre MN, ont les parties OD, OS, de leurs diametres, compriſes entre la courbe & leurs baſes AB & MN, proportionnelles à ces mêmes diametres. Car OD. OC :: OS. OR: donc les plus grands triangles ADB, MSN, inſcrits dans ces ſegments, ſont égaux (737). Or le triangle ADB eſt la moitié du rectangle AQTB, de même baſe & de même hauteur; & le triangle MSN eſt la moitié du parallélogramme MHLN: donc le rectangle AQTB eſt égal au parallélogramme MHLN. Par conſéquent le rectangle PQTV, double de AQTB, eſt égal au parallélogramme XZLH double du parallélogramme MHLN. Ce qu'il falloit démontrer.

743. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes; ſi de l'extrémité D du petit axe on mene une ordonnée DV au diametre MN; & que de l'extrémité S de l'autre diametre conjugué RS on mene une ordonnée SL au grand axe AB; je dis que le diametre MN & le grand axe ſeront coupés en même raiſon en V & L par leurs ordonnées DV & SL* (Fig. 467).

DÉMONSTRATION. Je prolonge l'ordonnée DV, juſqu'à ce qu'elle coupe en Y la tangente SY du diametre RS conjugué de MN; & l'ordonnée LS, juſqu'à ce qu'elle coupe en X la tangente DT du petit axe; & je mene DS.

Le triangle ODS eſt la moitié du parallélogramme OVYS de même baſe & de même hauteur; & le même triangle eſt auſſi la moitié du rectangle ODXL: donc le parallélogramme OVYS eſt égal au rectangle ODXL. Or le parallélogramme OMHS étant le quart du parallélogramme des diametres conjugués MN, RS, eſt égal au rectangle ODTB qui eſt le quart du rectangle des deux axes (742): donc les parallélogrammes OMHS, OVYS, ſont entre eux en même raiſon que les rectangles ODTB, ODXL, qui leur ſont égaux chacun à chacun. Mais les parallélogrammes OMHS, OVYS, ayant la hauteur commune OS, ſont entre eux comme leurs baſes OM, OV; & les rectangles ODTB, ODXL, ayant la hauteur commune OD, ſont entre eux comme leurs baſes OB, OL. Donc OM. OV :: OB. OL: & partant OM. OM—OV :: OB. OB—OL, ou OM. MV :: OB. BL: & doublant les antécédents, nous aurons MN. MV :: AB. BL: & enfin diviſant, MN—MV. MV :: AB—BL. BL; ou NV. MV :: AL. BL.

744. Corollaire II. *Posant encore les mêmes choses ; si de l'extrémité M du diametre MN, on mene l'ordonnée MH au petit axe ; & de l'extrémité S de l'autre diametre conjugué, l'ordonnée SL au grand axe ; les deux axes seront coupés proportionnellement aux points H, L* (Fig. 468).

Démonstration. Je prolonge le diametre MN, jusqu'à ce qu'il coupe en T la tangente DT du petit axe ; & du point D je mene l'ordonnée DV à ce diametre. Les triangles semblables ODT, OHM, donnent OD. OH :: OT. OM. Mais à cause de la tangente DT, & de l'ordonnée DV menée du point d'attouchement, nous avons OV. OM :: OM. OT ; ou OT. OM :: OM. OV : donc OD. OH :: OM. OV. Mais OM. OV :: OB. OL (743) : donc OD. OH :: OB. OL.

745. Corollaire III. *Posant encore les mêmes choses ; le quarré de l'ordonnée MH au petit axe, menée du sommet du diametre MN, est égal au rectangle BL × LA des parties du grand axe coupées par l'ordonnée SL menée du sommet du diametre conjugué RS ; & réciproquement, le quarré de l'ordonnée LS est égal au rectangle CH × HD des parties du petit axe que l'ordonnée MH coupe* (Fig. 468).

Démonstration. Les deux axes étant coupés proportionnellement en H & L (744), nous avons DH. DC :: BL. BA, & CH. DC :: AL. AB. Multipliant donc ensemble les termes de ces deux proportions, nous aurons DH × CH. $\overline{DC}^2$ :: BL × AL. $\overline{AB}^2$; ou DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$. Or, par la nature de l'ellipse, nous avons $\overline{LS}^2$. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$: donc $\overline{LS}^2$. BL × AL :: DH × CH. BL × AL ; & partant, à cause des conséquents égaux, nous aurons $\overline{LS}^2$ = DH × CH.

De même nous avons $\overline{HM}^2$. DH × CH :: $\overline{AB}^2$. $\overline{CD}^2$; ou DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: $\overline{CD}^2$. $\overline{AB}^2$. Mais nous avons trouvé DH × CH. BL × AL :: $\overline{DC}^2$. $\overline{AB}^2$: donc DH × CH. $\overline{MH}^2$ :: DH × CH. BL × AL ; & par conséquent $\overline{MH}^2$ = BL × AL.

746. Corollaire IV. *Posant encore les mêmes choses ; les quarrés des diametres conjugués MN, RS, sont ensemble égaux aux quarrés des deux axes pris ensemble* (Fig. 468).

Démonstration. Le triangle rectangle OMH donne $\overline{OM}^2$ = $\overline{OH}^2$ + $\overline{MH}^2$. Mais (745) $\overline{MH}^2$ = BL × AL : donc $\overline{OM}^2$ = $\overline{OH}^2$ + BL ×

AL. De même dans le triangle rectangle OSL, nous avons $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LS}^2$. Mais $LS = CH \times HD$: donc $\overline{OS}^2 = \overline{OL}^2 + CH \times HD$; & partant $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 + BL \times AL + \overline{OL}^2 + CH \times HD$. Mais à cauſe que l'axe AB eſt diviſé en deux également en O, & en deux inégalement en L ; nous avons $BL \times AL + \overline{OL}^2 = \overline{BO}^2$; & par la même raiſon, $CH \times HD + \overline{OH}^2 = \overline{OD}^2$: donc $\overline{OM}^2 + \overline{OS}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OD}^2$. Donc, &c.

747. COROLLAIRE V. *Si des extrémités M, R, des diametres conjugués MN, RS, on mene des ordonnées au grand axe ; le rectangle AF × FB des parties que l'une des ordonnées coupe, eſt égal au quarré de la diſtance LO de l'autre ordonnée au centre O* (Fig. 469).

DÉMONSTRATION. Du point M, je mene au petit axe l'ordonnée MV ; & par conſéquent le quarré de cette ordonnée eſt égal au rectangle AF × FB. Mais MV = LO : donc $\overline{LO}^2 = AF \times FB$. On prouvera de même que $\overline{FO}^2 = AL \times LB$.

PROPOSITION XXIV.

748. *Il y a toujours deux diametres conjugués égaux dans une ellipſe ; & tous les autres diametres conjugués ſont inégaux* (Fig. 470).

DÉMONSTRATION. Soit l'ellipſe ADCB, dont le grand axe eſt AB, & le petit eſt CD. Je joins les extrémités de ces axes par les droites AD, DB, BC, AC : ce qui me donne un parallélogramme ABCD, dont les quatre côtés ſont égaux.

I°. Je mene par le centre O la droite NM parallele au côté CA : ce qui diviſe le parallélogramme ABCD en deux parallélogrammes égaux AHCL, HDBL. Car les triangles ſemblables AOH, BOL, ſont égaux, à cauſe du côté AO égal au côté OB : par la même raiſon les triangles ſemblables AOC, DOB, ſont égaux ; & les triangles ſemblables COL, HOD, le ſont auſſi, à cauſe du côté CO égal au côté OD. Ainſi les parallélogrammes AHCL, HDBL, étant compoſés d'un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, ſont égaux entre eux. Or ces parallélogrammes étant entre les paralleles AD, CB, ont la même hauteur : donc la baſe CL doit être égale à la baſe LB ; & par la même raiſon, nous avons AH = HD : donc MN diviſe en deux également les deux droites CB, AD, paralleles entre elles, & qui ſe terminent de part

& d'autre à la courbe ; & par conſéquent MN eſt un diametre.

On prouvera de la même façon que ſi du centre O, on mene une ligne RS parallele au côté AD du parallélogramme ABCD, cette ligne RS ſera auſſi un diametre, lequel ſera conjugué du diametre MN ; à cauſe qu'il eſt parallele aux ordonnées AH, CL, de ce diametre. Or, les lignes AD & AC étant égales, leurs moitiés AH & AP le ſont auſſi : & par conſéquent le parallélogramme AHOP eſt compoſé de quatre côté égaux. D'où il ſuit que les triangles AHO, APO, qui ont le côté AO commun, & les côtés AH, OH, égaux entre eux, & aux côtés AP, PH, ſont parfaitement égaux ; & que l'angle AOH eſt égal à l'angle AOP.

Concevant donc que la demi-ellipſe ADB ſoit miſe ſur ſon égale ACB, en ſorte que l'angle droit AOD tombe ſur l'angle droit AOC ; la courbe ADB tombera ſur la courbe ACB ; l'angle AOM ſur ſon égal AOR ; & le côté OM ſera égal au côté OR. Or MN eſt double de ON (*696*), & OR double de RS : donc les diametres conjugués MN, RS, ſont égaux.

II°. Maintenant concevons deux autres diametres conjugués quelconques différents des diametres conjugués & égaux MN, RS, que nous venons de trouver (*Fig.* 471). L'un des deux coupera les quarts d'ellipſe AC, ou entre R & A, ou entre R & C (*Fig.* 471).

Suppoſons qu'il le coupe entre R & A, en T ; & que ce diametre ſoit la droite TV, qui par conſéquent eſt plus grande que RS (705). Je mene par les points R, T, les tangentes RX, TZ ; leſquelles ſe couperont en quelque point Y, entre les points d'attouchement R, T (710). C'eſt pourquoi ſi je prolonge la tangente YTZ, & le diametre NM parallele à la tangente RX ; la tangente YZL coupera en L le diametre NM ; & l'angle QZL, extérieur au triangle ZOL, ſera plus grand que l'angle intérieur AOL. Or le diametre HP, conjugué du diametre TV, étant parallele à la tangente TZ ; les angles QZL, QOH, du même côté, ſont égaux : donc l'angle QOH ou AOH eſt plus plus grand que l'angle QOL ou ZOL ou AOM ; & par conſéquent MO eſt plus grand que HO (705), & MN plus grand que HP. Or TV eſt plus grand que RS ou que ſon égal MN : donc à plus forte raiſon TV eſt plus grand que ſon conjugué HP.

On prouvera de même que ſi l'un des diametres conjugués paſſe entre R & C, auquel cas il ſera moindre que RS, ſon conjugué ſera plus grand que MN égal à RS.

749. COROLLAIRE I. *Les deux diametres conjugués & égaux MN, RS, étant donnés dans une ellipſe ; le quarré d'une ordonnée quelconque PH à l'un de ces diametres MN, eſt égal au rectangle MH×HN des parties de ce diametre que l'ordonnée coupe* (Fig. 472).

DÉMONSTRATION. Nous avons $\overline{PH}$. MH×HN :: $\overline{RS}$. $\overline{MN}$. Or, à cauſe de RS=MN ; nous avons auſſi $\overline{RS}=\overline{MN}$: donc $\overline{PH}$ =MH×HN.

750. COROLLAIRE II. *La propriété de l'ellipſe, à l'égard des diametres conjugués, eſt donc la même que celle du cercle :* & il n'y a de différence qu'en ce que dans le cercle l'ordonnée eſt toujours perpendiculaire à ſon diametre ; au lieu que dans l'ellipſe l'angle PHM (*Fig.* 472), fait par l'ordonnée avec l'un des deux diametres conjugués & égaux, eſt toujours aigu ; car cet angle eſt égal à l'angle ROM, fait par les deux diametres. Or, l'angle ROM (*Fig.* 470) eſt égal à l'angle CBD du parallélogramme ADBC ; & l'angle CBD eſt aigu, comme je vais le démontrer : donc l'angle PHM (*Fig.* 472) eſt auſſi aigu.

Pour montrer donc que l'angle CBD (*Fig.* 470) eſt aigu ; il n'y a qu'à obſerver que les deux triangles iſoſceles CBD, ACB, ont les côtés CB, BD, égaux chacun à chacun aux côtés AC, CB. Or la baſe CD du premier eſt moindre que la baſe AB du ſecond : donc l'angle CBD eſt moindre que l'angle ACB. Or dans le parallélogramme ACBD, les deux angles CBD, ACB, valent enſemble deux droits : donc CBD vaut moins d'un droit, & ACB en vaut davantage.

PROPOSITION XXV.

751. *L'axe & un diametre, ou deux diametres MN, HL, qui ne ſont pas conjugués entre eux, étant donnés ; ſi par les extrémités de ces diametres on mene quatre tangentes TR, PE, & TP, RE, qui ſe coupent en T, R, E, P ; les deux tangentes TR, PE, menées par les extrémités du diametre MN, ſeront coupées en M & N chacune en deux parties égales chacune à chacune ; c'eſt-à-dire, TM=NE, & MR=NP : & de même les deux tangentes TP, RE, ſeront auſſi coupées chacune en deux parties égales chacune à chacune* (Fig. 473).

DÉMONSTRATION. Je mene les droites HM, NL, qui joignent les extrémités des deux diametres : & à cauſe que MO. MN ::

HO. HL; les droites HM, NL, ſont paralleles entre elles. Du point T, où les tangentes HT, MT, ſe coupent; je mene par le milieu S de la droite HM, la ligne TE qui eſt un diametre (731), & qui par conſéquent coupe auſſi en deux également la droite NL parallele à HM. D'où il ſuit que ce diametre eſt le même que celui que l'on meneroit du point E, où les deux tangentes NE, EL, ſe coupent, par le milieu Z de la droite NL qui joint les points d'attouchement N, L.

Or, les tangentes TR, PE, étant paralleles entre elles, à cauſe qu'elles doivent être paralleles aux ordonnées du diametre MN; il eſt clair que les triangles TMO, NOE, ſont ſemblables, & de plus égaux, à cauſe du côté MO égal au côté NO: donc TM=NE. Mais TR=PE, à cauſe du parallélogramme TREP: donc TR=TM, ou MR=PN.

De même les triangles ſemblables HTO, EOL, ayant le côté HO égal au côté OL, ſont parfaitement égaux; & par conſéquent HT =EL. Or PT=ER: donc PH=LR. Ce qu'il falloit démontrer.

752. COROLLAIRE. *Poſant les mêmes choſes; je dis que le rectangle TM×MR des deux parties de la tangente TR au ſommet M du diametre MN, eſt égal au quarré du demi-diametre OZ conjugué de MN; & que le rectangle TH×HP des parties de la tangente TP au ſommet H du diametre HL, eſt égal au quarré du demi-diametre OE conjugué de HL* (Fig. 474).

DÉMONSTRATION. Je prolonge la tangente PT juſqu'à ce qu'elle rencontre le diametre MN prolongé en B: & du point d'attouchement menant l'ordonnée HC au diametre MN, j'ai OC. OM :: OM. OB (732); ou OB. OM :: OM. OC: donc OB—OM. OB :: OM—OC. OM; c'eſt-à-dire, BM. OB :: MC. MO; ou BM. MC :: BO. MO: & partant BM. BM+MC :: BO. BO+MO; c'eſt-à-dire, BM. BC :: BO. BO+MO. Mais à cauſe de MO=ON, nous avons BO+MO=BO+ON=BN: donc BM. BC :: BO. BN.

Or les triangles BMT, BCH, BOX, BNP, étant ſemblables; leurs baſes TM, HC, XO, PN, ſont en même raiſon que les côtés BM, BC, BO, BN: donc TM. HC :: XO. PN, & partant TM×PN =HC×XO. Mais en menant du point d'attouchement H l'ordonnée HQ au demi-diametre conjugué OZ, laquelle ſera parallele à MN; nous aurons QQ. OZ :: OZ. OX; & à cauſe des paralleles HQ, CO, les paralleles HC, QO, ſont égales: donc HC. OZ :: OZ. OX; d'où je tire HC×OX=$\overline{OZ}$, & par conſéquent TM×PN=$\overline{OZ}$.

Mais PN=MR (751) : donc TM×MR=$\overline{OZ}$: & on démontrera de la même façon que TH×HP=$\overline{OE}$.

753. REMARQUE. De ce qui vient d'être dit dans le Corollaire précédent, nous tirerons d'abord cette Regle ou ce Théorême.

I°. *Si une ligne droite OB eſt diviſée en C & M, de façon qu'on ait OC. OM :: OM. OB ; & qu'on lui ajoute du côté de O une droite ON égale à la moyenne proportionnelle OM ; on aura BM. BC :: BO. BN.* Car c'eſt ce que nous venons de trouver dans ce Corollaire : & de ce premier Théorême, j'en tire un ſecond qui n'eſt pas moins important ; ſavoir :

II°. *Si une ligne OB eſt diviſée en C & M, de façon qu'on ait OC. OM :: OM. OB ; & qu'on lui ajoute du côté de O une droite ON égale à la moyenne proportionnelle OM ; la ligne entiere OB ſera diviſée harmoniquement aux points M, C, & l'on aura BM. MC :: BN. CN.* Ce que je prouverai ainſi (*Fig.* 474).

Par la ſuppoſition, nous avons OC. OM :: OM. OB ; ou OB. OM :: OM. OC : donc BO—OM. OM :: OM—OC. OC ; c'eſt-à-dire, BM. OM :: MC. OC ; ou BM. MC :: OM. OC. De même, à cauſe de BO. OM :: OM. OC, nous avons BO+OM. OM :: OM +OC. OC. Mais OM=ON : donc BN. OM :: CN. OC ; ou BN. CN :: OM. OC. Mais nous venons de trouver BM. MC :: OM. OC : donc BM. MC :: BN. CN. Et de là il eſt aiſé de prouver l'inverſe de ce ſecond Théorême : c'eſt-à-dire que,

III°. *Si une ligne BN eſt diviſée harmoniquement aux points M, C, & qu'on diviſe la ſomme MN de deux de ſes parties de ſuite NC, CM, en deux également en O ; on aura toujours OC. OM :: OM. OB ; & BM. BC :: BO. BN.* Car puiſque BM. MC :: BN. CN : donc BN. BM :: CN. MC ; & partant BN+BM. BM :: CN +MC. MC. Or BN=NM+MB ; & CN+MC=MN : donc NM+2BM. BM :: MN. MC ; & prenant les moitiés des antécédents, nous aurons OM+MB. BM :: OM. MC ; ou OB. BM :: OM. MC. Donc OB—BM. OB :: OM—MC. OM : c'eſt-à-dire, OM. OB :: OC. OM ; ou OC. OM :: OM. OB. Après quoi, à cauſe de ON, égal à la moyenne proportionnelle ; on aura, comme ci-deſſus, BM. BC :: BO. BN.

754. PROBLÊME. *Une ellipſe ACBD étant donnée, trouver ſon centre, ſes deux axes, & ſes foyers* (Fig. 475).

SOLUTION. Je mene des lignes HL, PQ, &c. paralleles entre

elles, & qui ſe terminent de part & d'autre à la courbe. Je les diviſe chacune en deux également aux points R, S, &c: & faiſant paſſer une ligne droite MN par les points R, S, &c; cette ligne eſt un diametre: par conſéquent le point O, qui coupe cette ligne MN en deux également, eſt le centre; & ſi les droites HL, PQ, &c. ſont perpendiculaires ſur MN; cette droite MN ſera l'un ou l'autre des deux axes.

Mais ſi cela n'eſt pas, je décris du centre O un cercle qui coupe la courbe en quelque point T. Ainſi le rayon OT de ce cercle eſt moindre que le demi grand axe; car le cercle qui a pour rayon le demi grand axe, eſt circonſcrit à l'ellipſe, & ne la coupe point: & ce même rayon OT eſt plus grand que le demi petit axe, à cauſe que le cercle, qui auroit pour rayon le demi petit axe, eſt inſcrit, & ne coupe pas non plus la courbe: donc le cercle du rayon OT doit couper l'ellipſe en quatre points T, X, Z, Y (707). Je mene par ces quatre points les droites TX, XZ, ZY, YT; & les coupant chacune en deux également, je mene par les points de diviſion les droites AB, DC, qui ſe terminent à la courbe; & ces deux droites ſont les deux axes (707). Par conſéquent la plus grande AB eſt le grand axe, & l'autre eſt le petit.

Je prends avec le compas la grandeur AO du demi grand axe; & de l'extrémité D du petit axe, je décris un arc qui coupe le grand axe aux points F, V, qui ſont les foyers (719).

755. PROBLÊME I. *Meſurer une ellipſe* (Fig. 476).

SOLUTION. Je décris le cercle circonſcrit que je meſure, de même que l'axe & le petit axe. Après quoi, je dis par Regle de Trois: le grand axe eſt au petit axe, comme le cercle circonſcrit eſt à un quatrieme terme qui ſera la valeur de l'ellipſe. Car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle AEB eſt à la ſomme des ordonnées correſpondantes au grand axe de la demi-ellipſe ADB, comme le grand axe eſt au petit axe (703); il en clair que le cercle entier eſt à l'ellipſe entiere auſſi, comme le grand axe eſt au petit axe.

Ou bien je décris le cercle inſcrit que je meſure; & je dis par Regle de Trois: le petit axe eſt au grand, comme le cercle inſcrit eſt à un quatrieme terme qui ſera l'ellipſe. Car puiſque la ſomme des ordonnées du demi-cercle CRD, ou le demi-cercle CRD, eſt à la ſomme des ordonnées au petit axe CD de la demi-ellipſe CAD, ou à la demi-ellipſe CAD, comme le petit axe eſt au grand axe (703; il s'enſuit que le cercle entier inſcrit CRDT eſt à l'ellipſe entiere, comme le petit axe eſt au grand.

Ou bien encore, je prends les valeurs en nombre du cercle circonſcrit & du cercle inſcrit; & le nombre moyen proportionnel géométrique entre ces deux nombres eſt la valeur de l'ellipſe (703): c'eſt-à-dire qu'en multipliant les valeurs des deux cercles l'une par l'autre, & tirant la racine quarrée du produit, cette racine ſera l'ellipſe.

756. PROBLÊME II. *Meſurer un ſegment d'ellipſe* r*AR coupé par une double ordonnée* r*R au grand axe* (Fig. 477).

SOLUTION. Je décris le cercle circonſcrit ANB*n*, & je prolonge *r*R de part & d'autre juſqu'à ce qu'elle coupe la circonférence du cercle en *n*, N: ce qui me donne le ſegment de cercle *n*AN, que je meſure. Enſuite je dis par Regle Trois: le grand axe eſt au petit, comme le ſegment de cercle *n*AN eſt à un quatrieme terme qui ſera le ſegment *r*AR. Car chaque ordonnée HT du demi-ſegment circulaire ANM, eſt à chaque ordonnée HS du demi-ſegment elliptique ARM, comme OE, OC; ou comme le grand axe au petit axe (689): donc la ſomme des ordonnées au demi-ſegment circulaire, ou le demi-ſegment ANM, eſt à la ſomme des ordonnées au demi-ſegment ARM, ou au demi-ſegment ARM, comme le grand axe eſt au petit axe; & par conſéquent le ſegment entier *n*AN eſt au ſegment entier *r*AR, dans la même raiſon.

757. PROBLÊME III. *Meſurer un ſecteur elliptique* r*ARO dont la corde* r*R eſt double ordonnée au grand axe* (Fig. 477).

SOLUTION. Je prolonge la corde *r*R juſqu'à ce qu'elle coupe de part & d'autre la circonférence du cercle circonſcrit en *n*, N; & de ces points, je mene au centre O des droites *n*O, NO: ce qui me donne un ſecteur de cercle *n*ANO que je meſure. Enſuite je dis par Regle de Trois: le grand axe eſt au petit, comme le ſecteur circulaire *n*ANO eſt à un quatrieme terme qui ſera le ſecteur elliptique *r*ARO. Car le demi-ſegment circulaire ANM eſt au demi-ſegment elliptique ARM, comme le grand axe eſt au petit (756); & les triangles MNO, MRO, ayant la hauteur commune, ſont entre eux comme leurs baſes MN, MR, ou comme OE eſt à OC, ou enfin, comme le grand axe au petit. Donc le demi-ſegment ANM, plus le triangle MNO, c'eſt-à-dire, le demi-ſecteur circulaire ANO, eſt au demi-ſegment ARM, plus le triangle MRO, c'eſt-à-dire au demi-ſecteur ARO; comme le grand axe au petit: & par conſéquent le ſecteur entier *n*ANO eſt au ſecteur entier *r*ARO; comme le grand axe eſt au petit.

758. REMARQUE. Si le ſegment elliptique *r*CR (*Fig.* 478) étoit

fait par une double ordonnée *r*R au petit axe, on décriroit le cercle inſcrit C*n*DN, & l'on diroit par Regle de Trois : le petit axe eſt au grand, comme le ſegment circulaire NC*n* eſt à un quatrieme terme qui ſeroit le ſegment elliptique *r*CR. De même pour avoir le ſecteur *r*CRO, on diroit par Regle de Trois : le petit axe eſt au grand axe, comme le ſecteur circulaire *n*CNO eſt à un quatrieme terme qui ſeroit le ſecteur *r*CRO. Ce qui ſe démontre aiſément, puiſque toutes les ordonnées au demi-ſegment circulaire C*n*M ſont aux ordonnées du demi-ſegment elliptique C*r*M, comme le petit axe eſt au grand (702), & que le triangle M*n*O eſt au triangle M*r*O, comme M*n* eſt à M*r*, ou comme le petit axe eſt au grand.

759. PROBLÊME IV. *Meſurer un ſegment elliptique HRL, coupé par une baſe HL oblique au grand axe & au petit* (Fig. 479).

SOLUTION. Je coupe le grand axe AB en Z, en même raiſon que le diametre RS de la baſe du ſegment donné eſt coupé en T; c'eſt-à-dire, je fais RS. RT :: BA. BZ : & menant par le point Z une double ordonnée M*n*, le ſegment MB*n* ſera égal au ſegment donné HRL; & par conſéquent il n'y aura qu'à meſurer le ſegment MB*n*, comme ci-deſſus (756); & ſa valeur ſera la même que celle du ſegment HRL; ce que je démontre ainſi.

Je conçois que la hauteur BZ du ſegment MB*n* ſoit coupée en une infinité de parties égales; & que par les points de diviſion ſoient menées des doubles ordonnées des extrémités de chacune deſquelles ſoient élevées des petites perpendiculaires; ce qui donnera des petits rectangles circonſcrits, qui auront tous une hauteur infiniment petite & égale à ZX.

Je conçois de même que la partie RT du diametre RS ſoit coupée en un même nombre de petites parties, qui par conſéquent ſeront proportionnelles aux petites parties de BZ; & que par les points de diviſion ſoient menées des doubles ordonnées à RT, aux extrémités deſquelles ſoient menées des petites lignes paralleles à RT; ce qui donnera autant de parallélogrammes circonſcrits au ſegment HRL, que de rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*. Du ſommet R du diametre RS, j'abaiſſe ſur la baſe HL du ſegment HRL, la perpendiculaire RK, laquelle ſera coupée par les doubles ordonnées du ſegment HRL en parties égales & proportionnelles aux parties de RT, & par conſéquent proportionnelles aux parties de BZ : ainſi les hauteurs des parallélogrammes circonſcrits au ſegment HRL, ſeront égales entre elles, & à la hauteur EK du premier de ces parallélogrammes. Or les hauteurs des pa-

rallélogrammes étant infiniment petites, il eſt clair que la ſomme de ces parallélogrammes ne différera pas du ſegment HRL : de même que la ſomme des rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*, ne différera pas de ce ſegment. Si je fais donc voir que les parallélogrammes circonſcrits au ſegment HRL, ſont enſemble égaux aux rectangles circonſcrits au ſegment MB*n* ; il s'enſuivra néceſſairement que les deux ſegments ſont égaux.

A cauſe que l'axe & le diametre ſont coupés proportionnellement, nous aurons BZ. BA :: RT. RS ; & ZA. BA :: TS. RS : & multipliant les termes de ces deux proportions les unes par les autres, nous aurons BZ×ZA. $\overline{BA}^2$ :: RT×TS. $\overline{RS}^2$; ou BZ×ZA. RT×TS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$. Par un ſemblable raiſonnement, nous trouverons BX×XA. RQ×QS :: $\overline{BA}^2$. $\overline{RS}^2$; & par conſéquent nous aurons BZ×ZA. RT×TS :: BX×XA. RQ×QS ; ou BZ×ZA. BX×XA :: RT×TS. RQ×QS ; & mettant au lieu des deux premiers termes BZ×ZA, & BX×XA, les quarrés $\overline{MZ}^2$, $\overline{VX}^2$, qui ſont en même raiſon ; & au lieu des deux derniers termes RT×TS, RQ×QS, les quarrés $\overline{HT}^2$, $\overline{FQ}^2$, qui ſont auſſi en même raiſon ; nous aurons $\overline{MZ}^2$. $\overline{VX}^2$ :: $\overline{HT}^2$. $\overline{FQ}^2$. D'où l'on tire MZ. VX :: HT. FQ : & par conſéquent M*n*. V*u* :: HL. F*f* ; c'eſt-à-dire, les baſes des rectangles circonſcrits au ſegment MB*n* ſont entre elles, comme les baſes des parallélogrammes circonſcrits au ſegment HRL.

Maintenant le petit rectangle fait ſur la baſe M*n*, eſt M*n*×ZX ; & le petit parallélogramme fait ſur la baſe HL, eſt HL×EK. Or ZX. ZB :: EK. RK : multipliant donc les termes de la premiere raiſon ZX. ZB par M*n* ; & les termes de la ſeconde raiſon EK. RK par HL ; nous aurons M*n*×ZX. M*n*×ZB :: HL×EK. HL×RK ; ou M*n*×ZX. HL×EK :: M*n*×ZB. HL×RK, c'eſt-à-dire, le petit rectangle fait ſur M*n*, eſt au petit parallélogramme fait ſur HL ; comme le rectangle M*n*×ZB, eſt au rectangle HL×RK. De même le petit rectangle fait ſur V*u*, eſt V*u*×ZX ; & le petit parallélogramme fait ſur F*f*, eſt F*f*×EK : or V*u*. E*f* :: M*n*. HL ; & ZX. EK :: ZB. BK : multipliant donc enſemble les termes de ces deux proportions, nous aurons V*u*×ZX. F*f*×EK :: M*n*×ZB. HL×RK.

Ainſi le petit rectangle & le petit parallélogramme ſont encore entre eux comme le rectangle M*n*×ZB eſt au parallélogramme HL×RK ; & comme on trouvera toujours la même choſe, en comparant chaque petit rectangle circonſcrit au ſegment MB*n*, à chaque petit parallélogramme circonſcrit au ſegment HRL ; il

s'enſuit que la ſomme des petits rectangles circonſcrits au ſegment MB*n*, c'eſt-à-dire le ſegment MB*n*, eſt à la ſomme des petits parallélogrammes circonſcrits au ſegment HLR, c'eſt-à-dire au ſegment HRL; comme le rectangle M*n* × ZB, eſt au rectangle HL × RK. Mais le rectangle MN × ZB eſt double du plus grand triangle MB*n* inſcrit au ſegment MB*n*; & le rectangle HL × RK eſt double du plus grand triangle HRL inſcrit au ſegment: donc ces deux triangles inſcrits MB*n*, HRL, ſont entre eux comme les ſegments. Or les deux triangles MB*n*, HRL, ſont égaux (737): donc les deux ſegments MB*n*, HRL, ſont auſſi égaux.

760. PROBLÊME V. *Meſurer un ſecteur elliptique HRLOH, dont la corde HL eſt oblique aux deux axes* (Fig. 479).

SOLUTION. Je coupe le grand axe en Z, en même raiſon que le diametre RS de la corde HL du ſecteur eſt coupée en T. Je mene par Z, la double ordonnée M*n* au grand axe; & du centre O, je mene les droites MO, *n*O: ce qui me donne un ſecteur MO*n*BM égal au ſecteur HRLOH. Ainſi meſurant MO*n*BM, comme ci-deſſus (759); ſa valeur ſera celle du ſecteur HRLOH.

Car menant la droite OI perpendiculaire ſur HL, cette droite ſera la hauteur du triangle HOL; & la hauteur du triangle MO*n* ſera la droite OZ. Or, à cauſe que l'axe & le diametre ſont coupés en deux également en O, & proportionnellement en T & Z; nous aurons, BZ. ZO :: RT. TO: & à cauſe des triangles ſemblables RTK, TOI; nous avons RT. TO :: RK. OI: donc BZ. ZO :: RK. OI; ou BZ. RK :: ZO. OI.

Or les plus grands triangles MB*n*, HRL, inſcrits dans les ſegments MB*n*, HRL, étant égaux (737), ont les baſes réciproques à leurs hauteurs: donc M*n*. HL :: RK. ZB, ou ZB. RK :: HL. M*n*: & partant ZO. OI :: HL. M*n*; d'où l'on tire ZO × M*n* = HL × OI.

Or ZO × M*n* eſt le double du triangle MO*n*; & HL × OI eſt le double du triangle HLO: donc ces deux triangles ſont égaux. Or les deux ſegments B*n*M, HRL, ſont auſſi égaux (759): donc les deux ſecteurs MO*n*B, HOLR, le ſont auſſi.

PROPOSITION XXVI.

761. *Si l'on fait paſſer un cercle par les extrémités C & D du petit axe, & par l'une des extrémités A du grand axe; la portion de circonférence CHD qui ſera du côté de l'autre extrémité B du grand axe, ſera toute entiere dans l'ellipſe, & l'autre portion CNAD ſera toute entiere hors de l'ellipſe* (Fig. 480).

DÉMONSTRATION.

DÉMONSTRATION. A cauſe que dans le cercle la droite CD eſt coupée en deux également en O, par la droite OH qui lui eſt perpendiculaire ; la droite OH eſt partie du diametre du cercle : & par conſéquent, CO étant une ordonnée à ce diametre, nous avons AO. OC :: OC. OH. Mais AO eſt plus grande que CO : donc à plus forte raiſon eſt-elle plus grande que OH ; & par conſéquent OH étant moindre que OB=AO, le point H eſt dans l'ellipſe.

Je mene par le ſommet A, la droite AT perpendiculaire au grand axe AB & égale à ſon parametre : ainſi AT ſera moindre que AB, puiſque le parametre du grand axe eſt troiſieme proportionnelle au grand axe & au petit (*691*). De l'extrémité T du parametre, je mene la droite TB à l'autre extrémité B du grand axe ; & du point H je mene la droite indéfinie HK qui paſſe par le point G où la droite TB coupe le petit axe. Il eſt viſible par cette conſtruction, que la partie HG de la droite HK eſt toute entiere dans le triangle TBA, & que ſon autre partie GK eſt toute entiere hors de ce triangle. Cela poſé :

I°. La droite CO étant ordonnée au diametre AH du cercle, nous avons $\overline{CO}^2$=AO×OH ; & la même droite CO étant auſſi ordonnée au grand axe, nous avons $\overline{CO}^2$=AO×OG (*693*) : donc AO×OH =AO×OG ; & partant OH=OG. Je conçois que de tous les points de la partie OH de l'axe, ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ : nous aurons, par la propriété de l'ellipſe, $\overline{PE}^2$=AP×PV (*693*) ; & par la propriété du cercle, $\overline{PQ}^2$=AP×PH. Or les triangles ſemblables GOH, ZPH, donnent GO. OH :: ZP. PH ; & nous venons de trouver GO=OH ; donc ZP=PH. Mais ZP eſt moindre que VP ; à cauſe que la droite GH étant toute entiere dans le triangle OGB, la droite ZP ne peut couper GB ſans être prolongée : donc PH eſt auſſi moindre que PV ; & par conſéquent AP×PH ou $\overline{PQ}^2$ eſt moindre que AP×PV ou $\overline{PE}^2$. D'où il ſuit que l'ordonnée PQ du cercle eſt moindre que l'ordonnée PE de l'ellipſe. Et comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipſe, qui paſſeront par la droite HO ; il s'enſuit que l'arc CHD du cercle eſt tout entier dans l'ellipſe.

II°. Je conçois de même que de tous les points de la partie AO du grand axe, ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN : nous aurons par la propriété de l'ellipſe, $\overline{MR}^2$=AM×MS (*693*) ; & par celle du

cercle, $\overline{MN}^2 = AM \times MH$. Or les triangles ſemblables GOH, XMH, donnent GO. OH :: XM. MH : donc XM = MH, à cauſe de GO = OH. Mais XM eſt plus grand que SM, à cauſe que GK eſt tout entier hors du triangle TAB : donc MH eſt auſſi plus grand que SM ; & par conſéquent, $AM \times MH$, ou $\overline{MN}^2$, eſt plus grand que $AM \times MS$ ou $\overline{MR}^2$. D'où il ſuit que l'ordonnée MN au cercle eſt plus grande que l'ordonnée MR à l'ellipſe. Et comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipſe, que l'on menera de tous les points de AO de part & d'autre ; il s'enſuit que l'arc de cercle CAD eſt tout entier hors de l'ellipſe. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVII.

762. *Si l'on fait paſſer un cercle par les extrémités A & B du grand axe, & par l'une des extrémités D du petit axe, la portion AHB de circonférence qui ſera du côté de l'autre extrémité C du petit axe, ſera toute entiere hors de l'ellipſe ; & l'autre portion ADB ſera toute entiere dans l'ellipſe* (Fig. 481).

Démonstration. A cauſe que dans le cercle la droite AB eſt coupée en deux également en O, par la droite HD qui lui eſt perpendiculaire ; la droite HD eſt le diametre du cercle. Ainſi AO étant ordonnée à ce diametre ; nous avons DO. OA :: OA. OH. Mais DO eſt moindre que OA : donc à plus forte raiſon eſt-il moindre que HO ; & par conſéquent HO étant plus grand que CO = DO, le point H eſt hors de l'ellipſe.

Je mene par le point D, la droite DT perpendiculaire au petit axe & égale à ſon parametre. Ainſi DT ſera plus grand que le petit axe DC, à cauſe que le parametre du petit axe eſt troiſieme proportionnelle au petit axe & au grand (691). De l'extrémité T du parametre, je mene la droite TC à l'autre extrémité du petit axe ; & du point H, la droite indéfinie HK qui paſſe par le point G où la droite TC coupe le grand axe prolongé s'il le faut. Il eſt viſible que la partie GK de HK ſera toute entiere dans le triangle CTD ; & que ſon autre partie HG ſera toute entiere hors de ce triangle. Cela poſé :

1°. La droite AO étant ordonnée au cercle, donne $\overline{AO}^2 = DO \times OH$; & la même droite étant ordonnée au petit axe de l'ellipſe, nous avons $\overline{AO}^2 = DO \times OG$ (701) : donc $DO \times OH = DO \times OG$; & partant OH = OG. Je conçois que de tous les points de OC

ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que PE, & des ordonnées au cercle telles que PQ : nous aurons par la propriété de l'ellipſe, $\overline{PE}=DP\times PV$; & par celle du cercle, $\overline{PQ}=DP\times PH$. Or, les triangles ſemblables GOH, ZPH, donnent GO. OH :: ZP. PH : donc ZP=PH, à cauſe de GO=OH. Mais ZP eſt plus grand que PV, à cauſe que HG eſt toute entiere hors du triangle TDC, dans lequel VP eſt renfermé : donc PH eſt auſſi plus grand que PV ; & par conſéquent $DP\times PH$ ou $\overline{PQ}$ eſt plus grand que $DP\times PV$ ou $\overline{PE}$. D'où il ſuit que l'ordonnée PQ du cercle eſt plus grande que l'ordonnée PE de l'ellipſe : & comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées au cercle & à l'ellipſe, menées de tous les points de OC de part & d'autre ; il s'enſuit que l'arc du cercle AHB eſt tout entier hors de l'ellipſe.

II°. Je conçois de même que de tous les points de DO, ſoient menées des ordonnées à l'ellipſe telles que MR, & des ordonnées au cercle telles que MN : nous aurons par la propriété de l'ellipſe, $\overline{MR}=DM\times MS$; & par celle du cercle, $\overline{MN}=DM\times MH$. Mais les triangles ſemblables GOH, XMH, donnent GO. OH :: XM. MH : donc XM=MH, à cauſe de GO=HO. Or XM eſt moindre que MS, à cauſe que la droite GXK eſt toute entiere dans le triangle CTD : donc MH eſt moindre auſſi que MS ; & par conſéquent $DM\times MH$ ou $\overline{MN}$ eſt moindre que $DM\times MS$ ou $\overline{MR}$. D'où il ſuit que l'ordonnée MN du cercle eſt moindre que l'ordonnée MR de l'ellipſe : & comme la même choſe arrivera à l'égard de toutes les ordonnées du cercle & de l'ellipſe, menées par tous les points de DO de part & d'autre ; il s'enſuit que l'arc du cercle ADB eſt tout entier dans l'ellipſe. C. Q. F. D.

763. COROLLAIRE I. *De tous les angles tels que CAD, CPD, &c. qui ont leurs ſommets ſur la courbe d'une ellipſe, & qui s'appuient ſur le petit axe CD ; le plus petit eſt celui qui a ſon ſommet à l'une ou l'autre des extrémités A du grand axe : & de tous les angles, tels que ADB, APB, &c. qui ont leurs ſommets ſur la courbe, & qui s'appuient ſur le grand axe AB ; le plus grand eſt celui qui a ſon ſommet à l'une ou l'autre des extrémités du petit axe* (Fig. 482, 483).

DÉMONSTRATION. I°. Je fais paſſer un cercle par les extrémités C & D du petit axe (*Fig.* 482), & par le ſommet A du grand axe. Ainſi l'arc CARD eſt tout entier hors de l'ellipſe (761). Je prolonge CP juſqu'à la circonférence du cercle en R ; & du point R, je

mene la ligne RD. Les angles CAD, CRD, ont leurs ſommets à la circonférence du cercle, & s'appuient ſur le même arc CHD: donc ces deux angles ſont égaux. Mais l'angle CPD étant externe au triangle RPD, eſt plus grand que l'angle interne PRD; donc l'angle CAD, égal à l'angle CRD, eſt moindre que l'angle CPD: & la même choſe ſe démontrera de tous les angles qui auront leurs ſommets ſur la demi-ellipſe ABD, ſi l'on décrit un cercle qui paſſe par les points C, D, B.

II°. De même je fais paſſer par les extrémités A & B du grand axe (*Fig.* 483), & par l'extrémité D du petit axe, un cercle ARDH: & par conſéquent l'arc ARDB de ce cercle eſt tout entier dans l'ellipſe (762). Je mene par le point R, où la droite BP coupe cet arc, la droite RA: & les deux angles ARB, ADB, ſont égaux, à cauſe qu'ils ſont à la circonférence du cercle, & qu'ils s'appuient ſur le même arc AHB. Mais ARB, étant extérieur au triangle RPA, eſt plus grand que l'angle intérieur BPA: donc l'angle ADB, égal à l'angle ARB, eſt plus grand que l'angle BPA; & ainſi des autres.

764. COROLLAIRE II. *De tous les angles aigus que les diametres font avec leurs ordonnées, le moindre eſt celui que fait l'un ou l'autre des deux diametres conjugués & égaux* (Fig. 484).

DÉMONSTRATION. Soit l'ellipſe ADBC. Je mene par les extrémités des axes les droites AD, BD, BC, CA; & par le centre O menant la droite HOS parallele à AC, cette droite eſt l'un des deux diametres conjugués égaux (748); & l'angle aigu OQD, qu'il fait avec ſon ordonnée AD, eſt égal à l'angle CAD.

Soit un autre diametre quelconque MP, différent du diametre conjugué de HS. Par le point D, je mene une double ordonnée DR au diametre MP, laquelle ira aboutir ſur la courbe en un point R différent du ſommet A du grand axe. Car ſi elle alloit aboutir en A, elle ſeroit ordonnée au diametre HS, & non pas au diametre MP. Du point R, je mene la droite RC: & à cauſe de RD diviſée en deux également en T par ſon diametre, & de DC diviſée en deux également en O; les droites RC, TO, ſont paralleles; & l'angle aigu OTD, que le diametre PM fait avec ſon ordonnée DR, eſt égal à l'angle DRC. Mais l'angle DRC eſt plus grand que l'angle DAC, ou ſon égal DQO (763): donc l'angle OTD eſt auſſi plus grand que DQO.

765. COROLLAIRE III. *De tous les angles obtus que les diametres*

font avec leurs ordonnées, le plus grand eſt celui que fait l'un ou l'autre des deux diametres conjugués égaux (Fig. 484).

DÉMONSTRATION. C'eſt une ſuite évidente du Corollaire précédent: car tous les diametres font avec leurs ordonnées deux angles, l'un aigu & l'autre obtus, qui valent enſemble deux droits. Ainſi puiſque le diametre HS, qui eſt l'un des deux conjugués égaux, fait avec ſes ordonnées un angle aigu moindre que chacun des angles aigus que les autres diametres font avec leurs ordonnées; il eſt clair que l'angle obtus OQA, que le même diametre HS fait avec ſes ordonnées, doit être plus grand que chacun des angles obtus que les autres diametres font avec leurs ordonnées: & cet angle OQA eſt égal à l'angle ADB qui a ſon ſommet en D, & qui s'appuie ſur le grand axe, à cauſe des paralleles SQ, DB, & AD, CB.

766. PROBLÊME. *Une ellipſe ADBC étant donnée, trouver un diametre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle égal à un angle donné* abc (*Fig.* 486).

SOLUTION. Si l'angle donné eſt droit, il eſt clair que les deux axes ſatisfont à la queſtion. Si l'angle donné eſt aigu, & égal à l'angle qui auroit ſon ſommet à l'extrémité A du grand axe, & qui s'appuieroit ſur le petit axe; le diametre demandé ſeroit l'un ou l'autre des deux conjugués égaux (764). De même ſi l'angle donné étoit obtus, & égal à l'angle qui auroit ſon ſommet à l'extrémité C du petit axe, & qui s'appuieroit ſur le grand axe; le diametre demandé ſeroit encore l'un ou l'autre des deux conjugués égaux (765).

Ainſi la queſtion ſe réduit à trouver un diametre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle aigu plus grand que celui qui s'appuieroit ſur CD, & qui auroit ſon ſommet en A; ou un angle obtus moindre que celui qui auroit ſon ſommet en C, & qui s'appuieroit ſur le grand axe. Et comme l'angle aigu qu'un diametre fait avec ſes ordonnées étant donné, l'angle obtus qu'il fait avec les mêmes ordonnées eſt connu; la queſtion ſe réduit encore à trouver un diametre qui faſſe avec ſes ordonnées un angle donné obtus *abc*, moindre que l'angle qui auroit ſon ſommet en C. Cela poſé:

Je fais en A un angle LAB égal à l'angle aigu *abd*, qui eſt le complément de l'angle donné obtus *abc*. J'éleve en A la droite AX perpendiculaire ſur LA. Du point X, où la droite AX coupe le petit axe CD, je décris avec le rayon XA un cercle HAKB: & par l'un ou l'autre des points R, S, où le cercle coupe la courbe, par exemple par le point S, je mene aux extrémités du grand axe les droites SA,

SB. Je coupe ces deux droites chacune en deux également en T & Z ; & par les points de diviſion, & par le centre O de l'ellipſe, je mene les droites VP, QE, qui ſeront deux diametres conjugués, leſquels feront avec leurs ordonnées un angle obtus égal à l'angle donné : & ſi je fais la même choſe au point R, je trouverai encore deux autres diametres conjugués, qui feront auſſi avec leurs ordonnées le même angle obtus. En voici la démonſtration.

I°. Le cercle paſſera par l'autre extrémité B du grand axe. Car les triangles rectangles XAO, XBO, ſont égaux, à cauſe du côté AO égal au côté OB, & du côté commun OX : par conſéquent XB=AX. Ainſi XB eſt rayon du cercle.

II°. L'arc AHB du ſegment AHB paſſe dans l'ellipſe du côté de A & du côté de B : car la tangente LA, étant perpendiculaire ſur AX, eſt oblique au grand axe & à ſa tangente AG. D'où il ſuit que LA entre dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon l'arc AHB. De même ſi je mene en B la droite BF tangente au cercle, cette tangente entrera auſſi dans l'ellipſe, & à plus forte raiſon BHA.

III°. Tout angle inſcrit dans le ſegment BHA, tel que l'angle ASB, eſt égal à l'angle donné *abc*. Car l'angle du ſegment LAB étant égal à l'angle aigu *abd*, tout angle inſcrit dans l'autre ſegment, tel que l'angle AKB, ſera auſſi égal à l'angle aigu *abd* ; à cauſe que AKB eſt égal à l'angle LAB. Or l'angle ASB & l'angle AKB valent enſemble deux droits, à cauſe qu'ils embraſſent enſemble la circonférence entiere : donc puiſque l'angle AKB eſt égal à l'angle *abd*, l'angle ASB doit être égal à l'angle *abc* qui, joint avec *abd*, vaut auſſi deux droits.

IV°. L'arc AHB doit couper le petit axe en un point H hors de l'ellipſe. Car s'il le coupoit à l'extrémité C, l'angle ASB inſcrit dans le ſegment ACB ſeroit égal à l'angle qui a ſon ſommet à l'extrémité du petit axe, & qui s'appuie ſur le grand ; ce qui eſt contre la ſuppoſition : & s'il le coupoit en dedans de l'ellipſe en un point H, l'angle AHB, inſcrit dans le ſegment, ſeroit plus grand que l'angle ACB, à cauſe de l'angle externe AHO plus grand que l'interne ACH, & de l'angle externe BHO plus grand que l'interne BCH : ce qui eſt encore contre la ſuppoſition.

V°. Donc, puiſque l'arc AHB entre dans l'ellipſe du côté de A & de B, & qu'enſuite il coupe le petit axe hors de l'ellipſe ; il faut néceſſairement qu'il coupe l'ellipſe en deux points R, S. Or, tout cela poſé, il eſt clair que les droites QE, SA, ſont paralleles, à cauſe que BS eſt diviſé en deux également en Z, de même que BA en O : ce qui rend les triangles BOZ, BAS, ſemblables entre

eux ; & l'angle EZB, que le diametre EQ fait avec ſon ordonnée SB, égal à l'angle ASB, ou à ſon égal *abc*. De même, à cauſe de SA diviſé en deux également en T, de même que AB en O, les droites TO, SB, ſont paralleles ; & l'angle ATP, que le diametre VP fait avec ſon ordonnée SA, eſt auſſi égal à l'angle ASB, ou à l'angle donné *abc*.

Ainſi les deux diametres QE, VP, ſatisfont à la queſtion ; & ces diametres ſont conjugués entre eux, puiſqu'ils ſont mutuellement paralleles à leurs ordonnées. On prouveroit la même choſe des deux autres diametres que j'aurois trouvés, ſi je m'étois ſervi du point R.

L'HYPERBOLE CONSIDÉRÉE DANS UN PLAN HORS DU CONE.

767. PROBLÊME. *Décrire une hyperbole* (Fig. 487).

SOLUTION. Je prends deux lignes droites AB, CD, égales ou inégales : je les mets perpendiculairement l'une ſur l'autre, en ſorte qu'elles ſe coupent chacune en deux également en O. Je prolonge indéfiniment l'une des deux AB : je coupe le prolongement BY en parties égales BM, MS, très petites ; & je fais paſſer par les points de diviſion, des perpendiculaires RV, LX. Je décris un cercle autour de la ligne AB : & du point M menant la tangente MN, je cherche une quatrieme proportionnelle aux deux lignes AB, CD, & à la tangente MN, & je porte cette quatrieme proportionnelle ſur la perpendiculaire RMV, de M en R, & de M en V. De même du point S je mene la tangente ST ; & cherchant une quatrieme proportionnelle aux deux lignes AB, CD, & à la tangente ST, je la porte ſur la perpendiculaire LX, de S en L, & de S en X. Je fais la même choſe à l'égard des autres perpendiculaires menées ſur les points de diviſion de BY : & faiſant paſſer une courbe par les points trouvés, & par le point B ; les ordonnées de cette courbe ſont RM, LS, &c ; les abſciſſes BM, BS, &c : & il reſte à prouver que c'eſt une hyperbole.

Par la conſtruction, nous avons AB. CD :: MN. MR ; & AB. CD :: ST. SL : donc MN. MR :: ST. SL ; ou MN. ST :: MR. SL : c'eſt-à-dire, les ordonnées MR, SL, &c. de notre courbe, ſont entre elles comme les tangentes au cercle menées des points M, S, &c, où ces ordonnées coupent leurs abſciſſes. Donc élevant tout au quarré, nous aurons $\overline{MN}.\overline{ST} :: \overline{MR}.\overline{SL}$. Or $\overline{MN} = MB \times AM$ (271) ; & $\overline{ST} = SB \times AS$: donc $MB \times AM. SB \times AS :: \overline{MR}.\overline{SL}$: c'eſt-à-dire, les quarrés des ordonnées MR, SL, ſont entre eux

comme les rectangles de leurs abſciſſes multipliées par la ligne AB augmentée de ces mêmes abſciſſes : & par conſéquent la courbe eſt une hyperbole (634).

768. REMARQUE. Il faut obſerver ici, I°. que les tangentes MN, ST, devenant d'autant plus grandes que les points M, S, &c. ſont plus éloignés du point B ; les ordonnées MR, SL, &c. qui ſont quatriemes proportionnelles aux droites AB, CD, & aux tangentes, deviennent auſſi plus grandes, à meſure qu'elles s'éloignent du ſommet B : & que par conſéquent la courbe peut s'étendre à l'infini, en s'éloignant de plus en plus de part & d'autre de la ligne BY. II°. Que ſi l'on fait la même conſtruction du côté de A, on aura une autre courbe QZA ſemblable & égale à la premiere HBP. (*Fig.* 487).

769. DÉFINITIONS. La droite AB ſe nomme premier *axe ;* la droite CD, ſecond *axe ;* le point O, où ces droites ſe coupent, *centre ;* & les deux courbes HBP, QAZ, *hyperboles oppoſées.*

Toute ligne qui paſſe par le centre O, & qui coupe les hyperboles oppoſées, ſe nomme *premier diametre :* celles qui paſſent par le centre O, & qui ne coupent point les hyperboles, ſe nomment *ſeconds diametres.*

Le *parametre du premier axe* eſt une ligne troiſieme proportionnelle au premier axe & au ſecond : le *parametre du ſecond axe* eſt une ligne troiſieme proportionnelle au ſecond axe & au premier.

Au reſte, la ligne CD eſt nommée *ſecond axe*, à cauſe qu'elle coupe en deux également toutes les lignes telles que V*u*, qui lui ſont perpendiculaires & qui ſe terminent ſur les hyperboles. Car il eſt viſible que ſi l'on prend dans ces deux courbes deux ordonnées MV, *mu*, également éloignées de leurs ſommet B, A, & par conſéquent égales ; la ligne V*u*, menée par leurs extrémités, ſera perpendiculaire à CD, qui la coupera en deux également, à cauſe que M*m* eſt coupée en deux également par CD (*Fig.* 487).

770. COROLLAIRE I. *Le quarré d'une ordonnée quelconque LS au premier axe, eſt au rectangle correſpondant SB×AS ; comme le quarré du petit axe, eſt au quarré du grand axe.*

DÉMONSTRATION. Par la conſtruction, nous avons LS. ST :: CD. AB. Donc $\overline{LS}^2 . \overline{ST}^2 :: \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$. Or $\overline{ST}^2 = SB \times AS$ (271). Donc $\overline{LS}^2 . SB \times AS :: \overline{CD}^2 . \overline{AB}^2$.

771. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée quelconque LS au*

au premier axe, eſt au rectangle correſpondant SB×AS ; comme le parametre du premier axe, eſt au premier axe AB.

DÉMONSTRATION. Je nomme P le parametre du premier axe ; & par la définition de ce parametre, nous avons :: AB. CD. P (769). Donc $\overline{AB}$. $\overline{CD}$ :: AB. P (393) ; ou $\overline{CD}$. $\overline{AB}$ :: P. AB. Or par le Corollaire précédent, nous avons $\overline{LS}$. SB×AS :: $\overline{CD}$. $\overline{AB}$. Donc $\overline{LS}$. SB×AS :: P. AB.

772. COROLLAIRE III. *Si au ſommet B du premier axe AB on éleve une perpendiculaire HB égale au parametre de cet axe ; & que par l'extrémité H de ce parametre & l'autre extrémité A de l'axe AB, on mene une droite indéfinie AT qui coupe en T une ordonnée quelconque SL prolongée, s'il le faut ; le quarré LS de cette ordonnée eſt égal au rectangle de ſon abſciſſe SB multipliée par la droite TS* (Fig. 488).

DÉMONSTRATION. Les triangles ſemblables ABH, AST, donnent AB. BH :: AS. ST ; & multipliant les deux derniers termes par BS, nous aurons AB. BH :: AS×BS. TS×BS, ou TS×BS. AS× BS :: BH. AB (771) : or $\overline{LS}$. AS×BS :: BH. AB : donc TS×BS. AS× BS :: $\overline{LS}$. AS×BS : & par conſéquent TS×BS=$\overline{LS}$; à cauſe des deux conſéquents égaux.

773. COROLLAIRE IV. *Le quarré d'une ordonnée quelconque LV au ſecond axe CD, eſt au quarré de ſon abſciſſe VO, plus le quarré du demi-ſecond axe DO ; comme le quarré du premier axe, eſt au quarré du ſecond* (Fig. 489).

DÉMONSTRATION. Du point L, je mene l'ordonnée LS au premier axe ; & j'ai $\overline{LS}$. SB×SA :: $\overline{CD}$. $\overline{AB}$ (770). Or à cauſe que AB eſt diviſé en deux également en O, & que BS lui eſt ajouté ; nous avons SB×SA=$\overline{OS}$—$\overline{BO}$: donc $\overline{LS}$. $\overline{OS}$—$\overline{BO}$ :: $\overline{CD}$. $\overline{AB}$.

Mais les quarrés $\overline{CD}$ & $\overline{AB}$ des axes ſont entre eux comme les quarrés $\overline{OD}$ & $\overline{OB}$ de leurs moitiés : donc $\overline{LS}$. $\overline{OS}$—$\overline{BO}$ :: $\overline{OD}$. $\overline{OB}$; ou $\overline{LS}$. $\overline{OD}$ :: $\overline{OS}$—$\overline{BO}$. $\overline{BO}$: & compoſant, nous aurons $\overline{LS}$ +$\overline{OD}$. $\overline{OD}$ :: $\overline{OS}$—$\overline{BO}$+$\overline{BO}$. $\overline{BO}$; c'eſt-à-dire, $\overline{LS}$+$\overline{OD}$. $\overline{OD}$ :: $\overline{OS}$. $\overline{BO}$.

Mais LS=VO, & OS=VL ; à cauſe que VOSL eſt un parallélogramme : donc $\overline{LS}$=$\overline{VO}$, & $\overline{OS}$=$\overline{VL}$; & ſubſtituant ces valeurs

dans la derniere proportion, nous aurons $\overline{VO}+\overline{OD}.\ \overline{OD} :: \overline{VL}.\ \overline{BO}$; ou $\overline{VL}.\ \overline{VO}+\overline{OD} :: \overline{BO}.\ \overline{DO} :: \overline{AB}.\ \overline{CD}$.

Remarque. Nous ferons voir dans la ſuite, d'où vient que la propriété de l'hyperbole par rapport au ſecond axe, n'eſt pas ici la même que par rapport au premier.

774. Corollaire V. *Le quarré d'une ordonnée quelconque LV au ſecond axe, eſt au quarré de ſon abſciſſe VO, plus le quarré du demi ſecond axe CO; comme le parametre de cet axe, eſt à cet axe CD* (Fig. 489).

Démonstration. Je nomme p le parametre du ſecond axe; & par la définition de ce parametre, j'ai :: CD. AB. p : donc $\overline{CD}.\ \overline{AB} ::$ CD. p (393); ou p. CD :: $\overline{AB}.\ \overline{CD}$. Mais nous avons $\overline{LV}.\ \overline{VO}+\overline{OC} :: \overline{AB}.\ \overline{CD}$. Donc $\overline{LV}.\ \overline{VO}+\overline{OC} ::$ p. CD.

775. Corollaire VI. *Toute ligne OZ qui paſſe par le centre O, & qui coupe l'hyperbole, ne la coupe qu'en un ſeul point R* (Fig. 489).

Démonstration. Du point R, je mene l'ordonnée RM au premier axe; & d'un autre point quelconque S pris ſur BS en deſſous de M, je mene une autre ordonnée LS qui coupe OZ en T. Les triangles ſemblables OMR, OST, donnent MR. TS :: OM. OS : donc $\overline{RM}.\ \overline{TS} :: \overline{OM}.\ \overline{OS}$.

Or par la propriété de l'hyperbole, nous avons $\overline{RM}.\ \overline{LS} ::$ MB× AM. SB×AS (767) :: $\overline{MO}-\overline{BO}.\ \overline{SO}-\overline{OB}$ (148). Mais $\overline{MO}-\overline{BO}$ eſt moindre par rapport à $\overline{SO}-\overline{OB}$, que $\overline{OM}$, par rapport à $\overline{OS}$. Car, afin qu'il y eût proportion entre les quatre termes $\overline{MO}-\overline{BO}$, $\overline{SO}-\overline{OB}$, $\overline{MO}$, & $\overline{OS}$; il faudroit que la partie $\overline{BO}$ qu'on retranche de $\overline{MO}$, fût à la partie $\overline{OB}$ qu'on retranche de $\overline{SO}$, en même raiſon que $\overline{MO}$ eſt à $\overline{SO}$: & par conſéquent il faudroit que la partie $\overline{BO}$ retranchée de $\overline{MO}$, fût moindre que la partie $\overline{BO}$ retranchée de $\overline{SO}$. Donc puiſqu'on retranche de $\overline{MO}$ plus qu'il ne faut; il s'enſuit néceſſairement que $\overline{MO}-\overline{BO}$ eſt moindre par rapport à $\overline{SO}-\overline{BO}$, que $\overline{MO}$ par rapport à $\overline{SO}$: & par conſéquent $\overline{RM}$ eſt auſſi moindre par rapport à $\overline{LS}$, que $\overline{RM}$ par rapport à $\overline{TS}$. D'où il ſuit que $\overline{LS}$ eſt plus grand que $\overline{TS}$; & partant LS eſt plus grand

que TS, & le point T de la droite OT eſt dans l'hyperbole. Et comme on prouvera la même choſe à l'égard de tous les points de la droite RZ, il eſt clair que cette droite eſt toute dans l'hyperbole.

776. COROLLAIRE VII. *Si une droite OR, qui paſſe par le centre O, coupe l'hyperbole en un point R; je dis que cette ligne étant prolongée au-delà du ſommet, coupera l'hyperbole oppoſée en un point X; de façon que la ligne entiere RX ſera diviſée en deux également par le centre O* (Fig. 489).

DÉMONSTRATION. Je mene l'ordonnée RM; je fais OX=OR; & par le point X, je mene XZ parallele à RM juſqu'à ce qu'elle coupe le premier axe BA prolongé en Z. Les triangles ſemblables ORM, OXZ, donnent OR. OX :: OM. OZ; & partant OM=OZ. Or OB =OA; donc l'abſciſſe BM eſt égale à l'abſciſſe AZ: & par conſéquent l'ordonnée RM doit être égale à l'ordonnée menée du point Z; à cauſe que les deux hyperboles oppoſées ſont parfaitement égales.

Mais dans les triangles ſemblables & égaux ORM, OXZ, nous avons RM=XZ: donc XZ eſt l'ordonnée menée du point X; & la droite RX coupée en deux également en O, paſſe par l'extrémité X de cette ordonnée. L'on démontrera qu'elle coupe l'hyperbole oppoſée en X, ou que ſa partie indéfinie XY eſt toute dans l'hyperbole oppoſée, de la même façon que nous avons démontré que RZ eſt dans l'hyperbole (775).

777. PROBLÊME. *D'un point L, pris ſur l'hyperbole, mener une tangente à la courbe* (Fig. 490).

SOLUTION. Si le point L étoit au ſommet B, il eſt clair que la tangente ſeroit la ligne BK, menée parallèlement aux ordonnées. Car tous les points de la courbe de part & d'autre ſont en deſſous de cette ligne par la conſtruction de l'hyperbole.

Mais ſi le point L n'eſt pas au ſommet B, je mene *l'ordonnée LS au premier axe;* & prenant une troiſieme proportionnelle OT aux deux lignes OS, OB, je mene la droite LT, qui eſt la tangente demandée: ce que je prouve ainſi.

Je décris autour du premier axe le cercle AVB: & du point T menant l'ordonnée TV à ce cercle, la droite VS menée de V par S eſt tangente de ce cercle; & j'ai OS. OB :: OB. OT; ou OT. OB :: OB. OS (292). Cela poſé:

I°. Je mene une *autre ordonnée* MR au premier axe, entre L & T; laquelle coupe l'hyperbole en R, & la droite LT en quelque point Q; ſans m'embarraſſer ſi ce point eſt dans l'hyperbole ou en dehors. Les

triangles ſemblables LTS, QTM, donnent LS. QM :: TS. TM : & menant du point M la droite MX parallele à VS ; j'ai TS. TM :: SV. MX ; à cauſe des triangles ſemblables TSV, TMX : donc LS. QM :: SV. MX ; & partant $\overline{LS}$. $\overline{QM}$ :: $\overline{SV}$. $\overline{MX}$. Or $\overline{SV}$=SB×AS : donc $\overline{LS}$. $\overline{QM}$ :: SB×AS. $\overline{MX}$; ou $\overline{LS}$. SB×AS :: $\overline{QM}$. $\overline{MX}$.

Mais par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{LS}$. SB×AS :: $\overline{RM}$. MB×AM : donc $\overline{QM}$. $\overline{MX}$ :: $\overline{RM}$. MB×AM. Mais $\overline{MX}$ eſt plus grand que MB×AM, à cauſe que MX eſt menée parallele à la tangente SV du cercle (306) : donc $\overline{QM}$ eſt auſſi plus grand que $\overline{RM}$: & partant QM eſt plus grand que RM. D'où il ſuit que le point Q de la ligne LT eſt hors de l'hyperbole : & on prouvera la même choſe de tous les points de cette ligne compris entre L & T.

II°. Je mene une *autre ordonnée HP* au premier axe en deſſous du point L, laquelle coupe la droite TLZ en Z ; & je mene HN parallele à la tangente SV du cercle, juſqu'à ce qu'elle coupe l'ordonnée TV de ce cercle en un point N. Les triangles ſemblables TLS, TZH, donnent LS. ZH :: ST. HT ; & à cauſe des triangles ſemblables TSV, THN, nous avons ST. HT :: SV. HN : donc LS. ZH :: SV. HN ; & $\overline{LS}$. $\overline{ZH}$ :: $\overline{SV}$. $\overline{HN}$. Mais $\overline{SV}$=SB×AS : donc $\overline{LS}$. $\overline{ZH}$ :: SB×AS. $\overline{HN}$; ou $\overline{LS}$. SB×AS :: $\overline{ZH}$. $\overline{HN}$.

Or par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{LS}$. SB×AS :: $\overline{PH}$. HB×AB : donc $\overline{PH}$. HB×AH :: $\overline{ZH}$. $\overline{HN}$. Mais $\overline{HN}$ eſt plus grand que HB×AH (306) :: donc $\overline{ZH}$ eſt plus grand que $\overline{PH}$, & ZH plus grand que PH. D'où il ſuit que le point Z de la droite ZT eſt hors de la courbe. On prouvera de la même façon que tous les autres points de cette ligne, pris en deſſous de L, ſont hors de la courbe. Mais nous venons de voir que tous les points de la même ligne pris entre L & T, ſont auſſi hors de la courbe : donc TLX ne touche l'hyperbole qu'en L.

778. COROLLAIRE I. *Toutes les tangentes qu'on peut mener de tous les points d'une hyperbole, ſont inclinées entre elles, & ſe coupent entre leurs points d'attouchement* (Fig. 491).

DÉMONSTRATION. I°. Si les tangentes LT, QP, ſont l'une d'un côté du premier axe, & l'autre de l'autre côté ; il eſt clair que ces tangentes allant aboutir à l'axe, doivent ſe couper en Z entre leurs points d'attouchement L, Q.

II°. Si les tangentes QP, RH, ſont d'un même côté de l'axe, je mene, des points d'attouchement, les ordonnées QS, RM: & j'ai pour la premiere, :: SO. BO. OP (777), & pour la ſeconde, :: MO. BO. OH. Donc $SO \times OP = \overline{OB}^2$; & $MO \times OH = \overline{OB}^2$: d'où je tire $SO \times OP = MO \times OH$; & SO. MO :: OH. OP.

Or SO eſt moindre que MO; donc OH eſt moindre que OP: donc la tangente RH, dont le point d'attouchement R eſt plus éloigné du ſommet B, coupe l'axe en un point H auſſi plus éloigné du ſommet. Mais cette tangente ne peut paſſer de R en H, ſans couper la tangente PQX; & elle ne peut la couper au point d'attouchement en Q, parcequ'alors elle toucheroit l'hyperbole en deux points R, Q; ce qui eſt impoſſible: elle ne peut pas non plus couper QP entre Q & P; car elle paſſeroit néceſſairement dans l'hyperbole, & ne ſeroit plus tangente: donc il faut que RH coupe PQX en quelque point V entre R & Q.

779. COROLLAIRE II. *D'un même point L, on ne peut mener qu'une tangente à l'hyperbole.* Ce qui ſe démontre de même que pour la parabole (646).

780. COROLLAIRE III. *Une tangente LT, & l'ordonnée LS au premier axe, menée du point d'attouchement, étant données; on aura* 1°. *SB. BT :: AS. AT:* 2°. *SB. ST :: SO. SA* (Fig. 492).

DÉMONSTRATION. Je décris autour du premier axe le cercle AVB: & du point T, menant à ce cercle l'ordonnée TV; la droite VS, menée du point V au point S, ſera tangente du cercle en V, à cauſe de :: SO. BO. OT (292). Donc, à l'égard du cercle, nous aurons SB. BT :: AS. AT (296); & SB. ST :: SO. SA (294). Or ces lignes ſont les mêmes à l'égard de l'hyperbole. Donc, &c.

781. COROLLAIRE IV. *Poſant les mêmes choſes que dans le Corollaire précédent; ſi du point d'attouchement L, on éleve ſur TL une perpendiculaire LP; je dis que la ſouperpendiculaire SP eſt à la diſtance SO de l'ordonnée LS au centre O, comme le parametre du premier axe eſt à cet axe* (Fig. 492).

DÉMONSTRATION. Nommant P le parametre du premier axe, nous avons $\overline{LS}^2$. $SB \times AS$ :: P. AB. Or, à cauſe de la perpendiculaire LS abaiſſée du ſommet du triangle rectangle TLP ſur ſon hypothénuſe TP, nous avons $\overline{LS}^2 = TS \times SP$: & à cauſe de SB. ST :: SO. SA (780), nous avons $SB \times SA = ST \times SO$: donc TS×SP. TS×SO :: P. AB. Mais les deux rectangles TS×SP, TS×SO, ayant une

dimenſion commune TS, ſont entre eux comme SP, SO; donc SP. SO :: P. AB.

782. COROLLAIRE V. *Poſant encore les mêmes choſes; ſi du point d'attouchement L, on mene l'ordonnée LX au ſecond axe, & qu'on prolonge la tangente juſqu'à la rencontre de cet axe en H, on aura HO×OX=$\overline{OC}$: c'eſt-à-dire, le rectangle HO×OX égal au quarré du demi petit axe* (Fig. 492).

DÉMONSTRATION. Les triangles ſemblables SLT, HTO, donnent ST. OT :: LS. OH: & multipliant les deux premiers termes par OS, & les deux derniers par LS, nous aurons ST×OS. OT×OS :: $\overline{LS}$. SL×OH, ou OX×OH, à cauſe de OX=SL. Or, à cauſe de SO. OB :: OB. OT (777), nous avons OT×OS=$\overline{OB}$: & parceque SB. ST :: SO. SA (780); nous aurons SB×AS=ST×SO; donc SB×AS. $\overline{OB}$ :: $\overline{SL}$. OH×OX; ou $\overline{SL}$. SB×AS :: OH×OX. $\overline{OB}$.

Mais par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{SL}$. SB×AS :: $\overline{CO}$. $\overline{OB}$; donc OH×OX. $\overline{OB}$ :: $\overline{CO}$. $\overline{OB}$: & partant OH×OX=$\overline{CO}$, à cauſe des conſéquents égaux $\overline{OB}$, $\overline{OB}$.

Foyers de l'Hyperbole.

783. DÉFINITION. Si de l'extrémité D du ſecond axe CD, on mene à l'extrémité du premier axe la droite DB; & qu'ayant pris avec le compas la droite DB, on la porte ſur le premier axe prolongé de part & d'autre de O en E, & de O en G; les points E, G, ſe nommeront les *foyers* des hyperboles oppoſées (*Fig.* 493).

784. COROLLAIRE I. *Si de l'un des foyers E, on mene une ordonnée EF au premier axe; le rectangle EB×AE correſpondant à cette ordonnée, eſt égal au quarré de la moitié OD du ſecond axe.* Car dans le triangle rectangle ODB, nous avons $\overline{OD}$=$\overline{DB}$—$\overline{OB}$=$\overline{OE}$—$\overline{OB}$. Or EB×AE=$\overline{OE}$—$\overline{OB}$ (148): donc $\overline{OD}$=EB×AE.

785. COROLLAIRE II. *Si de l'extrémité D du ſecond axe, on mene DM parallele au premier axe; & du point M, l'ordonnée MN au premier axe; le rectangle NB×AN correſpondant, eſt égal au quarré de la moitié OB du premier axe.* Par la propriété de la courbe, $\overline{NM}$. NB×AN :: $\overline{DO}$. $\overline{OB}$. Mais $\overline{NM}$=$\overline{DO}$, à cauſe des paralleles: donc NB×AN=$\overline{OB}$.

PROPOSITION XXVIII.

786. *Si de l'un des foyers E, on mene une ordonnée EF au premier axe ; cette ordonnée eſt égale à la moitié du parametre du premier axe* (Fig. 494).

DÉMONSTRATION. Par la propriété de la courbe, $\overline{EF}^2$. EB×AE :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$. Mais EB×AE=$\overline{OD}^2$ (784) : donc $\overline{EF}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$; & partant $\overline{OB}^2$. $\overline{OD}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{EF}^2$; & OB. OD :: OD. EF. Mais par la définition du parametre du premier axe que je nomme P, nous avons AB. CD :: CD. P : donc en prenant les moitiés de tous les termes, j'ai OB. OD :: OD. $\frac{1}{2}$ P ; & OD. $\frac{1}{2}$ P :: OD. EF ; & partant $\frac{1}{2}$ P=EF. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XXIX.

787. *Le premier axe AB, & un diametre KL, étant donnés avec leurs tangentes BV, LT ; les triangles TRB, VRL, faits par les tangentes avec l'axe & le diametre, ſont égaux* (Fig. 495).

DÉMONSTRATION. Du point L, je mene l'ordonnée LS au premier axe : j'ai donc OS. OB :: OB. OT (777). Or les triangles ſemblables OBV, OSL, donnent OS. OB :: OL. OV : donc OL. OV :: OB. OT ; & par conſéquent menant les lignes LB, VT, ces lignes ſont paralleles. Or les triangles LBV, LBT, compris entre ces deux paralleles, ſont égaux, à cauſe qu'ils ont la baſe commune LB : donc retranchant de part & d'autre le triangle commun LRB, nous aurons TRB=VRL. Ce qu'il falloit démontrer.

788. COROLLAIRE. *Le triangle LTS, fait par la tangente LT du diametre KL, avec le premier axe, & ſon ordonnée LS menée du point d'attouchement, eſt égal au trapézoïde fait par la même ordonnée LS, avec la tangente BV du premier axe, compriſe entre le premier axe & le diametre.* Les triangles TRB, VRL, ſont égaux (787) : ajoutant donc de part & d'autre BRLS, nous aurons LTS =BSLV (*Fig.* 495).

REMARQUE. J'ai démontré ci-deſſus (776) que *tout diametre LK*, terminé entre les deux courbes oppoſées, étoit diviſé en deux également au centre O. Or pour ne pas rendre les figures trop grandes, ce qui nous jetteroit dans l'inconvénient de ſurcharger cet Ouvrage de Planches ; je ne décrirai point dans les Figures des Propoſitions ſuivantes, l'hyperbole oppoſée ; & la moitié OK d'un diametre LK reſtera indéterminée. Mais il faudra toujours ſuppoſer

dans le diſcours, que le point K eſt le point où le diametre LK coupe la courbe oppoſée ; & ainſi des autres.

PROPOSITION XXX.

789. *Le premier axe AB, & un diametre KL, étant donnés avec leurs tangentes BV, LT, qui ſe terminent l'une à l'axe, & l'autre au diametre ; ſi d'un point quelconque X pris ſur la courbe, on mene deux droites FH, PM, paralleles aux tangentes, & qui ſe terminent au premier axe, & au diametre : je dis,*

I°. *Que le triangle HXM fait par ces paralleles avec le premier axe, eſt égal au trapézoïde VBMP fait par la tangente VB du premier axe, & ſa parallele XM compriſe entre le premier axe & le diametre.*

II°. *Que le triangle PXF fait par les deux paralleles & le diametre OL eſt égal au trapézoïde LTHF fait par la tangente LT du diametre & ſa parallele FX compriſe entre le diametre & le premier axe* (Fig. 496).

Démonstration. I°. Les triangles ſemblables TLS, HXM, donnent TLS. HXM :: $\overrightarrow{LS}$. $\overrightarrow{XM}$. Or, par la propriété de la courbe, nous avons $\overrightarrow{LS}$. $\overrightarrow{XM}$ :: SB×AS. MB×AB ; & nous ſavons que SB×AS. MB×AB :: $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{MO}$—$\overrightarrow{OB}$ (148) : donc $\overrightarrow{LS}$. $\overrightarrow{XM}$ :: $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{MO}$—$\overrightarrow{OB}$; donc TLS. HXM :: $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{OB}$. $\overrightarrow{MO}$—$\overrightarrow{OB}$: & au lieu des quarrés $\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MO}$, mettant les triangles ſemblables OLS, OBV, OPM, qui ſont dans la même raiſon (392), nous aurons TLS. HXM :: OLS—OBV. OPM—OBV ; c'eſt-à-dire, TLS. HXM :: VBSL. VBMP. Mais TLS=VBSL (788) : donc HXM=VBMP.

II°. Nous avons TLS=VBSL : & retranchant d'une part le triangle HXM, & de l'autre le trapézoïde VBMP égal à HXM, comme on vient de voir ; il reſtera TLYH+XMSY=PMSL ; & retranchant de part & d'autre la partie commune XMSY, nous aurons TLYH=PXYL : enfin, ajoutant de part & d'autre le petit triangle LYF, nous aurons TLFH=PXF. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarque. Le point X peut ſe trouver ou au-delà du point L, ou de l'autre côté de la courbe : mais ces deux cas ſe démontreront de la même façon, ainſi que nous avons fait à l'égard de la parabole (652).

790. Corollaire I. *Toutes les lignes telles que XZ, paralleles à une tangente quelconque LT, & qui coupent l'hyperbole, ſont*

ſont coupées en deux également par le diametre KL, qui paſſe par le point d'attouchement L (Fig. 497).

DÉMONSTRATION. Je prolonge la droite XZ juſqu'à ce qu'elle coupe le premier axe en H: & des points X, Z, où cette droite coupe l'hyperbole, je mene des droites MP, ZG, paralleles à la tangente BV du premier axe. A cauſe des droites PM, ZH, paralleles aux tangentes BV, LT, du premier axe & du diametre KL; le triangle PXF, fait avec ces paralleles & le diametre, eſt égal au trapézoïde LTHF (789). De même, à cauſe des droites ZH, ZG, paralleles aux tangentes BV, LT; le triangle ZFI, fait par ces paralleles avec le diametre OL prolongé, eſt auſſi égal au trapézoïde LTHF: donc le triangle PXF eſt égal au triangle ZFI. Mais ces deux triangles ſont ſemblables, à cauſe des paralleles PM, ZG: donc ils ſont parfaitement égaux; & le côté XF eſt égal au côté FZ: & partant XZ eſt diviſée en deux également en F.

791. COROLLAIRE II. *Donc toute ligne XZ, parallele à la tangente LT d'un diametre KL qui coupe l'hyperbole, eſt une double ordonnée au diametre OL; & ſa moitié XF ou ZF eſt l'ordonnée.* Et ceci fait voir que nous avons eu raiſon (769) de nommer *diametres* toutes lignes telles que OL, qui paſſent par le centre O, & qui coupent l'hyperbole en un point L (*Fig.* 497).

792. COROLLAIRE III. *Les quarrés des ordonnées XF, EY, à un diametre quelconque KL, ſont entre eux comme les rectangles de leurs abſciſſes multipliées par le diametre KL augmenté de ces mêmes abſciſſes* (Fig. 498).

DÉMONSTRATION. Je mene la tangente BV du premier axe; je prolonge les ordonnées FX, YE, juſqu'à la rencontre du premier axe en H & Q: & des points X, E, où ces ordonnées coupent l'hyperbole; je mene les droites XP, EZ, paralleles à la tangente BV. Le triangle PXF, fait avec le diametre OL & les deux lignes PX & XF paralleles aux tangentes BV & LT, eſt égal au trapézoïde LTHF (789); & par la même raiſon le triangle ZEY eſt égal au trapézoïde LTQY: donc PXF. ZEY :: LTHF. LTQY.

Or, à cauſe que les triangles PXF, ZEY, ſont ſemblables, nous avons PXF. ZEY :: $\overline{FX}$. $\overline{YE}$ (392): donc $\overline{FX}$. $\overline{YE}$ :: LTHF. LTQY. Or LTHF = OFH — OLT; & LTQY = OYQ — OLT: donc $\overline{FX}$. $\overline{YE}$ :: OFH — OLT. OYQ — OLT.

Et au lieu des triangles ſemblables OFH, OLT, OYQ, mettant les quarrés $\overline{OF}$, $\overline{OL}$, $\overline{OY}$, de leurs côtés homologues, leſquels quarrés ſont en même raiſon que ces triangles; nous aurons $\overline{FX}$. $\overline{YE}$ :: $\overline{OF}$—$\overline{OL}$. $\overline{OY}$—$\overline{OL}$. Mais le diametre LOK étant diviſé en deux également au centre O (776); & les droites LF, LY, lui étant ajoutées, nous avons FL×FK=$\overline{OF}$—$\overline{OL}$ (148); & par la même raiſon YL×YK=$\overline{OY}$—$\overline{OL}$; donc $\overline{FX}$. $\overline{YE}$ :: FL×FK. YL×YK. Ce qu'il falloit démontrer.

Remarquez que la propriété de l'hyperbole à l'égard de tous les premiers diametres, tels que KL, eſt la même qu'à l'égard du premier axe.

PROPOSITION XXXI.

793. *Deux diametres LK, PZ, avec leurs tangentes LT, TP, qui ſe coupent en T, étant donnés; ſi l'on joint les points d'attouchement par la ligne LP, & que par le milieu X de cette ligne on mene la droite XT au point T; cette droite XT ſera un diametre, & paſſera par conſéquent par le centre O de l'hyperbole* (Fig. 499).

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (662).

794. REMARQUE. Par le moyen de cette Propoſition, tout ce que nous avons démontré ci-deſſus à l'égard du premier axe & d'un premier diametre, peut ſe démontrer auſſi à l'égard de deux premiers diametres PZ, LK, ou de leurs moitiés OP, OL (*Fig.* 499).

Car prolongeant les tangentes LT, PT, juſqu'à la rencontre des diametres en H & Q: menant enſuite les droites RL & PM ordonnées aux deux diametres, c'eſt-à-dire, paralleles aux tangentes, la droite LP, & du point T la droite TF qui paſſe par le milieu X de la droite LP, & qui par conſéquent ſera un diametre, & paſſera par le centre O (769); il eſt clair qu'à cauſe du parallélogramme LTPF, la droite TX qui paſſe par l'un des angles X, & qui coupe la diagonale LP en deux également, paſſera par l'angle oppoſé F.

Or, les triangles ſemblables OFR, OTP, donnent OR. OP :: OF. OT; & à cauſe des triangles ſemblables OFP, OTH, nous avons OP. OH :: OF. OT: donc OR. OP :: OP. OH. De même les triangles ſemblables OFM, OTL, donnent OM. OL :: OF. OT; & à cauſe des triangles ſemblables OFL, OTQ, nous avons OL. OQ :: OF. OT; donc OM. LO :: OL. OQ: ce qui fait voir que les deux droites OR, OM, ſont diviſées proportionnellement;

& que par conſéquent les lignes QH, LP, MR, qui joignent leurs points de diviſion, ſont paralleles entre elles.

Donc I°. un diametre PZ étant donné; ſi d'un point L pris ſur la courbe on veut mener une tangente, il faut mener de ce point une ordonnée LR au diametre; enſuite chercher une troiſieme proportionnelle OH aux droites OR, OP; & mener la droite LH qui ſera la tangente demandée. Ainſi c'eſt la même choſe qu'à l'égard du premier axe (777).

Donc II°. le triangle HTP fait par les tangentes & le diametre PZ, eſt égal au triangle QTL fait par les mêmes tangentes avec le diametre LK. Car à cauſe des paralleles QH, LP, les triangles LHP, LPQ, qui ont la baſe LP commune, ſont égaux: & partant, retranchant de part & d'autre le triangle commun LTP, nous aurons HTP=QTL.

Donc III°. LHR=LQPR. Car ajoutant aux triangles égaux HTP, QTL, la partie commune LTPR; nous aurons LHR=LQPR.

Donc IV°. ſi d'un point quelconque S pris ſur la courbe, on mene deux droites VN, IE, paralleles aux tangentes; le triangle VSE, fait par ces paralleles avec le diametre ZP, ſera égal au trapézoïde QPEI fait par la tangente PQ de ce diametre, & par ſa parallele IE, terminées entre les deux diametres: & le triangle ISN fait par les paralleles & l'autre diametre, ſera égal au trapézoïde LHVN fait par la tangente LH de ce diametre & ſa parallele NV, terminées entre les diametres: ce qui ſe démontre comme ci-deſſus (789).

PROPOSITION XXXII.

795. *Deux diametres LK, PZ, étant donnés avec leurs tangentes LH, PQ; ſi de deux points E, F, pris ſur la courbe entre les deux diametres, on mene deux paralleles ES, IX, & FV, XR, aux tangentes; le trapézoïde NSFR fait par deux de ces paralleles avec le diametre PZ, & la plus proche des deux autres paralleles, eſt égal au trapézoïde ENVI fait par deux autres de ces paralleles avec le diametre LK, & la plus proche des deux autres paralleles: de même le trapézoïde ESRX fait par les deux paralleles avec le diametre ZP, & la plus éloignée des deux autres paralleles, eſt égal au trapézoïde FVIX fait par les deux autres paralleles & la plus éloignée des deux premieres* (Fig. 500).

La démonſtration eſt la même que pour la parabole (666, 667).

PROPOSITION XXXIII.

796. *Si deux droites EH, FV, terminées de part & d'autre à l'hyperbole, ſe coupent en un point G dans l'hyperbole; le rectangle EG×GH des parties de la premiere EH, eſt au rectangle FG×GV des parties de la ſeconde; comme le quarré $\overline{PT}$ de la tangente du diametre de la premiere, eſt au quarré $\overline{LT}$ de la tangente du diametre de la ſeconde* (Fig. 501).

Même démonſtration dans tous les cas que pour la parabole (668).

PROPOSITION XXXIV.

797. *Si deux droites EI, FH, terminées de part & d'autre à la courbe, ſe rencontrent en dehors en un point R hors de l'hyperbole lorſqu'on les prolonge; le rectangle RF×RH de la partie extérieure RF de la premiere par la ligne entiere RH, eſt au rectangle RE×RI de la partie extérieure RE de la ſeconde par la ligne entiere RI; comme le quarré $\overline{PT}$ de la tangente du diametre de la premiere, eſt au quarré $\overline{LT}$ de la tangente du diametre de la ſeconde* (Fig. 502).

Même démonſtration que pour la parabole (669).

PROPOSITION XXXV.

798. *Une tangente LT étant donnée, avec l'ordonnée LS au premier axe; ſi du point T on mene une ſécante TXZ, cette ſécante ſera coupée harmoniquement aux points X, V, Z, où elle eſt coupée par la courbe & par l'ordonnée LS* (Fig. 503).

Même démonſtration que pour la parabole (670): & de là on pourroit tirer les mêmes Propoſitions que nous avons déduites pour la parabole (671); & il faut dire la même choſe à l'égard de l'ellipſe. Car nous avons démontré (713) qu'une ſécante menée du point où la tangente coupe l'axe, eſt auſſi diviſée harmoniquement par la courbe & par l'ordonnée à l'axe menée du point d'attouchement.

PROPOSITION XXXVI.

799. *Deux diametres LK, ZP, étant donnés avec leurs tangentes LT, TP; ſi l'on mene une ordonnée XV à l'un des diametres LK, & qu'on la prolonge juſqu'à ce qu'elle rencontre en R la tangente PT de l'autre diametre PZ; le rectangle RX×RV de la partie extérieure RX par la ligne entiere RV, eſt au quarré $\overline{RP}$*

de la partie RP que la droite VX coupe ſur PT ; comme le quarré $\overline{LT}$ *de la tangente du diametre de VX, eſt au quarré* $\overline{TP}$ *de la tangente de l'autre diametre* (Fig. 504).

Même démonſtration que pour la parabole (672).

PROPOSITION XXXVII.

800. *Deux ſegments ALB, CPD, étant donnés ; ſi les parties LX, PS, de leurs diametres, compriſes dans ces ſegments, ſont proportionnelles à leurs diametres LK, PZ ; les plus grands triangles inſcrits dans ces ſegments ſont égaux* (Fig. 505).

Même démonſtration que pour l'ellipſe dans tous les cas (737), en ſubſtituant les propriétés de l'hyperbole, au lieu de celle de l'ellipſe.

Aſymptotes de l'Hyperbole.

801. DÉFINITION. Le premier axe AB, & le ſecond CD, étant donnés ; ſi par l'une des extrémités B du premier axe, on mene une tangente QP, ſur laquelle on prenne la partie BP, & la partie BQ, égales chacune à la moitié OD ou OC du ſecond axe ; les *lignes indéfinies OL, OY*, menées du centre O par les extrémités P, Q, de la droite QP, ſe nomment *aſymptotes* de l'hyperbole : & ſi on prolonge ces droites de l'autre côté du centre en X & en Z, elles ſeront les aſymptotes de l'hyperbole oppoſée dont le ſommet eſt A (*Fig.* 506).

802. COROLLAIRE. *Si des extrémités C, D, du ſecond axe, on mene des lignes à l'extrémité B du premier axe ; ces deux lignes ſeront égales, à cauſe de C & D également éloignés de B ; & elles ſeront coupées chacune en deux également par les aſymptotes aux points V, T.* Car menant la droite DP, la figure ODPB ſera un rectangle, & la diagonale OP coupera la diagonale BD en deux également, & la même choſe arrivera de CB. De plus, DB ſera parallele à l'aſymptote OY, à cauſe de OD, parallele & égale à QB ; & par la même raiſon, CB ſera parallele à l'aſymptote DL.

PROPOSITION XXXVIII.

803. *L'hyperbole eſt toute entiere dans l'angle YOL que ſont les aſymptotes, & elle ne les touche point* (Fig. 506).

DÉMONSTRATION. Concevons une infinité de lignes, telles que MN, menées parallèlement à la tangente, & qui coupent l'hy-

perbole & les aſymptotes. Les triangles ſemblables NEO, PBO, donnent NE. EO :: PB. BO : donc $\overline{NE}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{PB}^2$ ou $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$. Mais par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{EI}^2$. EB×EA :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$; & EB×EA=$\overline{EO}^2$—$\overline{OB}^2$ (148): donc $\overline{EI}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{OB}^2$ :: $\overline{OD}^2$. $\overline{OB}^2$; & partant $\overline{EI}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{OB}^2$ :: $\overline{NE}^2$. $\overline{EO}^2$. Mais $\overline{EO}^2$—$\overline{OB}^2$ eſt moindre que $\overline{EO}^2$: donc $\overline{EI}^2$ eſt auſſi moindre que $\overline{NE}^2$, & EI moindre que NE; c'eſt-à-dire, le point I de la courbe eſt entre les aſymptotes ſans les toucher. Et comme cela arrivera par-tout, il s'enſuit que l'hyperbole ne touchera jamais l'aſymptote OL; & on prouvera de la même façon, qu'elle ne touchera jamais l'aſymptote OY. Ce qu'il falloit démontrer.

804. COROLLAIRE I. *Si l'on conçoit une infinité de lignes, telles que MN, paralles à la tangente QP, ou au ſecond diametre, & qui coupent l'hyperbole & les aſymptotes; les parties MH, IN, de chacune de ces lignes, compriſes entre la courbe & les aſymptotes, ſeront égales entre elles* (Fig. 506).

DÉMONSTRATION. Les triangles ſemblables NEO, PBO, donnent NE. PB :: EO. BO; & à cauſe des triangles ſemblables MEO, QBO; nous avons ME. QB :: EO. BO : donc NE. PB :: ME. QB. Or PB=QB : donc NE=ME. Mais HE=EI, à cauſe que HI eſt une double ordonnée au premier axe : donc NE—EI=ME—HE; c'eſt-à-dire NI=MH.

805. COROLLAIRE II. *Poſant toujours les droites MN, paralleles à QP ou CD; les rectangles MH×HN de la partie MH de chacune de ces lignes compriſes entre la courbe & l'aſymptote, par le reſte HN de ces mêmes lignes, eſt égal au quarré $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CO}^2$ de la moitié du ſecond axe* (Fig. 506).

DÉMONSTRATION. A cauſe des triangles ſemblables MEO, QBO, nous avons ME. EO :: QB. BO : donc $\overline{ME}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{QB}^2$. $\overline{BO}^2$. Or par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{HE}^2$. EB×EA ou $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$ (148) :: $\overline{QB}^2$. $\overline{BO}^2$: donc $\overline{ME}^2$. $\overline{EO}^2$ :: $\overline{HE}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$, ou $\overline{ME}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{EO}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$. Donc en diviſant, $\overline{ME}^2$—$\overline{HE}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{EO}^2$—$\overline{EO}^2$+$\overline{BO}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$: ce qui ſe réduit à $\overline{ME}^2$—$\overline{HE}^2$. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{BO}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$.

Or, à cauſe que HI eſt diviſée en deux également en E, & que MH lui eſt ajoutée, nous avons $\overline{ME}^2$—$\overline{HE}^2$=MH×MI=MH×

HN ; à cauſe de MI=HN : donc MH×HN. $\overline{HE}^2$ :: $\overline{BO}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$, ou $\overline{HE}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$ :: MH×HN. $\overline{BO}^2$. Or nous avons $\overline{HE}^2$. $\overline{EO}^2$—$\overline{BO}^2$ :: $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CD}^2$. $\overline{BO}^2$: donc MH×HN. $\overline{BO}^2$ :: $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CD}^2$. $\overline{BO}^2$; & partant MH×HN=$\overline{QB}^2$.

806. COROLLAIRE III. *Donc tous les rectangles MH×HN ſont égaux entre eux*, puiſqu'ils ſont tous égaux au quarré $\overline{QB}^2$ ou $\overline{CO}^2$. Et il faut dire la même choſe des rectangles NI×IM (*Fig.* 506).

807. COROLLAIRE IV. *Les parties MH ou IN des droites MN, vont en diminuant à meſure que les lignes MN s'éloignent du centre O.*

DÉMONSTRATION. Les rectangles MH×HN ſont tous égaux entre eux. Or les HN vont en augmentant, à meſure qu'ils ſont plus éloignés du centre O. Car leurs parties HE, étant ordonnées au premier axe, augmentent en s'éloignant de O ; & leurs parties EN qui ſont les éléments du triangle OEN, augmentent auſſi en s'éloignant de O. Donc, puiſque les HN augmentent, il faut néceſſairement que les HM diminuent, ſi l'on veut conſerver l'égalité des rectangles MH×HN.

808. COROLLAIRE V. *Les aſymptotes OY, OL, approchent de plus en plus de l'hyperbole & ne la touchent jamais* (Fig. 506).

DÉMONSTRATION. Les doubles ordonnées HI au premier axe ſeront toujours moindres que les MN (803), & les MH ou les IN diminueront à meſure qu'elles s'éloigneront davantage du ſommet O (807) ; donc les aſymptotes approchent de plus en plus de la courbe, ſans pouvoir jamais la toucher.

809. COROLLAIRE VI. *Si d'un point quelconque H pris ſur la courbe, on mene une droite RHT parallele à l'aſymptote voiſine OY ; la partie RH de cette parallele menée du côté du centre O, ſera toute entiere hors de l'hyperbole ; & l'autre partie HT ſera toute entiere dans l'hyperbole* (Fig. 507).

DÉMONSTRATION. Je mene par le point H la droite MN parallele à QP ou au ſecond axe CD ; & entre MN & QP, je mene une autre parallele SL, compriſe entre les aſymptotes, de même que MN. A cauſe des paralleles MN, SL, & MO, HR, nous avons MH=SI. Mais la partie SZ de la parallele SL compriſe entre l'aſymptote OY & la courbe, eſt plus grande que la partie MH de la droite MN (807) : donc SI eſt moindre que SZ, & le point I de la

droite HR eſt hors de l'hyperbole. L'on prouvera de la même façon que tous les autres points de HR ſont hors de la courbe.

Je mene entre les aſymptotes en deſſous du point H, une autre droite FE parallele à QP. Ainſi nous aurons FX=MH, à cauſe des paralleles MN, FE, & FO, TR. Or la partie F*f* de la droite FE compriſe entre l'aſymptote OY & la courbe, eſt moindre que MH (807): donc FX eſt plus grand que F*f*, & le point X de la droite RHT eſt dans l'hyperbole. On prouvera de la même façon que tous les points de la partie HT ſont dans l'hyperbole.

810. COROLLAIRE VII. *Si par le centre O d'une hyperbole on mene une droite OG qui coupe l'angle YOE des aſymptotes YO, OE; cette ligne OG coupera l'hyperbole & ſera un diametre* (Fig. 507).

DÉMONSTRATION. Plus la ligne OG eſt prolongée, & plus ſes points s'éloignent de l'aſymptote OE avec qui elle fait l'angle GOE: au contraire, plus l'hyperbole eſt prolongée du côté de E, plus ſes points s'approchent de l'aſymptote (808). Or la ligne OE & l'hyperbole peuvent être prolongées à l'infini: donc à force de prolonger l'une & l'autre, il ſe trouvera néceſſairement quelque point G de la ligne OG, qui ſera plus éloignée de l'aſymptote OE, que le point correſpondant *g* de l'hyperbole ne le ſera de la même aſymptote; ainſi le point G ſera dans l'hyperbole. Mais le point O de la ligne OG eſt hors de l'hyperbole; donc cette ligne coupera la courbe en quelque point, après quoi il eſt viſible qu'elle ne la coupera plus.

PROPOSITION XXXIX.

811. *Si de deux ou pluſieurs points X, R, pris ſur la courbe, on mene des droites XH, XS, & RL, RI, paralleles aux aſymptotes; les rectangles XH×XS, RL×LI, ſeront égaux entre eux* (Fig. 508).

DÉMONSTRATION. Je mene par les points X, R, des droites HE, MN, paralleles à QP ou CD & qui ſe terminent aux aſymptotes. Les triangles ſemblables MHX, HRI, donnent MX. HX :: HR. RI; & à cauſe des triangles ſemblables NXS, ERL, nous avons NX. XS :: ER. RL. Multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la premiere, nous aurons MX×NX. HX×XS :: HR×ER. RI×RL. Mais les rectangles MX×NX, HR×ER, ſont égaux entre eux (806): donc les rectangles HX×XS, RI×RL, le ſont auſſi. C. Q. F. D.

812. COROLLAIRE I. *Si du ſommet B on mene les droites BV, BT,*

BT, paralleles aux aſymptotes, leſquelles ſeront égales, parce-qu'elles ſont les moitiés des lignes BD, BC, menées aux extrémités D, C, du petit axe (802) *; je dis que les rectangles HX×XS & RL×RI, ſeront égaux chacun au quarré de VB ou de ſon égale BT* (Fig. 508).

DÉMONSTRATION. Menons au ſommet B de l'hyperbole la droite QP, laquelle eſt égale au petit axe CD, & coupée en deux également en B (801). Les triangles ſemblables MXH, QBV, donneront MX. XH :: QB. BV : & à cauſe des triangles ſemblables NXS, PBT, nous aurons NX. XS :: PB. BT : donc en multipliant les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons MX×NX. XH×XS :: QB×PB ou $\overline{QB}$. BV×BT ou $\overline{BV}$. Or MX ×NX=$\overline{QB}$ (802): donc XH×XS=$\overline{BV}$. Mais XH×XS=RI×RL: donc auſſi RI×RL=$\overline{BV}$.

REMARQUE. Il y a bien des Auteurs qui nomment le quarré de BT, ou de BV ſon égale, *puiſſance de l'hyperbole*, à cauſe que ce quarré eſt toujours égal aux rectangles XH×XS, RI×RL, &c.

813. COROLLAIRE II. *Si d'un point quelconque X pris ſur l'hyperbole on mene une ligne XH parallele à l'aſymptote OF qui eſt de l'autre côté de l'hyperbole; le rectangle XH×OH de la ligne XH par la partie OH qu'elle coupe ſur l'aſymptote OY, eſt toujours égal au quarré de BV, c'eſt-à-dire à la puiſſance de l'hyperbole* (Fig. 508).

DÉMONSTRATION. Menons du point X la droite XS, parallele à l'aſymptote OY : nous aurons HX×XS=$\overline{BV}$ (812). Or à cauſe des paralleles HX, OS, & HO, XS, nous avons HO=XS: donc HX×XS=HX×XO; & partant HX×HO=$\overline{BV}$. Ceci eſt la propriété de l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

PROPOSITION XL.

814. *Si de deux ou pluſieurs points X, R, pris ſur l'hyperbole on mene des lignes XT, RS, paralleles entre elles, & qui faſſent avec l'aſymptote OY tel angle que l'on voudra; & que des mêmes points on mene d'autres lignes XH, RL, auſſi paralleles entre elles, & qui faſſent avec l'autre aſymptote OF un angle quelconque; je dis que les rectangles TX×XH, SR×RL, &c. ſont tous égaux entre eux* (Fig. 509).

DÉMONSTRATION. Je mene par les points X, R, des droites MN,

EI, entre les aſymptotes, & paralleles au ſecond axe CD. Les triangles ſemblables MTX, ERS, donnent TX. MX :: SR. ER : & à cauſe des triangles ſemblables HXN, LRI, nous avons HX. XN :: LR. RI. Multipliant donc les termes de cette proportion par ceux de la précédente, nous aurons TX×HX. MX×XN :: SR×LR. ER×RI. Mais MX×XN=ER×RI : donc TX×HX=SR ×RL. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLI.

815. *Si l'on mene entre les aſymptotes une ligne MN, qui coupe l'hyperbole & qui ſoit inclinée au premier axe, les parties MX, RN, de cette ligne, compriſes entre la courbe & les aſymptotes, ſont égales* (Fig. 510).

Démonstration. Je prends ſur la droite MN une partie NR égale à la partie MX, ſans m'embarraſſer ſi l'extrémité R de cette partie eſt en dedans ou en dehors de l'hyperbole; du point R je mene les lignes RT, RH, paralleles aux aſymptotes, & du point X les droites XE, XS, paralleles auſſi aux aſymptotes. C'eſt pourquoi ſi le point R eſt véritablement ſur la courbe, il s'enſuivra néceſſairement que les rectangles RH×RT, SX×XE, ſeront égaux (811). Voyons donc ſi nous trouverons cette égalité.

Les triangles ſemblables MSX, RHN, ayant le côté MX égal au côté NR par la conſtruction, ſont égaux, & MS=RH, SX=HN. Or à cauſe des paralleles, nous avons SX=OE, & RH=TO; donc OE=HN, & partant OH ou TR=EN; de même MS=TO. Les triangles ſemblables MSX, XEN, donnent MS ou TO. SX :: XE. EN ou OH; donc TO×OH ou RH×RT=SX×XE; par conſéquent le point R eſt véritablement ſur la courbe. C. Q. F. D.

816. Corollaire I. *Pluſieurs lignes MN, SL, paralleles entre elles & obliques à l'axe, étant menées entre les aſymptotes; ſi du centre O l'on mene leur diametre OT, & du ſommet Z la tangente HV qui ſera parallele aux lignes MN, SL, &c. je dis que cette tangente ſera diviſée en deux également en Z* (Fig. 511).

Démonstration. Les doubles ordonnées XR, YI, au diametre OT ſont coupées en deux également en E, T, par ce diametre; donc ſi on leur ajoute de part & d'autre les parties égales MX, RN, & SY, IL (815), nous aurons ME=EN, & ST=TL. Or les triangles ſemblables OEN, OZV, donnent EN. ZV :: OE. OZ : & à cauſe des triangles ſemblables OEM, OZH, nous avons ME.

HZ :: OE. OZ; donc EN. ZV :: ME. HZ. Mais EN=ME; donc ZV=ZH.

817. COROLLAIRE II. *Posant les mêmes choses que dans le Corollaire précédent, les rectangles MX×XN, SY×YL, &c. des parties MX, SY, des droites MN, SL, par les restes XN, YL, de ces mêmes droites, sont égaux entre eux & au quarré de la moitié ZV ou ZH de la tangente du diametre OT.*

DÉMONSTRATION. Par les points Y, X, Z, je mene les droites Q*q*, P*p*, F*f*, paralleles entre elles & au second axe. Les triangles semblables SYQ, MXP, donnent SY. QY :: MX. PX; & à cause des triangles semblables LY*q*, NX*p*, nous avons LY. Y*q* :: NX. X*p*: multipliant donc les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons SY×LY. QY×Y*p* :: MX×NX. PX×XP. Or QY×Y*q*=PX×X*p* (806) :: donc SY×LY=MX×NX.

Maintenant la droite F*f* n'étant pas tangente au point Z, coupera l'hyperbole en deux points: & à cause des triangles semblables MXP, HZF, & NX*p*, VZ*f*, nous aurons MX. PX :: HZ. FZ, & NX. X*p* :: VZ. Z*f*. Donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons MX×NX. PX×X*p* :: HZ×VZ ou $\overline{HZ}$. FZ×Z*f*. Mais PX×X*p*=FZ×Z*f* (806): donc MX×NX =$\overline{HZ}$. Or MX×NX=SY×YL: donc SY×YL=$\overline{HZ}$.

818. COROLLAIRE III. *Donc toutes les tangentes terminées entre les deux asymptotes, sont coupées en deux également aux points d'attouchement.* Ce qui est visible par le précédent Corollaire.

819. COROLLAIRE IV. *Deux ou plusieurs tangentes MT, LR, étant menées entre les asymptotes; les triangles MTO, RLO, qu'elles font avec les asymptotes, sont égaux entre eux* (Fig. 512).

DÉMONSTRATION. Des points d'attouchement N, S, je mene les droites NP, NV, SX, SZ, paralleles aux asymptotes, ce qui donne PN×NV=XS×ZS (811): d'où je tire NV. ZS :: XS. PN. Or les parallélogrammes PNVO, XSZO, ayant l'angle POX commun, sont équiangles; & à cause que leurs bases NV, ZS, sont réciproques à leurs côtés XS, PN, leurs hauteurs, c'est-à-dire les perpendiculaires X*x*, P*p*, seront aussi réciproques aux bases: car les triangles semblables X*x*S, P*p*N, donneront X*x*. P*p* :: XS. PN, & partant X*x*. P*p* :: NV. ZS. Donc nous aurons X*x*×ZS=P*p*×NV, c'est-à-dire les parallélogrammes XSZO, PNVO, égaux entre eux.

Or à cauſe que la tangente MT eſt diviſée en deux également en N, & que PN eſt parallele à OR; le côté MO du triangle MOT eſt double du côté PO du parallélogramme PNVO, & ſa baſe OT eſt auſſi double de la baſe OV ou PN du même parallélogramme: donc le triangle MOT eſt double du parallélogramme PNVO; & par la même raiſon le triangle LRO eſt double du parallélogramme XSZO: donc, puiſque les parallélogrammes PNVO, XSZO, ſont égaux, les triangles MOV, RML, ſont auſſi égaux.

820. COROLLAIRE V. *Les triangles MTO, RLO, faits par deux tangentes MT, LR, avec les aſymptotes, ont les côtés autour de l'angle commun O réciproques entre eux.* Nous venons de trouver (819) NV ou PO. ZS ou OX :: SX ou OZ. PN ou VO, c'eſt-à-dire, PO. OX :: OZ. OV: donc en doublant tous les termes, nous aurons MO. OR :: OL. OT (*Fig.* 512).

HYPERBOLES CONJUGUÉES.

821. DÉFINITION. Deux hyperboles oppoſées ZAX & PBQ étant décrites avec leurs aſymptotes Yy, Tt (*Fig.* 513); ſi l'on prend le ſecond axe CD de ces hyperboles pour le premier axe de deux autres hyperboles MC*m*, ND*n*, qui auront leurs ſommets en C & D, & dont le ſecond axe ſera le premier AB, ces deux nouvelles hyperboles ſe nommeront *conjuguées* des deux hyperboles oppoſées.

PROPOSITION XLII.

822. *Les hyperboles conjuguées ont les mêmes aſymptotes que les hyperboles oppoſées* (Fig. 513).

DÉMONSTRATION. Je mene par les ſommets A, B, des hyperboles oppoſées & entre les aſymptotes, les tangentes HL, RS, leſquelles ſeront paralleles & égales chacune au ſecond axe CD de ces hyperboles (781), & diviſées chacune en deux également en A & B, de même que CD eſt diviſé en O. Donc en joignant leurs extrémités par les droites HR, LS, ces droites ſeront paralleles & égales chacune au premier axe AO des hyperboles oppoſées, & elles ſeront diviſées en deux également en C & D par les extrémités de CD.

Or CD eſt le premier axe des hyperboles conjuguées, AB eſt le ſecond; & les droites HR, SL, qui paſſent par le ſommet de ces hyperboles, ſont égales & paralleles à AB, & de plus elles ſont diviſées également en C & D, de même que AB l'eſt en O: donc

ſi du centre O on mene Yy, Tt, qui paſſent par les extrémités R, L, S, H, de ces lignes ; les droites Yy, Tt, ſeront les aſymptotes des conjuguées (801). Or elles ſont auſſi les aſymptotes des hyperboles oppoſées, puiſqu'elles paſſent par les extrémités des droites RS, HL : donc, &c.

823. COROLLAIRE I. *La puiſſance des hyperboles conjuguées eſt la même que celle des hyperboles oppoſées* (Fig. 513).

DÉMONSTRATION. Je mene les lignes AC, CB, BD, DA, leſquelles ſeront égales entre elles, à cauſe des extrémités A, B, de l'axe AB également éloignées des extrémités C, D, de l'axe CD ; & de plus, elles ſeront diviſées chacune en deux également par les aſymptotes, & BV=VD. Or $\overline{BV}^2$ eſt la puiſſance des hyperboles oppoſées (812), & $\overline{DV}^2$ eſt la puiſſance des conjuguées. Donc, &c.

824. COROLLAIRE II. *Tout ce que nous avons dit touchant les hyperboles oppoſées, doit ſe dire auſſi touchant les conjuguées.* Ce qui eſt évident.

825. REMARQUE. Ceci peut nous faire voir aiſément d'où vient que dans l'hyperbole la propriété des ordonnées au ſecond axe n'eſt pas la même que la propriété des ordonnées au premier. Car nous avons vu que le quarré d'une ordonnée Ff au premier axe AB, eſt au rectangle FB×AF, ou au quarré $\overline{OF}^2$ de ſa diſtance au centre moins le quarré $\overline{OB}^2$ du demi premier axe ; comme le quarré du ſecond axe CD eſt au quarré du premier AB (770) : & qu'au contraire le quarré $\overline{fm}^2$ d'une ordonnée au ſecond axe CD, eſt au quarré de ſa diſtance mO au centre plus le quarré OD du demi ſecond axe ; comme le quarré du premier axe AB eſt au quarré du ſecond (773) : ce qui eſt bien différent.

Mais ſi nous rapportons cette ordonnée fm dans ſon véritable lieu, c'eſt-à-dire, dans l'hyperbole conjuguée, en prolongeant Ff juſqu'à ce qu'elle coupe la conjuguée en N ; & menant enſuite l'ordonnée Nd qui ſera égale à fm, on trouvera que le quarré de cette ordonnée eſt au rectangle dD×CD, ou à $\overline{Od}^2$—OD, comme le quarré $\overline{BA}^2$ eſt au quarré $\overline{CD}^2$; & par conſéquent la propriété de l'ordonnée Nd au ſecond axe CD de l'hyperbole PBQ, ſera ſemblable à la propriété de l'ordonnée Ff au premier axe de cette hyperbole.

826. COROLLAIRE III. *Tous les premiers diametres des hyperboles oppoſées PBQ, ZAX, ſont des ſeconds diametres des hyperboles conjuguées; & tous les premiers diametres des hyperboles conjuguées ſont des ſeconds diametres des hyperboles oppoſées* (Fig. 514).

DÉMONSTRATION. Nous avons déja dit que les premiers diametres d'une hyperbole ſont ceux qui la coupent, & que les ſeconds ſont ceux qui ne la coupent pas; & que les uns & les autres doivent paſſer par le centre O. Cela poſé, tout diametre V*u* des hyperboles oppoſées doit paſſer par les angles YOT, *t*OI, des aſymptotes qui embraſſent ces hyperboles; car autrement il eſt viſible qu'il ne les couperoit pas. Donc ce diametre ne paſſe point TOY, IO*t*, qui embraſſent les hyperboles conjuguées, & par conſéquent il ne les coupe pas: donc V*u* eſt un ſecond diametre des hyperboles conjuguées. On prouvera de la même façon, que la droite F*f*, qui eſt un premier diametre des conjuguées, eſt un ſecond diametre des oppoſées.

827. COROLLAIRE IV. *Si par les extrémités d'un premier diametre V*u *de deux hyperboles oppoſées, ou de deux hyperboles conjuguées, on mene des tangentes* Yb, I*n*, *qui ſe terminent aux aſymptotes, ces deux tangentes ſont égales* (Fig. 514).

DÉMONSTRATION. Je mene les ordonnées *ux*, V*d*, au premier axe; & à cauſe de *u*O=VO (776), les triangles ſemblables *u*O*x*, VO*d*, ſont parfaitement égaux, & *x*O=*d*O. Or pour trouver les points *g*, G, où les tangentes coupent le premier axe, il faut faire :: *x*O. BO. O*g*, & :: *d*O. AO. OG; & dans ces deux proportions, les deux premiers termes *x*O, BO, d'une part, ſont égaux chacun à chacun aux deux premiers termes *d*O, AO, de l'autre: donc le troiſieme O*g* eſt égal au troiſieme OG.

Ainſi les deux triangles *g*O*u*, GOV, ſont égaux, puiſqu'ils ont les côtés *g*O, O*u*, égaux chacun à chacun aux côtés GO, OV; & l'angle compris *g*O*u*, égal à l'angle compris GOV, à cauſe que ces angles ſont oppoſés au ſommet: donc *ug*=VG. De même les triangles ſemblables *gb*O, G*n*O, étant égaux, à cauſe de *g*O =GO, donnent *gb*=G*n*: donc *ug*+*gb*=VG+G*n*, ou *ub*=V*n*. Mais Y*b*=2*ub* (818), & I*n*=2V*n*: donc Y*b*=I*n*; & à cauſe des triangles égaux & ſemblables *g*O*u*, GOV, l'angle *gu*O eſt égal à ſon alterne GVO, & les tangentes ſont paralleles.

Et on prouvera de la même façon que les tangentes menées aux extrémités d'un premier diametre des hyperboles conjuguées

& terminées entre les aſymptotes, ſont égales & paralleles.

PROPOSITION XLIII.

818. *Un premier diametre VP des hyperboles oppoſées étant donné avec ſes deux tangentes YN, IG, terminées aux aſymptotes; je dis que ſi de l'un des points d'attouchement P on mene deux droites PS, PX, paralleles aux aſymptotes, & qui ſe terminent aux hyperboles conjuguées, ces deux lignes ſeront coupées chacune en deux également par les aſymptotes aux points H, E* (Fig. 515).

DÉMONSTRATION. Dans l'hyperbole B, le rectangle PH×HO eſt égal à ſa puiſſance (812); & par la même raiſon, dans l'hyperbole C le rectangle SH×HO eſt égal à ſa puiſſance: or les puiſſances de ces deux hyperboles ſont égales (823): donc PH×HO=SH×HO; & par conſéquent, à cauſe de la hauteur commune HO, nous aurons PH=SH.

On démontrera de la même façon que PX eſt diviſé en deux également en E.

819. COROLLAIRE I. *Poſant les mêmes choſes; ſi du point S on mene par le centre le diametre SX, ce diametre eſt égal & parallele à l'une ou l'autre des tangentes YN, IG, du diametre PV* (Fig. 515).

DÉMONSTRATION. A cauſe de la tangente YN diviſée en deux également en P (818), & de PH parallele à ON, nous avons dans le triangle YON, la baſe ON double de HP; de même que YN eſt double de YP. Or HS=HP (828): donc SP=2HP=ON; & par conſéquent, à cauſe que SP eſt parallele à ON, nous aurons SO égal & parallele à PN; & le double de SO, c'eſt-à-dire le diametre SX égal au double de PN, c'eſt-à-dire à la tangente YN.

Toute tangente YN, compriſe entre les aſymptotes, eſt égale & parallele au diametre conjugué SX de ſon diametre PV.

830. COROLLAIRE II. *Poſant encore les mêmes choſes; ſi par les extrémités des tangentes YN, IG, on mene les droites YG, NI, ces droites ſeront chacune égales & paralleles au diametre VP, & elles toucheront les hyperboles conjuguées aux extrémités S, X, du diametre SX* (Fig. 515).

DÉMONSTRATION. D'abord elles ſeront égales & paralleles chacune au diametre VP; cela eſt évident, à cauſe que les tangentes YN, GI, ſont paralleles & égales entre elles & au diametre SX; &

que de plus ces tangentes & le diametre ſont coupés en deux également par le diametre VP.

D'autre côté, les mêmes droites YG, NI, ſeront tangentes en S & X; car il eſt clair qu'elles paſſeront par ces points, & qu'elles y ſeront coupées en deux également, à cauſe que le diametre SX eſt également éloigné des deux tangentes YN, IG. Or elles ne peuvent être coupées en deux également en S & X, ſans être tangentes en ces points : car ſi elles coupoient les hyperboles en deux points, elles auroient chacune une partie en dedans des courbes, & deux parties entre la courbe & les aſymptotes qui ſeroient égales entre elles; ce qui empêcheroit que l'une des parties compriſes entre la courbe & les aſymptotes ne fût égale aux deux autres : donc il faut néceſſairement que ces droites YG, NI, ſoient tangentes en S & X.

Diametres conjugués.

831. DÉFINITION. Lorſque deux diametres VP, SX (*Fig.* 515), ſont réciproquement paralleles à leurs tangentes, c'eſt-à-dire le diametre VP parallele aux tangentes YG, NI, du diametre SX, & le diametre SX parallele aux tangentes YN, IG, du diametre PV; ces deux diametres ſe nomment *diametres conjugués.*

832. COROLLAIRE III. *Le parallélogramme de deux diametres conjugués quelconques VP, SX, c'eſt-à-dire le parallélogramme YNIG fait par leurs tangentes, eſt égal au rectangle des deux axes, c'eſt-à-dire au rectangle HTRQ fait par les tangentes de ces axes* (Fig. 516).

DÉMONSTRATION. Le triangle ONY, fait par la tangente YN du diametre PV avec les aſymptotes, eſt égal au triangle QOR fait avec les mêmes aſymptotes par la tangente QR de l'axe AB (819). Or le triangle ONY eſt le quart du parallélogramme YNIG; & le triangle QOR eſt le quart du rectangle HTRQ; donc le parallélogramme & le rectangle ſont égaux.

833. COROLLAIRE IV. *Tous les parallélogrammes des diametres conjugués ſont égaux entre eux.* Ils ſont égaux chacun au rectangle des axes. Donc, &c.

834. COROLLAIRE V. *La différence des quarrés de deux diametres conjugués quelconques, eſt égale à la différence des quarrés des deux axes de l'hyperbole* (Fig. 517).

DÉMONSTRATION. I°. Soit un demi-diametre quelconque OR, le

le demi premier axe OB, & la tangente PQ au ſommet B, laquelle eſt égale au ſecond axe (801): ainſi QB ſera la moitié de ce ſecond axe. Je mene en R la tangente YN, laquelle eſt égale au diametre conjugué du demi-diametre RO (829); & partant YR eſt la moitié de ce diametre conjugué. Je mene par les points R, B, P, N, des droites RS, BV, PM, NH, perpendiculaires à l'aſymptote OY. Le quarré de OR eſt donc égal au quarré de OS, plus le quarré de RS, à cauſe du triangle rectangle OSR; & par la même raiſon, le quarré de YR eſt égal au quarré de YS, plus le quarré de SR: & retranchant de part & d'autre le quarré de SR; la différence des quarrés des demi-diametres conjugués, OR, YR, ſera la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$.

Or à cauſe de YN diviſé en deux également en R (818), & de SR parallele à NH, nous avons YS=SH: donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{YS}^2$, eſt la même que celle des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$. Mais $\overline{SO}^2=\overline{OH}^2+2OH\times SH+\overline{SH}^2$ (140): donc la différence des quarrés $\overline{SO}^2$, $\overline{SH}^2$, eſt $\overline{OH}^2+2SH\times OH$, ou $\overline{OH}^2+YH\times OH$, ou enfin $YO\times OH$; & cette différence eſt la même que celle des quarrés des demi-diametres conjugués OR, YR.

II°. De même nous avons $\overline{OB}^2=\overline{OV}^2+\overline{VB}^2$, à cauſe du triangle rectangle OVB; & $\overline{QB}^2=\overline{QV}^2+\overline{VB}^2$, à cauſe du triangle rectangle QVB: & retranchant de part & d'autre le quarré $\overline{VB}^2$, la différence des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{QB}^2$, du premier axe & du demi ſecond axe, ſera la même que celle des quarrés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$.

Or à cauſe de QP diviſé en deux également en B & des paralleles BV, PM, nous avons QV=VM: donc la différence des quarrés $\overline{QV}^2$, $\overline{VO}^2$, eſt la même que celle des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$. Mais $\overline{VO}^2=\overline{MO}^2+2VM\times MO+\overline{VM}^2$: donc la différence des quarrés $\overline{VM}^2$, $\overline{VO}^2$, eſt $2VM\times MO\times\overline{MO}^2$, ou $MQ\times MO+\overline{MO}^2$, ou enfin $OQ\times MO$; & cette différence eſt la même que celle des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$, des deux demi-axes.

III°. Il reſte donc à faire voir que la différence $YO\times OH$ des quarrés $\overline{OR}^2$, $\overline{RY}^2$, des deux demi-diametres conjugués, eſt égale à la différence $OQ\times MO$ des quarrés $\overline{OB}^2$, $\overline{BQ}^2$, des demi-axes. Les triangles ſemblables OHN, OMP, donnent OH. HN :: OM. MP: donc en multipliant les deux premiers termes par OY, & les

deux autres par QO, nous aurons OH×OY. HN×OY :: QO.× OM. QO×MP ; ou OH×OY. QO×OM :: HN×OY. QO×MP.

Or HN×OY eſt double du triangle YON, à cauſe que HN eſt la perpendiculaire menée de ſon ſommet N ſur la baſe OY ; & par la même raiſon QO×MP eſt double du triangle QOP ; & ces deux triangles ſont en même raiſon que leurs doubles : donc OH×OY. QO×OM :: YON. QOP. Mais YON=QOP (819) : donc OH ×OY=QO×OM, c'eſt-à-dire, la différence des quarrés $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{RY}$, des deux demi-diametres conjugués, eſt la même que celle des quarrés $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QB}$, des deux demi-axes ; & par conſéquent la différence des quarrés des diametres conjugués eſt la même que celle des quarrés des deux axes.

PROPOSITION XLIV.

835. *Le quarré d'une ordonnée quelconque RS à un diametre VP, eſt au rectangle PS×SV de ſon abſciſſe par le diametre prolongé juſqu'à l'ordonnée ; comme le quarré du diametre EF conjugué du diametre VP, eſt au quarré du diametre VP* (Fig. 518).

Démonstration. Je mene les aſymptotes & la tangente HL au ſommet P du diametre VP, laquelle tangente eſt égale au diametre EF (829) ; & je prolonge l'ordonnée RS de part & d'autre juſqu'aux aſymptotes en M & en N. Les triangles ſemblables MSO, HPO, donnent MS. HP :: SO. PO : donc $\overrightarrow{MS}$. $\overrightarrow{HP}$ :: $\overrightarrow{SO}$. $\overrightarrow{PO}$: donc $\overrightarrow{MS}$—$\overrightarrow{HP}$. $\overrightarrow{HP}$ :: $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{PO}$. $\overrightarrow{PO}$.

Or, à cauſe de $\overrightarrow{HP}$=MR×RN (817), nous avons $\overrightarrow{MS}$—$\overrightarrow{HP}$= $\overrightarrow{MS}$—MR×RN ; & à cauſe de MN diviſé en deux également en S, & en deux inégalement en R, nous avons $\overrightarrow{MS}$—MR×RN= $\overrightarrow{RS}$: donc $\overrightarrow{RS}$. $\overrightarrow{HP}$ :: $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{PO}$. $\overrightarrow{PO}$; ou $\overrightarrow{RS}$. $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{PO}$ :: $\overrightarrow{HP}$. $\overrightarrow{PO}$. Or $\overrightarrow{SO}$—$\overrightarrow{PO}$=SP×SV (148) : donc $\overrightarrow{RS}$. SP×SV :: $\overrightarrow{HP}$ ou $\overrightarrow{EO}$. $\overrightarrow{PO}$ :: $\overrightarrow{EF}$. $\overrightarrow{VP}$. Ce qu'il falloit démontrer.

836. Corollaire I. *Le quarré d'une ordonnée RL au diametre EF conjugué du premier diametre PV, eſt au quarré* $\overrightarrow{LO}$, *plus le quarré* $\overrightarrow{EO}$; *comme le quarré du diametre PV eſt au quarré du diametre EF.* Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard des ordonnées au ſecond axe (773).

837. Définition. Deux diametres conjugués PV, EF, étant

donnés, la troiſieme proportionnelle au premier & au ſecond eſt le *parametre* du premier, & la troiſieme proportionnelle au ſecond & au premier eſt le *parametre* du ſecond (Fig. 518).

838. COROLLAIRE II. *Le quarré d'une ordonnée RS à un premier diametre VP, eſt au rectangle SP×SV, comme le parametre de ce diametre eſt au même diametre: & le quarré d'une ordonnée RL au ſecond diametre EF conjugué de VP, eſt au quarré* $\overline{LO}^2$, *plus le quarré* $\overline{EO}^2$, *comme le parametre de ce ſecond diametre eſt à ce ſecond diametre.* Ce qui ſe démontre de même qu'à l'égard des deux axes (771, 774).

PROPOSITION XLV.

839. *Un premier diametre PV étant donné avec ſes tangentes PX, VL, & ſon diametre conjugué EF; ſi l'on mene d'un point quelconque pris ſur la courbe une ordonnée MR au diametre PV, & une tangente MX, laquelle coupera les tangentes LV, PX, & le diametre conjugué EF; je dis,*

I°. *Que la droite PR,* c'eſt-à-dire, *le diametre VP prolongé juſqu'à l'ordonnée, eſt diviſé harmoniquement aux points P, S, V.*

II°. *Que le rectangle MR×OH de l'ordonnée MR par la partie OH du diametre conjugué que la tangente MX coupe, eſt égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué EF.*

III°. *Que le rectangle LV×PX des parties LV, PX, des tangentes du diametre PV que la tangente MX coupe, eſt encore égal au quarré* $\overline{OF}^2$ *de la moitié de l'axe conjugué* (Fig. 519).

DÉMONSTRATION. I°. A cauſe que l'ordonnée MR eſt menée du point d'attouchement M, nous avons OR. OV :: OV. OS; or la ligne OP ajoutée à la droite OR eſt égale à la moyenne proportionnelle OV. Donc nous avons RV. VS :: RP. PS (753).

Et il faut obſerver qu'on a auſſi RV. RS :: RO. RP, comme il a été obſervé dans l'endroit que je viens de citer (753).

II°. Les triangles ſemblables MSR, HSO, donnent SR. SO :: MR. OH; & multipliant les deux premiers termes par OR, & les deux autres par MR, nous aurons SR×OR. SO×OR :: $\overline{MR}^2$. OH×MR. Or, à cauſe de RV. RS :: RO. RP, nous avons SR×OR=RV×RP; & à cauſe de :: OR. OV. OS, nous avons OR×OS=$\overline{OV}^2$: donc RV×RP. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{MR}^2$. OH×MR; ou $\overline{MR}^2$. RV×

RP :: OH×MR. $\overline{OV}^2$. Mais par la propriété de l'hyperbole, nous avons $\overline{MR}^2$. RV×RP :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$ (835): donc OH×MR. $\overline{OV}^2$ :: $\overline{OF}^2$. $\overline{OV}^2$; & par conſéquent OH×MR=$\overline{OF}^2$.

III°. A cauſe de :: OR. OV. OS, nous avons OR—OV. OV :: OV—OS. OS, c'eſt-à-dire, RV. SV :: OV ou OP. OS: donc RV +SV. SV :: OP+OS. OS, c'eſt-à-dire, SR. SV :: PS. OS. Mais à cauſe des triangles ſemblables MSR, LSV, nous avons SR. SV :: MR. LV; & à cauſe des triangles ſemblables PSX, OSH, nous avons PS. OS :: PX. OH: donc MR. LV :: PX. OH; d'où je tire MR×OH=LV×PX. Mais MR×OH=$\overline{OF}^2$: donc auſſi LV×PX=$\overline{OF}^2$. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XLVI.

840. *Une tangente TPM étant donnée; ſi l'on décrit autour du premier axe AB un cercle ARBH, & que des points R, H, où la tangente TM coupe le cercle, on éleve des perpendiculaires IZ, HX, ſur cette tangente; ces perpendiculaires paſſeront par les foyers X, Z, des hyperboles oppoſées* (Fig. 520).

Demonstration. Les parties, IR, LH, des perpendiculaires IZ, HX, ſont deux cordes du cercle égales, & partant également éloignées du centre O (265): c'eſt pourquoi ſi du centre O, je mene la droite FV perpendiculaire ſur ces cordes, j'aurai FO=OV. Ainſi les triangles rectangles OVX, OFZ, étant ſemblables & égaux, j'ai FZ=VX; & retranchant d'une part FR moitié de la corde IR, & de l'autre VL moitié de la corde HL, j'ai RZ=LX. Cela poſé:

Je mene en A & B les tangentes AM, BN, qui coupent en M & N la tangente TM. Les triangles rectangles PHX, PAM, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle aigu HPX qui leur eſt commun: donc PH. HX :: PA. AM. De même à cauſe des triangles ſemblables PRZ, PBN, nous avons PR. RZ :: PB. BN: donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous avons PH× PR. HX×RZ :: PA×PB. AM×BN. Mais à cauſe que les cordes AB, RH, ſe coupent en P, nous avons PH×PR=PA×PB (279): donc HX×RZ=AM×BN. Or AM×BN=$\overline{OD}^2$ (839): donc HX× RZ=$\overline{OD}^2$; & à cauſe que RZ=XL, nous aurons HX×LX=$\overline{OD}^2$.

Mais XH, XB, étant ſécantes du cercle, donnent XA×XB=

HX×XL (273) : donc XA×XB=$\overline{OD}$: donc le point X eſt l'un des foyers (784). De même à cauſe de IZ=HX & de RZ=XL, nous avons IZ×ZR=HX×LX=$\overline{OD}$. Or les ſécantes ZI, ZA, donnent ZB×ZA=IZ×ZR : donc ZB×ZA=$\overline{OD}$; & par conſéquent le point Z eſt l'autre foyer (784). C. Q. F. D.

841. COROLLAIRE I. *Si d'un point quelconque T pris ſur l'une des hyperboles oppoſées, on mene une tangente TM, & des droites TZ, TX, aux deux foyers ; les angles ZTM, XTM, faits par ces deux droites & la tangente TM, ſont égaux* (Fig. 521).

DÉMONSTRATION. Je mene l'ordonnée TS au premier axe, & l'ordonnée PE dans le cercle. Ainſi à cauſe de SO. BO :: BO. PO (777), la tangente SE au cercle menée du point S le touchera au point E (292) : & comme TS eſt perpendiculaire ſur AS en S, & que la droite TH qui part de l'un des points TS, paſſe par le point P, où l'ordonnée EP du cercle, menée du point d'attouchement, coupe le diametre AB de ce cercle ; il s'enſuit que cette droite TH eſt coupée harmoniquement en R, P (302) ; & nous avons TR. RP :: TH. PH, ou TR. TH :: RP. PH.

Mais en menant par les points R, H, les perpendiculaires IZ, XH, ſur TH ; les triangles ſemblables PRZ, PHX, donnent RP. PH :: RZ. HX ; donc TR. TH :: RZ. HX. D'où il ſuit que les deux triangles rectangles TRZ, THX, ſont ſemblables ; à cauſe qu'ils ont les côtés TR, RZ, autour de l'angle droit dans le premier, proportionnels aux côtés TH, HX, autour de l'angle droit dans le ſecond : & par conſéquent l'angle ZTR eſt égal à l'angle XTH.

842. COROLLAIRE II. *Poſant les mêmes choſes, la différence des lignes XT, TZ, menées des deux foyers au point d'attouchement T, eſt égale au premier axe BA* (Fig. 521).

DÉMONSTRATION. Je mene du centre O au point R la droite OR, laquelle par conſéquent eſt égale à la moitié du premier axe AB : or à cauſe des angles égaux XTR, ZTR (841), & de la droite TR perpendiculaire ſur ZI par la conſtruction ; les triangles rectangles FTR, ZTR, qui ont la hauteur commune TR, ſont égaux ; & nous avons FR=RZ, & TZ=TF : ainſi XF eſt la différence des deux lignes XT, TZ, menées du point T aux foyers. Or à cauſe de XZ diviſé en deux également en O, & FZ diviſé en deux également en R, les triangles ſemblables ZFX, ZRO, donnent FX double de RO : donc FX=2RO=AB.

PROPOSITION XLVII.

843. *De tous les premiers diametres d'une hyperbole ou de deux hyperboles oppoſées, menées d'un même côté BS de l'une des hyperboles, le plus petit eſt le premier axe AB; & les autres ſont d'autant plus grands, qu'ils s'éloignent davantage de celui-ci. Et de tous les ſeconds diametres, le plus petit eſt le ſecond axe CD; & les autres ſont d'autant plus grands, qu'ils ſont plus éloignés du ſecond axe* (Fig. 522).

DÉMONSTRATION. Je mene dans l'hyperbole B pluſieurs ordonnées TM, SN, au premier axe; & de leurs extrémités T, S, je mene des diametres TP, SR. Dans le triangle rectangle OTM, nous avons $\overline{OT}=\overline{OM}+\overline{TM}$; & le triangle rectangle OSN donne $\overline{OS}=\overline{ON}+\overline{SN}$. Or, $\overline{ON}$ eſt plus grand que $\overline{OM}$, à cauſe que l'ordonnée SN eſt plus éloignée du centre O que l'ordonnée TM; & $\overline{SN}$ eſt plus grand que $\overline{TM}$, par la même raiſon: donc $\overline{ON}+\overline{SN}$ eſt plus grand que $\overline{OM}+\overline{TM}$; & partant $\overline{OS}$ eſt plus grand que $\overline{OT}$, & OS plus grand que OT.

Ainſi 2OS ou SR eſt plus grand que 2OT ou TP; c'eſt-à-dire, le diametre SR plus éloigné du premier axe, ou qui fait avec cet axe un angle plus grand, eſt plus grand que le diametre TP qui fait un angle moindre avec le premier axe; & il eſt viſible que AB doit être le moindre de tous les premiers diametres: car le ſommet B de l'hyperbole étant plus proche du centre O, que tous les autres points de la courbure; la droite OB eſt plus courte que la droite OT, & par conſéquent AB eſt plus petit que TP.

Et la même choſe ſe démontrera à l'égard des ſeconds diametres CD, LV, QX, en décrivant les hyperboles conjuguées. C. Q. F. D.

PROPOSITION XLVIII.

844. *Si du centre O, & avec un rayon OH plus grand que le demi premier axe OB, on décrit un cercle HMPRTV; la circonférence de ce cercle ne coupera l'hyperbole qu'en quatre points M, R, T, V: & ſi l'on joint ces quatre points par des droites MR, RT, TV, VM; deux de ces droites TR, VM, ſeront des doubles ordonnées au premier axe égales entre elles; & les deux autres MR, TV, ſeront des doubles ordonnées au ſecond axe égales entre elles* (Fig. 523).

DÉMONSTRATION. I°. Il eſt évident que la circonférence du cercle doit couper l'hyperbole en quatre points ; car l'extrémité H du rayon OH ne peut décrire le quart de circonférence HP ſans couper la demi-hyperbole BZ tout au moins en un point M, & la même choſe doit arriver à l'égard des autres demi-hyperboles AR, AT, VB.

II°. Le point H, en décrivant le quart de la circonférence HP, ne peut couper la demi-hyperbole BZ qu'en un point M : car s'il la coupoit en deux points, menant de ces deux points des droites au centre O, leſquelles ſeroient égales, puiſqu'elles ſeroient rayons du même cercle ; ces deux droites ſeroient auſſi des demi-diametres de l'hyperbole : & par conſéquent les doubles de ces droites, c'eſt-à-dire, les deux diametres, ſeroient égaux. Doù il s'enſuivroit que d'un même côté BMZ de l'hyperbole, on pourroit mener deux diametres égaux : ce qui eſt impoſſible (843).

III°. Du point M, où le quart de cercle HP coupe la demi-hyperbole, je mene dans le cercle une corde parallele au premier axe : cette corde ſera donc perpendiculaire ſur le ſecond axe, & par conſéquent elle ſera coupée en deux également en Q, à cauſe que ce ſecond axe paſſe par le centre O. Or, la double ordonnée au ſecond axe, menée du point M, eſt auſſi coupée en deux également en Q : donc la corde du cercle & la double ordonnée ſont égales, & par conſéquent le point R où la corde coupe le cercle, eſt le même que celui où le cercle coupe la demi-hyperbole AR.

On prouvera de même que la corde menée du point R parallèlement au ſecond axe, eſt égale à la double ordonnée TR menée du point R au premier axe ; que la corde menée du point T parallèlement au premier axe, eſt égale à la double ordonnée TV au petit axe, menée du même point ; & enfin, que la corde menée du point V parallèlement au ſecond axe, eſt égale à la double ordonnée au premier axe, menée du même point V : donc, à cauſe des paralleles TV, RM, & TR, VM, les deux doubles ordonnées TR, VM, au premier axe, ſont égales ; & les deux doubles ordonnées RM, TV, au ſecond axe, le ſont auſſi. C. Q. F. D.

PROPOSITION XLIX.

845. *Si l'on prend ſur le demi ſecond axe OD prolongé, s'il le faut, la partie OP égale au demi premier axe OB ; & qu'on porte enſuite la diſtance PB ſur le demi premier axe prolongé de O en V ; l'ordonnée TV menée du point V au premier axe, ſera égale à la moitié CQ ou OD du ſecond axe* (Fig. 524).

Démonstration. Dans le triangle rectangle isoscele POB, nous avons $\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 = 2\overline{OB}^2$, & par conséquent $\overline{OV}^2 = 2\overline{OB}^2$. Or, par la propriété de la courbe, nous avons $\overline{TV}^2$. VB×VA ou $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$; & $\overline{VO}^2 - \overline{OB}^2 = 2\overline{OB}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{OB}^2$: donc $\overline{TV}^2$. $\overline{OB}^2 :: \overline{CO}^2 . \overline{OB}^2$; & par conséquent $\overline{TV}^2 = \overline{CO}^2$, & TV=CO. Ce qu'il falloit démontrer.

846. Problême I. *Une hyperbole XBZ étant donnée, trouver ses deux axes, ses foyers, ses asymptotes, &c.* (Fig. 525).

Solution. I°. Je mene plusieurs lignes paralleles MB, NR, &c. terminées de part & d'autre à la courbe: je les divise chacune en deux également; & par les points de division, je fais passer une ligne droite [illegible], laquelle est *un diametre*. Je cherche de la même façon *un autre diametre* HV; & le point O où les deux diametres se coupent, est le *centre de l'hyperbole*.

II°. Du centre O, & avec une ouverture de compas assez grande pour pouvoir couper l'hyperbole, je décris un arc de cercle; & des points E, I, où cet arc coupe la courbe, je mene la droite EI, laquelle est une double ordonnée au premier axe (844): coupant donc cette droite EI en deux également en G, je mene du centre O la droite OG qui coupe l'hyperbole en B; & par conséquent la droite OB est la *moitié du premier axe*.

J'éleve en O la droite OS, égale & perpendiculaire à OB; & prenant la distance SB & la portant de O en G, l'ordonnée GI menée du point G est égale à la *moitié OD du second axe* (845).

III°. Ayant donc porté GI de O en D, & de O en C, perpendiculairement sur CD, pour avoir la position du second axe CD; je mene les droites CB, DB; & les divisant chacune en deux également aux points *m*, *n*, je mene par le centre O, & par les points de division *m*, *n*, les droites indéfinies O*m*L, O*nl*, qui sont les *asymptotes demandées* (802).

IV°. Enfin, prenant CB, ou DB, & le portant sur l'axe prolongé de part & d'autre de O en X, & de O en *x*, les points X, *x*, sont les *deux foyers* (783).

847. Problême II. *Une hyperbole, ou deux hyperboles opposées étant données; trouver un premier diametre qui fasse avec ses ordonnées un angle égal à un angle donné abc* (*Fig.* 526).

Solution. Je mene les asymptotes OT, OV; je décris un cercle

cercle MNL, avec un rayon quelconque; & d'un point quelconque M, menant une tangente MZ à ce cercle, je fais en M avec la tangente MZ, un angle ZML égal à l'angle TOV des aſymptotes. Ainſi l'angle ZML eſt l'angle du ſegment MIL. Je coupe la corde ML en deux également en X, & je fais dans l'autre ſegment un angle MXN égal à l'angle donné *abc.* Je mene les cordes MN, NL, & je porte la premiere MN ſur l'aſymptote OT de O en E, & l'autre NL ſur l'aſymptote OV de O en F. Je mene la droite EF, & la coupant en deux également en R, je mene du centre O la droite OR; & ſa partie OS, compriſe entre le centre O de l'hyperbole & la courbe, ſera la moitié du diametre demandé. Ce que je prouve ainſi.

L'angle du ſegment ZML vaut la moitié de l'arc MIL: or, l'angle MNL à la circonférence vaut auſſi la moitié de l'arc MIL: donc MNL=ZML. Mais ZML=EOF: donc MNL=EOF. Par conſéquent les deux triangles MNL, EOF, ſont égaux, à cauſe qu'ils ont les côtés MN, NL, égaux chacun à chacun aux côtés EO, OF; & l'angle compris MNL, égal à l'angle compris EOF. Donc l'angle NML eſt égal à l'angle OEF, & le côté ML égal au côté EF. D'où il ſuit que $\frac{1}{2}$ ML ou MX eſt égal à $\frac{1}{2}$ EF ou ER; & que par conſéquent les triangles MXN, ERO, ſont égaux & ſemblables, à cauſe des côtés MN, MX, égaux chacun à chacun aux côtés EO, ER; & de l'angle compris NMX, égal à l'angle compris OER: donc l'angle NXM eſt égal à l'angle ORE.

Or, à cauſe de EF diviſé en deux également en R, & de EP=HE (815), nous avons PR=RH: donc la ligne OR menée du centre O eſt un diametre, puiſqu'elle coupe PH en deux également, & ce diametre fait avec ſa double ordonnée un angle ORP égal à l'angle MNX, lequel a été fait égal à l'angle demandé *abc.*

848. PROBLÊME III. *Un diametre ou un demi-diametre OR, étant donné, trouver ſon diametre conjugué* (Fig. 527).

SOLUTION. Je mene les aſymptotes OX, OY, & la tangente PH au ſommet R du diametre donné: cette tangente eſt égale au diametre conjugué qu'on demande (829). Menant donc par le centre O une parallele à cette tangente, & faiſant OT=RH, & OL=PR, on aura la poſition de ce diametre.

PROPOSITION L.

849. *Si du point T pris ſur l'une des hyperboles oppoſées, on*

mene une droite TP à l'autre hyperbole ; les parties TS, RP, de cette droite, compriſes entre les courbes & les aſymptotes, ſont égales (Fig. 528).

DÉMONSTRATION. Par les points T, P, je mene entre les aſymptotes les droites MN, HL, paralleles au ſecond axe CD. Les triangles ſemblables MTR, LPR, donnent MT. TR :: LP. PR ; & à cauſe des triangles ſemblables TNS, PHS, nous avons TN. TS :: PH. PS. Donc en multipliant les termes de ces deux proportions les uns par les autres, nous aurons MT×TN. TR×TS :: LP×PH. PR×PS. Mais MT×TN=LP×PH, à cauſe que ces deux rectangles ſont égaux au quarré de la moitié CD du ſecond axe (805) : donc TR×TS=PR×PS ; & partant TR. PR :: PS. TS : donc en compoſant, TR+PR. PR :: PS+TS. TS ; ou TP. PR :: TP. TS ; & par conſéquent PR=TS. Ce qu'il falloit démontrer.

850. COROLLAIRE I. *Si entre deux hyperboles oppoſées on mene pluſieurs lignes TP, HL, &c. paralleles entre elles & au premier axe, ou à un premier diametre EF ; les rectangles TS×SP, HZ×ZL, des parties TS, HZ, de ces droites, compriſes entre l'une des courbes & la plus prochaine aſymptote, multipliées par les reſtes SP, ZL, de ces lignes, ſont égaux entre eux, & au quarré de la moitié OE du diametre, auquel ces lignes ſont paralleles* (Fig. 529).

DÉMONSTRATION. Par les extrémités T, P, H, L, des lignes TP, HL, je mene entre les aſymptotes des droites MN, *mn*, XV, *xu*, paralleles au ſecond axe. Les triangles ſemblables NTS, VHZ, donnent TN. TS :: HV. HZ ; & à cauſe des triangles ſemblables MTR, XH*r*, nous avons MT. TR :: XH. H*r* : donc en multipliant ces deux proportions l'une par l'autre, nous aurons TN×MT. TS×TR :: HV×XH. HZ×H*r*.

Or, TN×MT=HV×XH (817) : donc TS×TR=HZ×H*r*. Mais à cauſe de PR=ST, & de L*r*=HZ (849), nous avons TR=PS, & LZ=H*r* : donc TS×TR=TS×PS, & HZ×H*r*=HZ×LZ ; & partant les rectangles TS×PS, HZ×LZ, ſont égaux entre eux. Et comme à meſure que les lignes TP, HL, ſont plus proche du diametre EF, leurs parties Z*r*, RS, &c. compriſes entre les aſymptotes diminuent de plus en plus ; il eſt évident que lorſque cette partie diſparoîtra, on aura EO×OF=TS×PS=HZ×LZ.

851. COROLLAIRE. II. *Les droites TP, HL, menées parallèlement à un premier diametre EF, ſont coupées chacune en deux également par le diametre conjugué de ce diametre* (Fig. 529).

DÉMONSTRATION. Le diametre conjugué de EF, c'eſt-à-dire la droite *pq*, eſt un premier diametre de l'hyperbole conjuguée G*g*; & les ordonnées G*g*, &c. de ce diametre ſont paralleles au diametre EF, & par conſéquent aux droites TP, &c. Prolongeant donc G*g* juſqu'aux aſymptotes, la droite *ab* ſera encore diviſée en deux également, de même que G*g* l'eſt par ſon diametre *pq*; & cela à cauſe de *a*G=*bg*.

Or les triangles O*ba*, ORS, ſont ſemblables, & le diametre *pq* qui paſſe par leur ſommet O diviſe en deux également la baſe *ba* du triangle O*ba*: donc le même diametre coupe auſſi en deux également en *t* la baſe RS du triangle ORS. Ainſi ajoutant à R*t* la partie RP, & à la droite RS la partie ST égale à RP, nous aurons T*t* = *t*P: & partant la droite TP eſt diviſée en deux également en *t*, par le diametre *pq* conjugué du diametre EF; & ainſi des autres.

852. PROBLÊME IV. *Les aſymptotes YI, LV, étant données, & un point R de l'une des hyperboles oppoſées; décrire l'hyperbole* (Fig. 530).

SOLUTION. Je diviſe l'angle YOL des aſymptotes en deux également par la droite OS, & cette droite eſt dans la poſition du premier axe. Je mene par le point donné R une droite RX parallele à OS, juſqu'à ce qu'elle rencontre l'aſymptote LV en X, & alors je la prolonge juſqu'à ce que XT ſoit égal à NR. Ainſi j'ai RX × XT égal au quarré de la moitié du premier axe (850): car il eſt viſible que le point T doit être un point de l'hyperbole oppoſée à celle qu'on me demande. C'eſt pourquoi prenant une moyenne proportionnelle entre RX & XT, & la portant ſur OS de O en B, & de O en A; j'ai le premier axe AB.

Par le point donné R, je mene entre les aſymptotes la droite HM perpendiculaire au premier axe; & j'ai HR × RM égal au quarré de la moitié du ſecond axe (805): car ce ſecond axe doit être parallele à HM. Prenant donc une moyenne proportionnelle entre HR & RM, & l'élevant perpendiculairement de part & d'autre du grand axe au centre O; j'ai le ſecond axe CD: & les deux axes étant trouvés, je décris l'hyperbole, comme il a été enſeigné ci-deſſus.

Après avoir trouvé le premier axe AB, on pourroit encore plus aiſément trouver le ſecond CD, en menant par le ſommet B la tangente PQ, laquelle eſt égale au ſecond axe (801). C'eſt pourquoi ſi par le milieu O du premier axe AB, on mene une droite CD perpendiculaire ſur AB; & qu'on prenne ſur cette perpendiculaire

la partie OC égale à PB, & la partie OD égale à BQ ; on aura le ſecond axe CD dans ſa poſition.

REMARQUE. Ici finit le *Traité des Sections Coniques* de M. l'Abbé Deidier. Cet Auteur s'y borne, comme on a vu, à rechercher & à dévoiler les propriétés de ces courbes, par la *méthode de ſyntheſe*, ſans admettre pour rien dans cette recherche & dans cette expoſition la *méthode d'analyſe*.

Dans un ſiecle où le goût du Calcul Algébrique eſt ſi généralement répandu, où l'on fait un ſi grand uſage, & quelquefois un peu d'abus, de la méthode analytique ; on a cru pouvoir & devoir ajouter ce qui ſuit à cette partie de l'Ouvrage de M. l'Abbé Deidier ; ſoit pour montrer le merveilleux accord de la méthode ſynthétique & de la méthode analytique, & pour faire ſentir combien il eſt important que la premiere précede & éclaire toujours la ſeconde ; ſoit pour préparer le Lecteur à l'intelligence du Traité ſuivant, où l'Auteur applique le *Calcul de l'Infini* à la Géométrie des courbes, ſans avoir fait aſſez ſentir auparavant comment on applique le calcul ordinaire à ces mêmes courbes.

ÉQUATIONS AUX SECTIONS CONIQUES.

853. DÉFINITION. On nomme *équation à une courbe*, l'expreſſion algébrique qui en repréſente les propriétés caractériſtiques. Cette expreſſion ou cette formule algébrique eſt comme le tableau ou le réſultat abrégé des raiſonnements, ou des démonſtrations, par le moyen deſquels on a ſaiſi la nature de la courbe, ou de quelque élément fondamental de la courbe.

Dans le cercle, dans la parabole, dans l'ellipſe, dans l'hyperbole, on nomme x les abſciſſes ; on nomme y les ordonnées ; on nomme p le parametre ; on nomme a ou quelquefois $2a$ l'axe de la courbe. Par le moyen de ces ſignes ou de ces expreſſions de convention, & de quelques autres qu'on leur ajoute ſelon l'occurrence des choſes ; on a, en ſtyle algébrique, des tableaux abrégés qui préſentent à l'œil & à l'eſprit la nature d'une courbe, ou la propriété caractériſtique de quelque élément de cette courbe. Nous allons en donner quelques exemples, qu'il ſera facile d'étendre & d'appliquer, ſi l'on veut, à tout le Traité des Sections Coniques de M. l'Abbé Deidier.

Équations au Cercle.

854. HYPOTHESE. Si l'on coupe le cône droit ou incliné CAH, par

un plan parallele à ſa baſe circulaire, plus près ou plus loin du ſommet du cône indifféremment; la ſection ſera un cercle G ou E (*Fig.* 384).

La propriété fondamentale de cette courbe ou du cercle eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque NM (*Fig.* 424) eſt toujours égal au rectangle ou au produit des abſciſſes correſpondantes; ou que $\overline{NM}=AM \times MB$ (283).

Nommant donc y l'ordonnée NM; nommant x l'abſciſſe correſpondante AM; nommant $2a$ l'axe ou le diametre AB; nommant enfin $2a-x$ l'autre abſciſſe BM; on aura l'équation précédente algébriquement transformée en celle-ci, $yy=2ax-xx$.

Cette derniere équation eſt l'équation au cercle, en prenant le ſommet A pour l'origine des x ou des abſciſſes.

855. REMARQUE. Si l'on prenoit le centre O pour l'origine des abſciſſes; c'eſt-à-dire, ſi l'on faiſoit $OM=x$, & $OA=a$; l'on auroit $AM=a-x$, & $MB=a+x$. Alors l'équation précédente $yy=2ax-xx$, ſe changeroit en celle-ci, $yy=aa-xx$.

Équations à la Parabole.

856. HYPOTHESE. Si l'on coupe le cône BAC par un plan oblique à la baſe & parallele à un des côtés AB du cône; la ſection ſera une parabole ODQO (*Fig.* 385).

Une des propriétés fondamentales de cette courbe (657), eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque LX (*Fig.* 388) eſt égal au rectangle ou au produit de l'abſciſſe correſpondante DL, par le parametre RT; ou que $yy=px$.

857. REMARQUE I. De cette équation à la parabole, on déduit aiſément les deux propriétés ſuivantes de la même courbe; ſavoir:

I°. Que les quarrés des ordonnées quelconques LV & KZ ſont entre eux, comme les abſciſſes correſpondantes DL & DK; ou que $yy=x$. Car à cauſe du parametre conſtant RT ou p, qu'on peut toujours ſuppoſer $=1$; l'on aura $yy=1x=x$ (Fig. 388).

II°. Que les abſciſſes ou les x de cette courbe pouvant croître à l'infini; les ordonnées ou les y peuvent & doivent auſſi croître à l'infini, à cauſe de $yy=x$; & que par conſéquent la parabole ira toujours en augmentant, ſans pouvoir jamais ſe fermer.

858. REMARQUE II. Par les mêmes principes & par la même méthode, on peut former pluſieurs autres équations à la parabole; & on trouvera (*Fig.* 392):

I°. Que dans la parabole, la ſoutangente ST eſt double de l'abſciſſe SP (641); ou que SP=2x.

II°. Que dans la parabole, la ſouperpendiculaire ou ſounormale SL eſt égale à la moitié du parametre (645); ou que SL=$\frac{1}{2}p$.

III°. Que dans la parabole, le rayon vecteur quelconque OP eſt égal à l'abſciſſe AS, plus au quart du parametre de l'axe; ou que $r=x+\frac{1}{4}p$: & ainſi du reſte.

Équations à l'Ellipſe.

859. HYPOTHESE. Si l'on coupe le cône BAC par un plan oblique à la baſe & aux côtés du cône, en telle ſorte que la ſection coupe les deux côtés oppoſés AB & AC du cône; cette ſection ſera une ellipſe DTERD (*Fig.* 386).

L'ellipſe a pluſieurs propriétés remarquables, qui donnent pluſieurs ſortes d'équations, qu'il eſt à propos d'obſerver ſéparément (*Fig.* 424).

860. EQUATION I. En ſuppoſant que le foyer ſoit en M, le parametre de cette courbe ſera RM*r*: la propriété de cette courbe ainſi enviſagée, eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque VS eſt au produit de ſes abſciſſes correſpondantes, comme le parametre RM*r* eſt au grand axe AB; ou que $\overline{VS}.\ AS\times SB :: Rr.\ AB$.

Nommant donc $2a$, le grand axe AB; nommant $2b$, le petit axe CD; nommant p, le parametre RM*r*; l'on aura $SB=2a-x$: & alors la proportion précédente deviendra algébriquement celle-ci, $yy.\ 2ax-xx :: p.\ 2a$.

Par conſéquent, $2ayy=2apx-pxx$; & $yy=\frac{2apx-pxx}{2a}$: donc $yy=px-\frac{pxx}{2a}$.

C'eſt là l'équation au parametre de l'ellipſe, en prenant l'un des ſommets A pour l'origine des abſciſſes.

861. ÉQUATION II. Si l'on prend l'origine des abſciſſes au centre O de l'ellipſe; c'eſt-à-dire, ſi l'on prend $OS=x$; l'on aura $AS=a-x$, & $SB=a+x$. Et alors la proportion précédente $yy.\ 2ax-xx :: p.\ 2a$, ſera changée en celle-ci, $yy.\ aa-xx :: p.\ 2a$.

Par conſéquent, $2ayy=aap-pxx$; & $yy=\frac{aap-pxx}{2a}$: donc $yy=\frac{1}{2}ap-\frac{pxx}{2a}$; & c'eſt là l'équation au parametre de l'ellipſe, en prenant les abſciſſes depuis le centre O (*Fig.* 424).

862. REMARQUE. Par la premiere équation précédente, on a dans l'ellipſe $2ayy=aap-pxx$: donc $\frac{2ay}{p}=aa-xx$.

Par conſéquent x augmentant dans le ſecond membre ; ce ſecond membre, où x eſt une quantité négative, doit diminuer ; & le ſecond membre ne peut pas diminuer, ſans que le premier membre diminue également. Mais dans le premier membre $\frac{2ayy}{p}$, il n'y a que y qui puiſſe diminuer, parceque le grand axe $2a$ & le parametre p ſont des quantités conſtantes & invariables : donc, dans l'ellipſe, les abſciſſes x augmentant, il faut néceſſairement que les ordonnées y diminuent.

Mais les abſciſſes ou les x ne peuvent augmenter que juſqu'à un certain point, puiſque le grand axe de cette courbe eſt une grandeur finie & déterminée : donc les ordonnées ou les y arriveront à un point de diminution, où elles ceſſeront de pouvoir diminuer davantage ; donc l'ellipſe ſe fermera dans les deux points où les x ne ſeront plus ſuſceptibles d'augmentation, c'eſt-à-dire aux deux extrémités du grand axe, ou aux deux ſommets A & B de l'ellipſe (*Fig.* 424).

863. ÉQUATION III. Il a été démontré précédemment (690), que dans toute ellipſe le quarré d'une ordonnée quelconque SV, eſt au produit des abſciſſes correſpondantes AS & BS, comme le quarré du demi petit axe OC, eſt au quarré du demi grand axe AO ; ou que $\overline{SV}.\ AS\times BS :: \overline{CO}.\ \overline{AO}$.

Donc, en prenant l'origine des abſciſſes à l'un des ſommets, & en nommant b le demi petit axe, l'on aura la proportion ſuivante, qui ſera l'expreſſion algébrique de la précédente : $yy.\ 2ax-xx :: bb.\ aa$.

Donc $aayy=2abbx-bbxx$: donc $yy=\frac{2abbx-bbxx}{aa}$: donc $yy=\frac{2bbx}{a}-\frac{bbxx}{aa}$.

C'eſt là l'équation aux axes de l'ellipſe, en prenant l'origine des abſciſſes à l'un des ſommets.

864. ÉQUATION IV. Il été a démontré précédemment (690), que dans toute ellipſe, le quarré d'une ordonnée quelconque XP, eſt au produit des abſciſſes correſpondantes AX & BX ; comme le quarré du demi petit axe, eſt au quarré du demi grand axe. Donc en prenant l'origine des abſciſſes au centre O, l'on aura l'abſciſſe $AX=a+x$; & l'autre abſciſſe $XB=a-x$: donc l'on aura algébriquement, $yy.\ aa-xx :: bb.\ aa$.

Donc $aayy = aabb - bbxx$: donc $yy = \frac{aabb-bbxx}{aa}$: donc $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$.

C'eſt là l'équation à l'ellipſe, en prenant le centre de cette courbe pour l'origine des abſciſſes (*Fig.* 424).

865. EQUATION V. Il a été enfin démontré précédemment (691), que dans une ellipſe quelconque, le grand axe eſt au petit axe, comme le petit axe eſt au parametre : c'eſt-à-dire, en ſuppoſant l'un des foyers en M, que AB. CD :: CD. R*r*; ou algébriquement, que *a*. *b* :: *b*. *p* : c'eſt là l'équation au parametre de l'ellipſe.

866. REMARQUE. On peut par la même méthode, & d'après les mêmes principes, former pluſieurs autres équations à l'ellipſe ; & on trouvera, en nommant *d* la diſtance HO du foyer au centre (*Fig.* 443) :

I°. Que dans l'ellipſe, l'expreſſion du rayon vecteur HR, mené du foyer H au point de contingence R, eſt $r = \frac{aa-dx}{a}$.

II°. Qu'en ſuppoſant que PR eſt la tangente au point R de l'ellipſe, l'expreſſion de la ſoutangente MP eſt $\frac{aa-xx}{a}$.

III°. Qu'en ſuppoſant (*Fig.* 440) que PR eſt une tangente à l'ellipſe, & que SR eſt une perpendiculaire à cette tangente au point de contingence ; la ſouperpendiculaire MS eſt égale au quarré du demi petit axe, multiplié par l'abſciſſe, & diviſé par le quarré du demi grand axe ; & que l'expreſſion de cette ſouperpendiculaire eſt $\frac{bbx}{aa}$; & ainſi du reſte.

Équations à l'Hyperbole.

867. HYPOTHESE. Si l'on coupe le cône BAC par un plan indéfini qui ne ſoit parallele à aucun des côtés du cône, & qui, prolongé, aille couper un autre cône XAZ, oppoſé par le ſommet au premier, la ſection ſera une hyperbole ORDTQ (*Fig.* 387).

868. EQUATION I. Une des propriétés fondamentales de cette courbe (770), eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque XS (*Fig.* 487), eſt au produit des abſciſſes correſpondantes BS & AS, comme le parametre VR (on ſuppoſe ici que les foyers des deux hyperboles oppoſées ſont en M, *m*), eſt à l'axe principal AB ; ou que $\overline{XS}.\ BS \times AS :: VR.\ AB$ (*Fig.* 487).

Faiſant donc AB = 2*a*, AO ou BO = *a*, CD = 2*b*, CO ou DO = *b*, VR = *p*, XS = *y*, BS = *x* ; l'on aura AS = 2*a* + *x*. Alors la proportion

proportion précédente, algébriquement exprimée, deviendra celle-ci, $yy.\ 2ax+xx :: p.\ 2a.$

Par conſéquent $2ayy=2apx+pxx$: donc $yy=\frac{2apx+pxx}{2a}$: donc $yy=px+\frac{pxx}{2a}$.

C'eſt là l'équation au parametre de l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le ſommet. Cette équation au parametre de l'hyperbole ne differe de l'équation au parametre de l'ellipſe (860), qu'en ce que la premiere a le ſigne +, là où la derniere a le ſigne —. L'équation commune à ces deux courbes différentes eſt $yy=px \mp \frac{pxx}{2a}$: le ſigne ſupérieur eſt pour l'ellipſe, & l'inférieur pour la parabole (*Fig.* 487).

869. ÉQUATION II. Si au lieu de prendre les abſciſſes de l'hyperbole depuis le ſommet juſqu'à l'ordonnée, comme dans l'équation précédente, on prend les abſciſſes depuis le centre O de la courbe; c'eſt-à-dire, ſi l'on nomme x la ligne OS, interceptée entre le centre O & l'ordonnée SX; alors l'on aura $BS=x-a$, & $AS=x+a$.

Dans ce cas, le produit des abſciſſes correſpondantes ſera $xx-aa$, & la proportion précédente $yy.\ 2ax+xx :: p.\ 2a$, ſe changera en celle-ci, $yy.\ xx-aa :: p.\ 2a$.

Par conſéquent $2ayy=pxx-aap$: donc $\frac{2ayy}{p}=xx-aa$: & c'eſt là l'équation à l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le centre de cette courbe, centre toujours placé hors de la courbe entre les deux hyperboles oppoſées.

Sections coniques d'un genre ſupérieur.

870. DÉFINITION. On nomme *ſections coniques d'un genre ſupérieur*, celles que l'on conçoit comme tirées d'un cône dont la baſe eſt un *cercle d'un genre ſupérieur*; c'eſt-à-dire, une courbe dont les ordonnées & les abſciſſes fourniſſent une équation d'un plus haut degré que celle que donnent les ordonnées & les abſciſſes d'un cercle ordinaire (*Fig.* 424).

I°. Soit un cercle ordinaire AEBHA. Sur l'axe AB de ce cercle, ſuppoſons menées une infinité d'ordonnées NM, TS, EO, ZX: par la propriété fondamentale du cercle, le quarré de chaque ordonnée eſt égal au produit de ſes deux abſciſſes. Par exemple $\overline{MR}=AM\times MB$ (*Tome I. Géométrie.* 283).

II°. Suppoſons que ce nombre infini d'ordonnées, dont les

quarrés ſont égaux aux produits des abſciſſes correſpondantes, s'écartant également les unes des autres, deviennent chacune proportionnellement plus grandes, & que leur axe commun devienne auſſi proportionnellement plus grand; en telle ſorte que les cubes des ordonnées ſoient par-tout égaux au produit d'une abſciſſe par le quarré de l'autre; ou qu'on ait, par exemple $\overline{NM}^3 = AM \times \overline{MB}^2$: la courbe qui paſſera par l'extrémité de toutes ces ordonnées, ſera le cercle d'un genre ſupérieur qui doit être la baſe du cône dont nous allons parler.

HYPOTHESE. Soit donc un cône dont la baſe ſoit un *cercle d'un genre ſupérieur*, tel que nous venons de le décrire, & dont tous les cercles élémentaires, depuis la baſe juſqu'au ſommet, ſoient des cercles ſemblables à celui qui forme la baſe (*Fig.* 384, 385, 386, 387).

Il eſt clair qu'on pourra, par le moyen d'un plan tranchant, faire dans ce cône, des ſections analogues à celles que nous avons nommées *la parabole*, *l'ellipſe*, *l'hyperbole*; & l'on trouvera,

I°. Que la parabole formée dans ce cône, aura pour équation $y^3 = p^1 x^2$ (856).

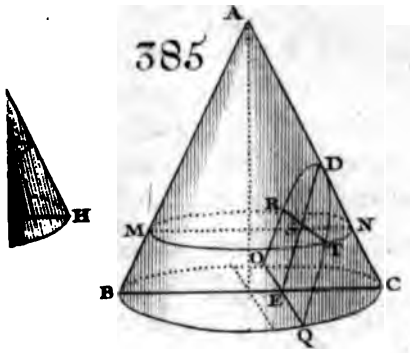
II°. Que l'ellipſe formée dans ce cône, aura pour équation $y^3 = px^2 - \frac{px^3}{2a}$ (860).

III°. Que l'hyperbole formée dans ce cône, aura pour équation $y^3 = px^2 + \frac{px^3}{2a}$ (868).

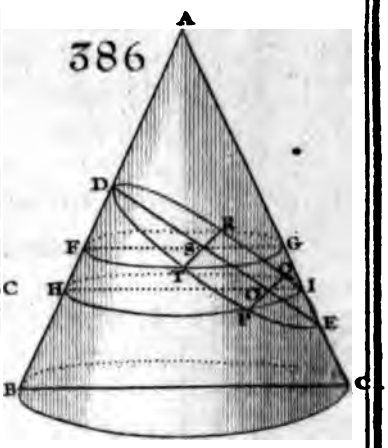
On conçoit, par ce que nous venons de dire, comment on pourroit imaginer d'autres ſections coniques d'un degré encore plus relevé. Ce que nous venons d'établir ſur les ſections coniques d'un genre ſupérieur, ne paroîtra point inutile à ceux qui s'occuperont de l'étude du Traité ſuivant.

FIN DU SECOND LIVRE.

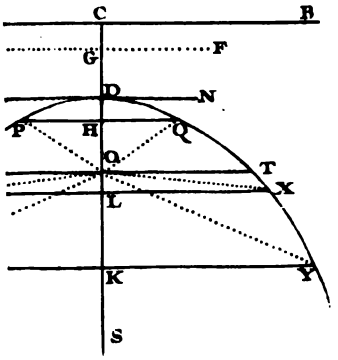
385



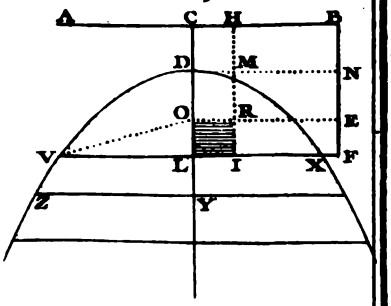
386



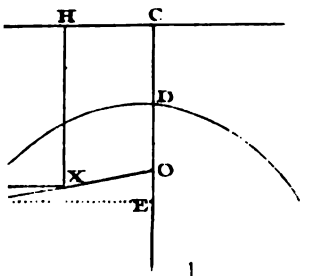
388



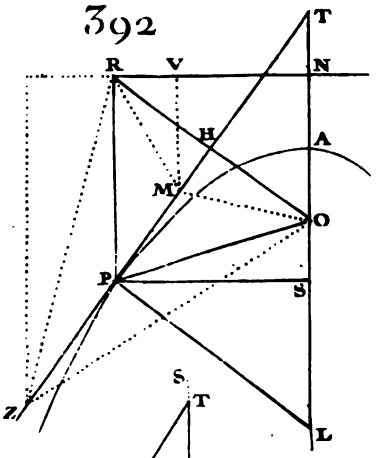
389



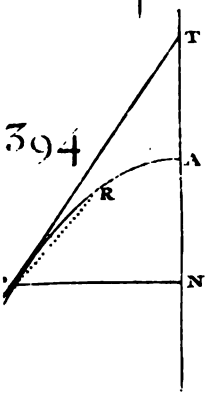
391



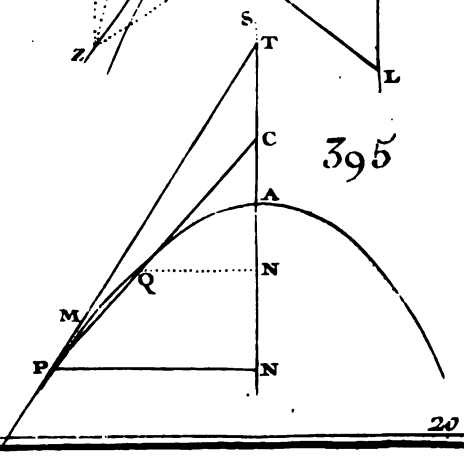
392

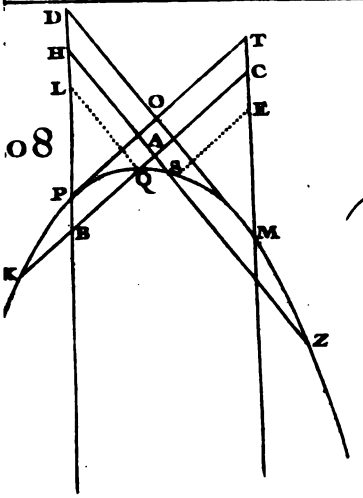


394

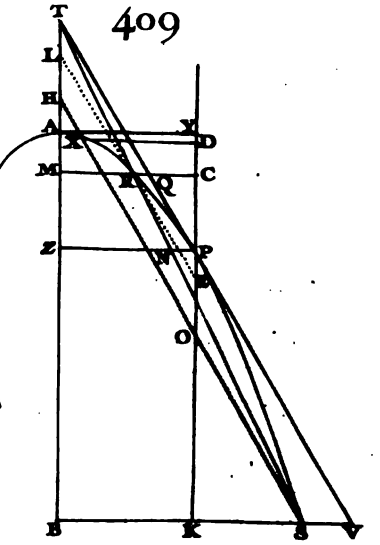


395

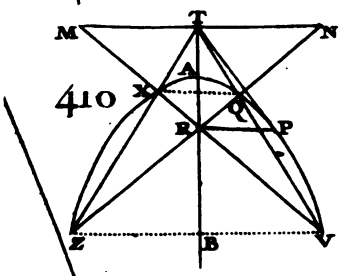




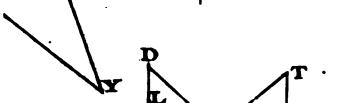
408

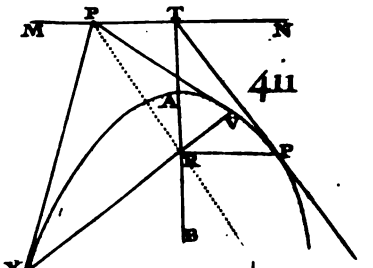


409

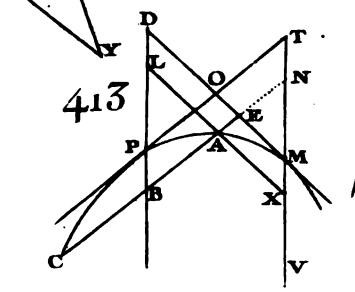


410

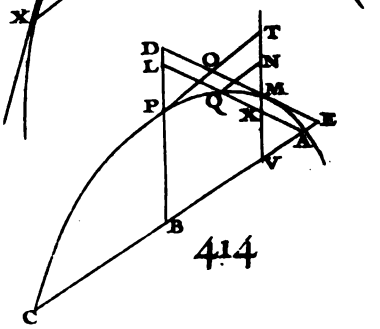




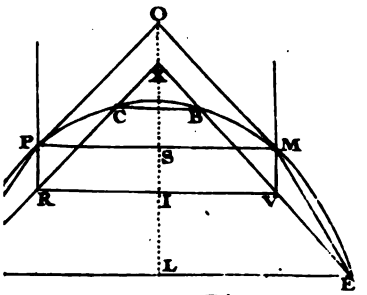
411



413

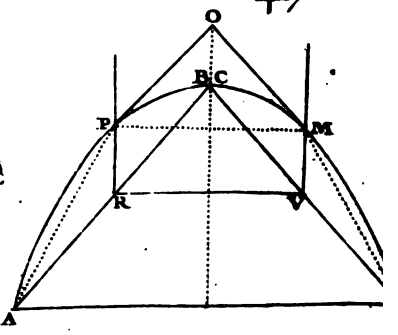


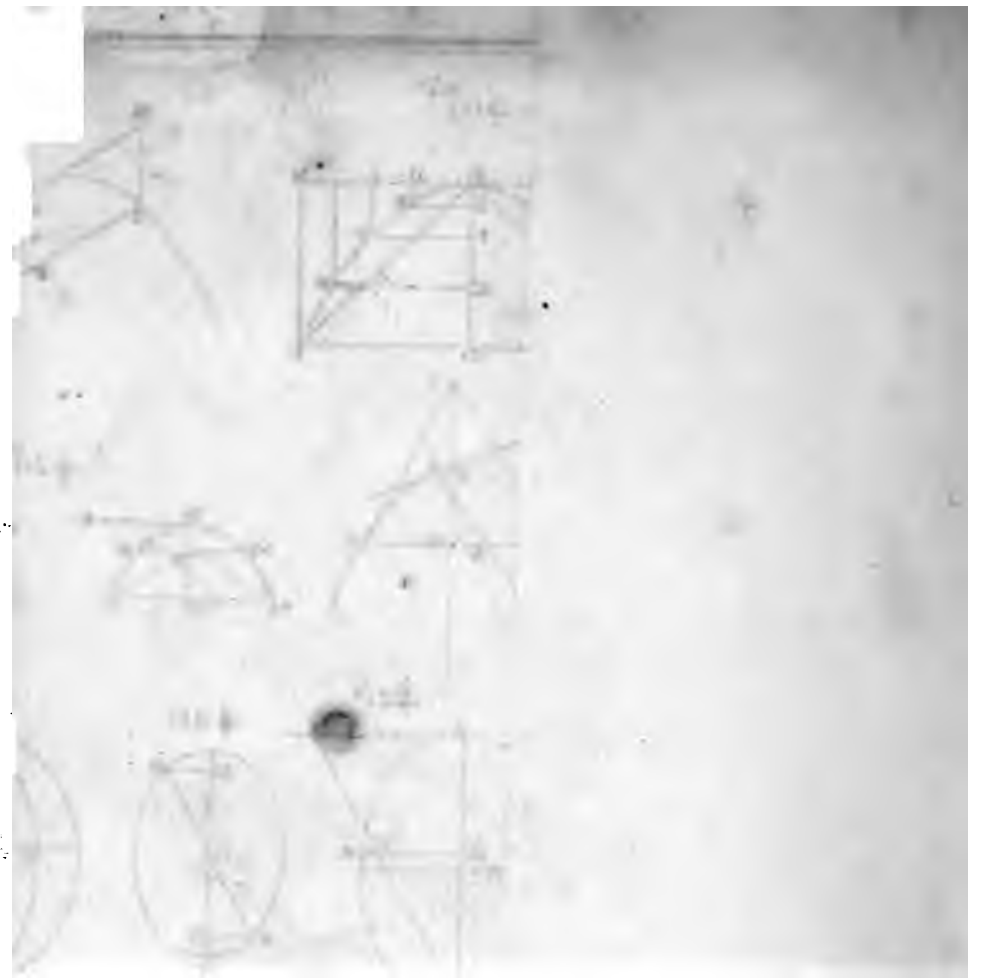
414



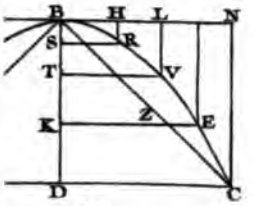
416. *Bis*

417

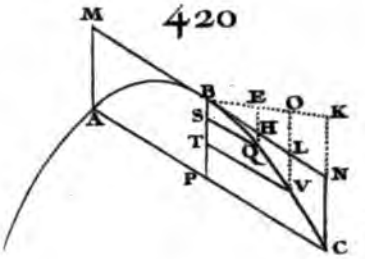


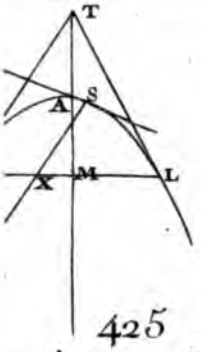


419

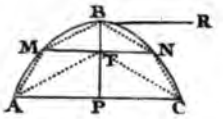


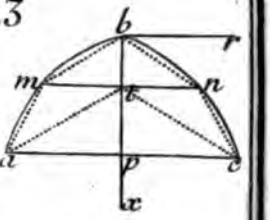
420



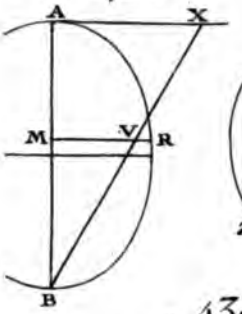


423

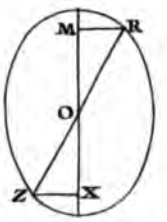




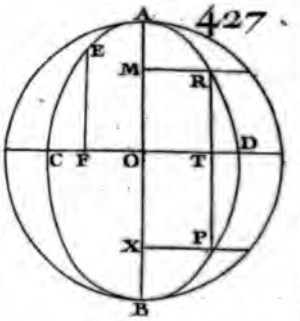
425



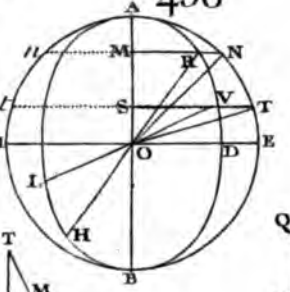
426



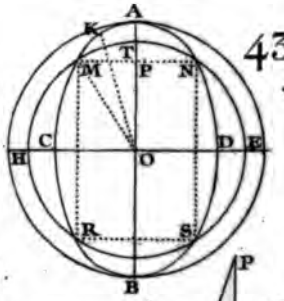
427

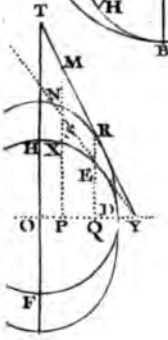


430

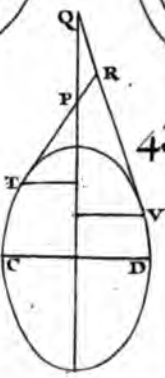


431

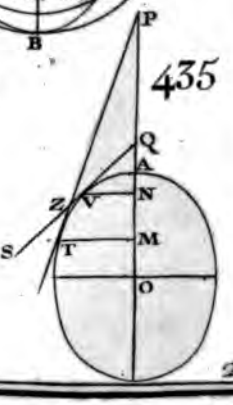


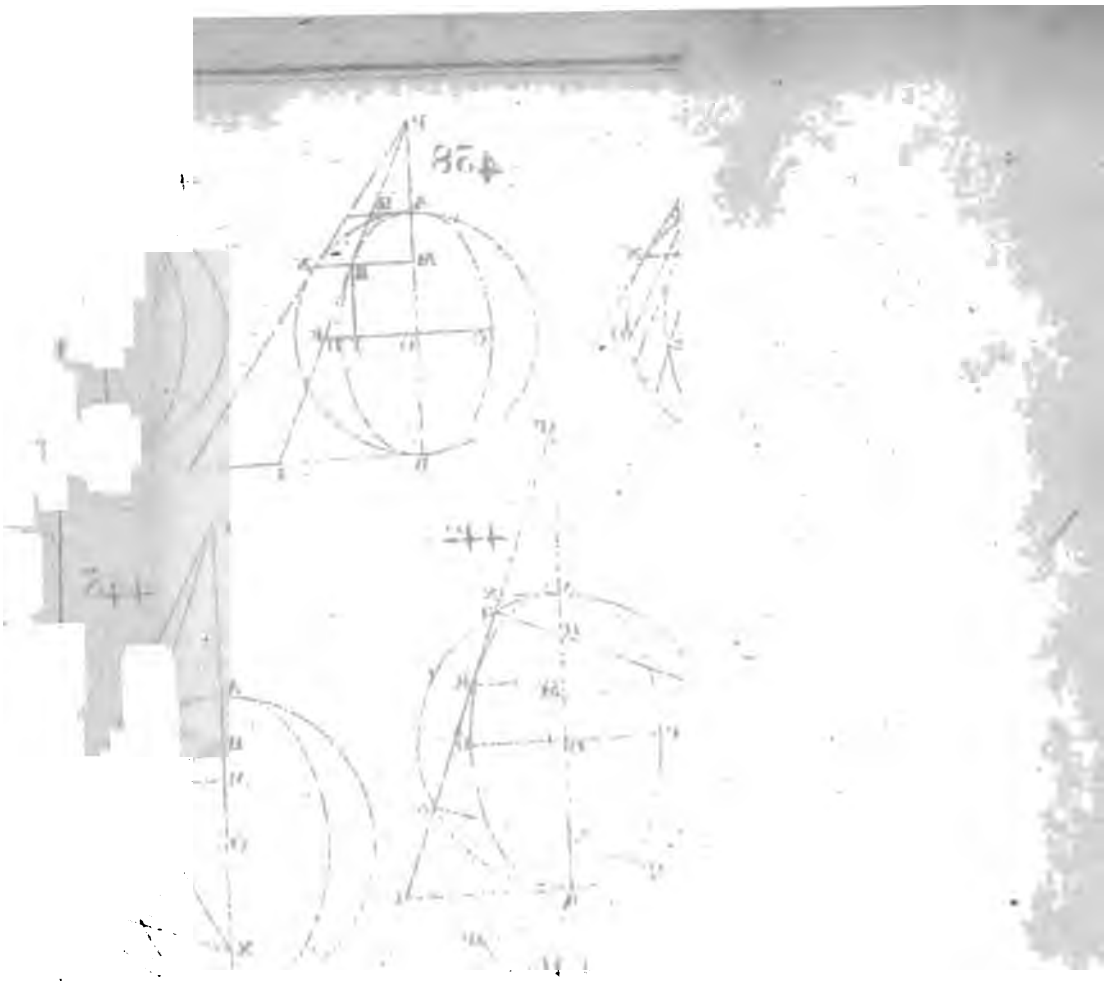


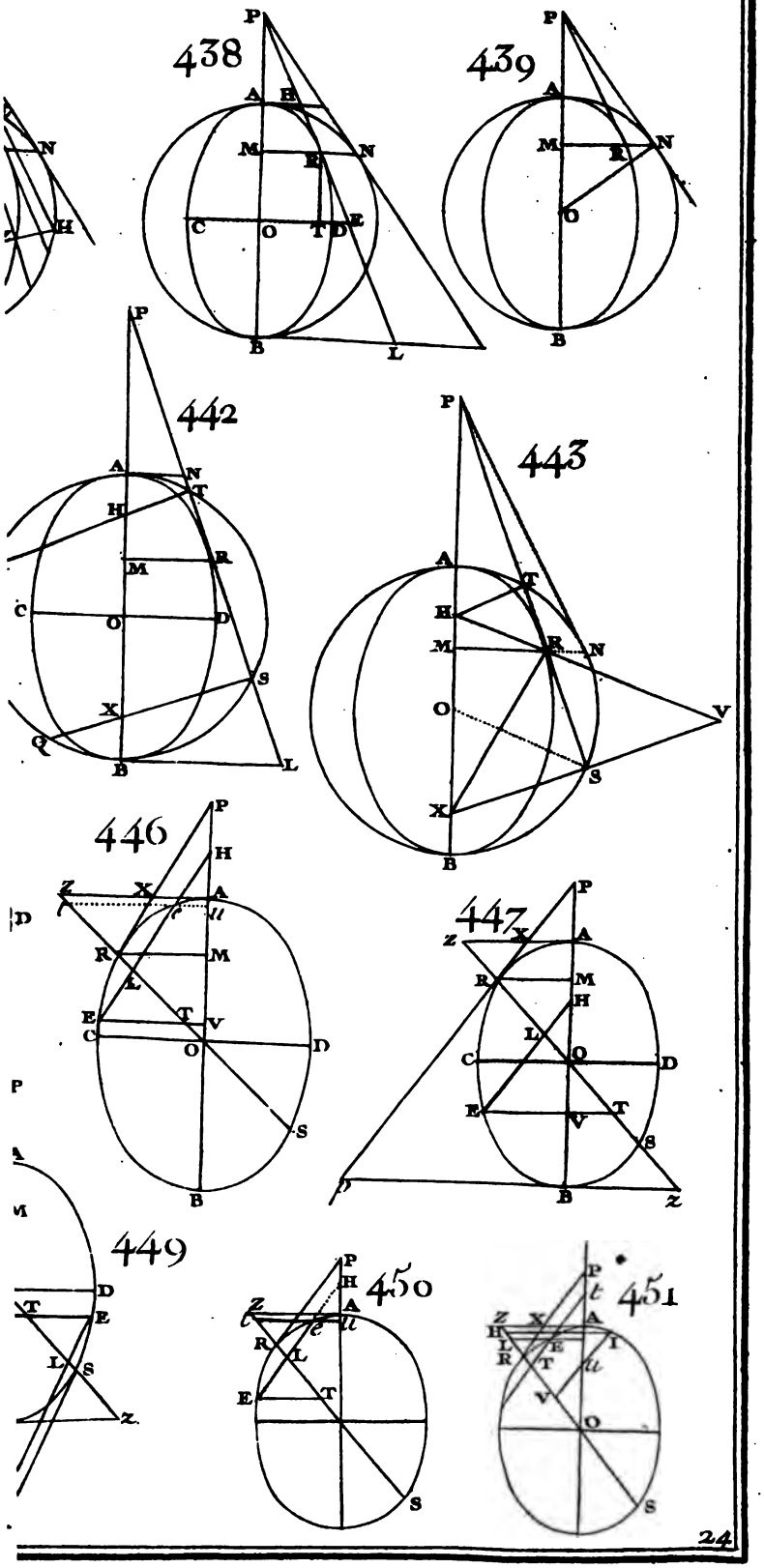
434

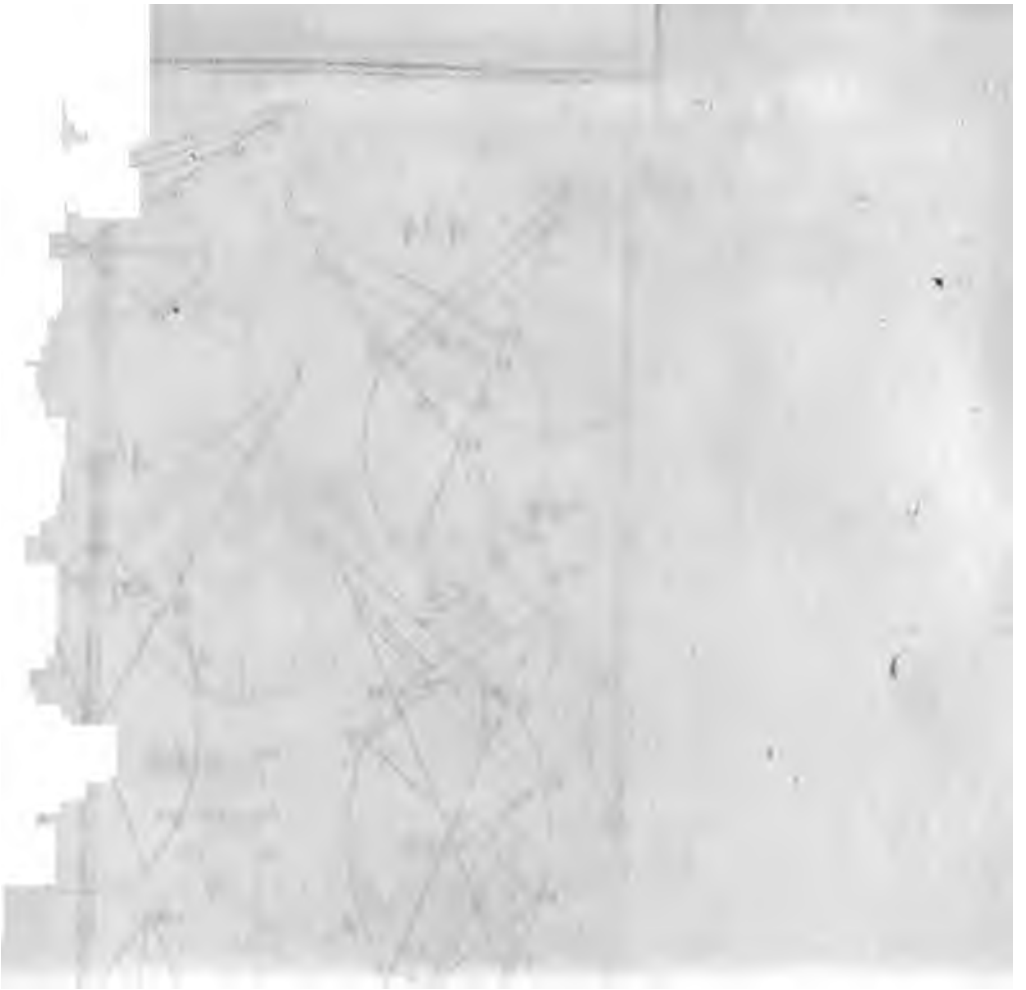


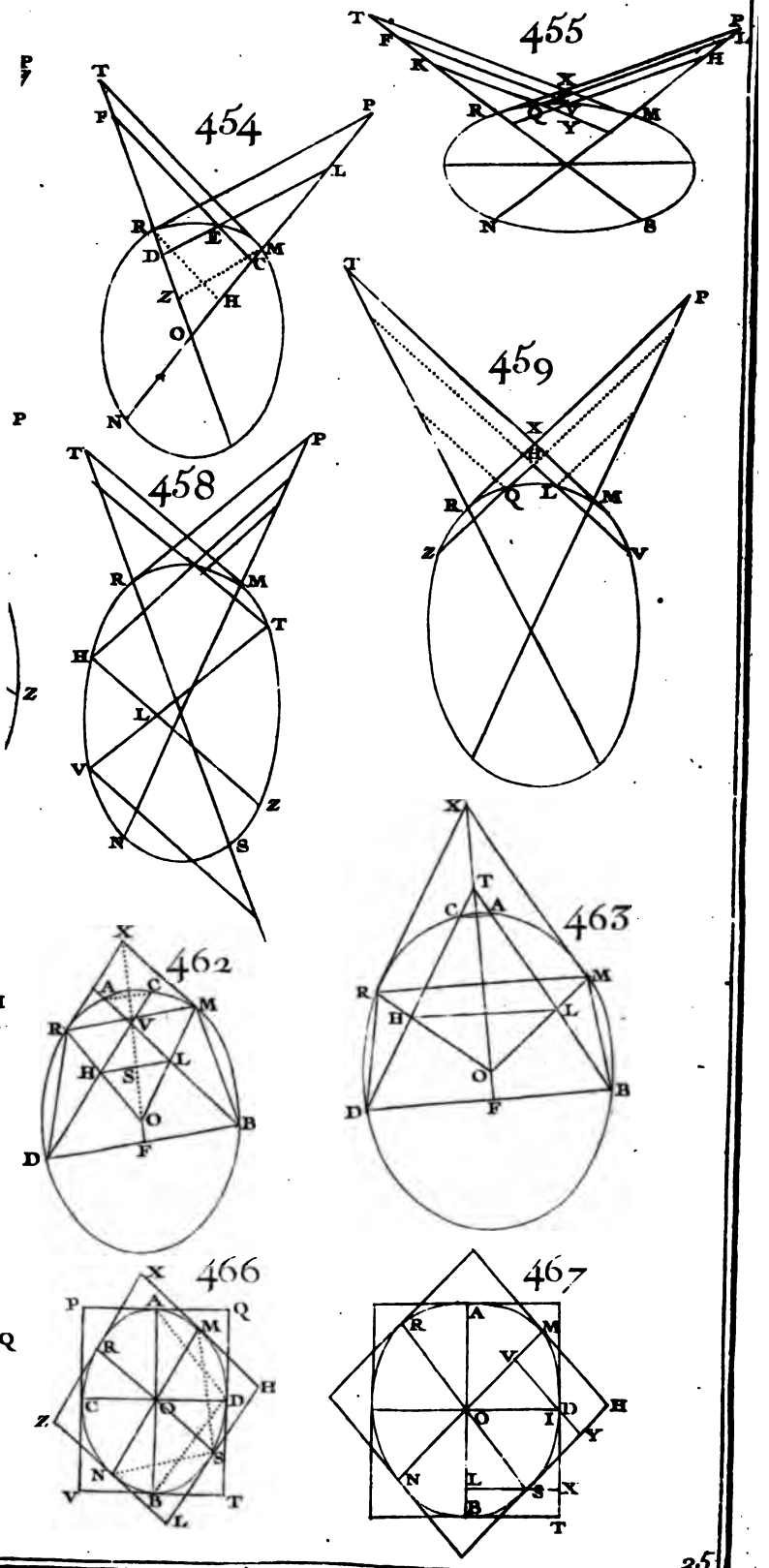
435

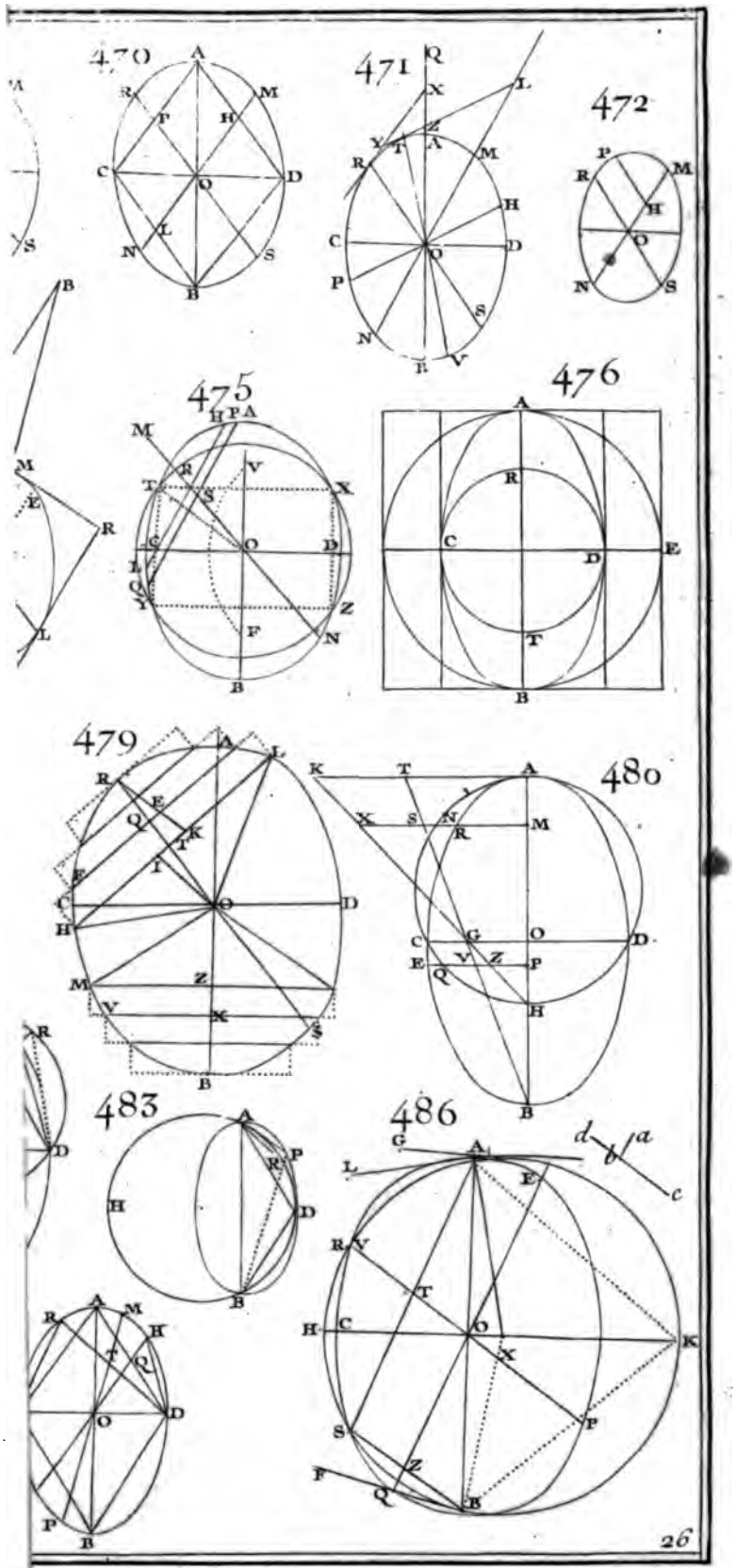


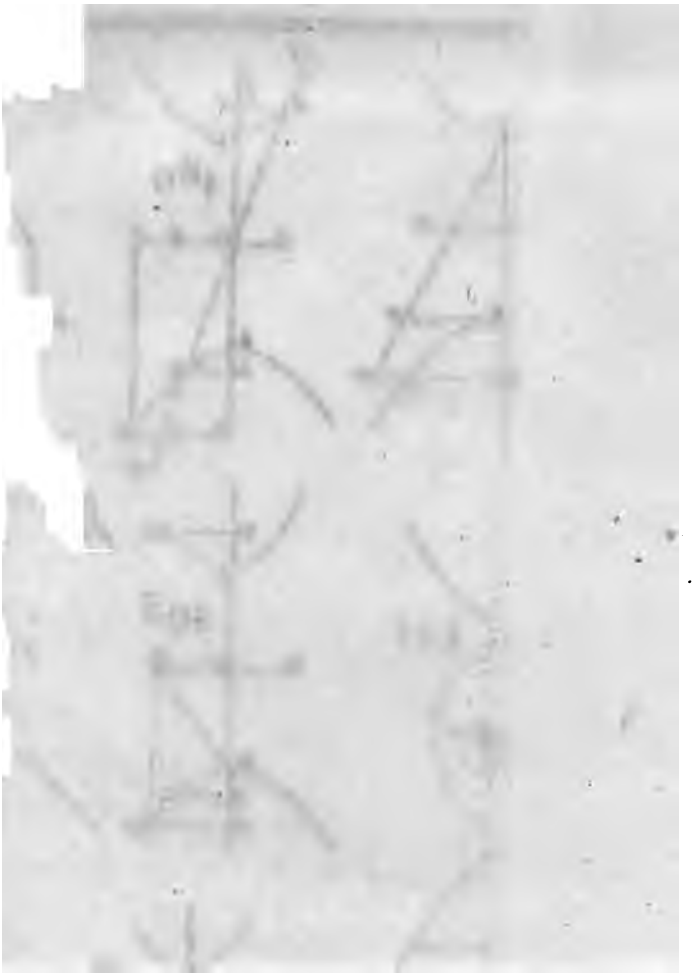


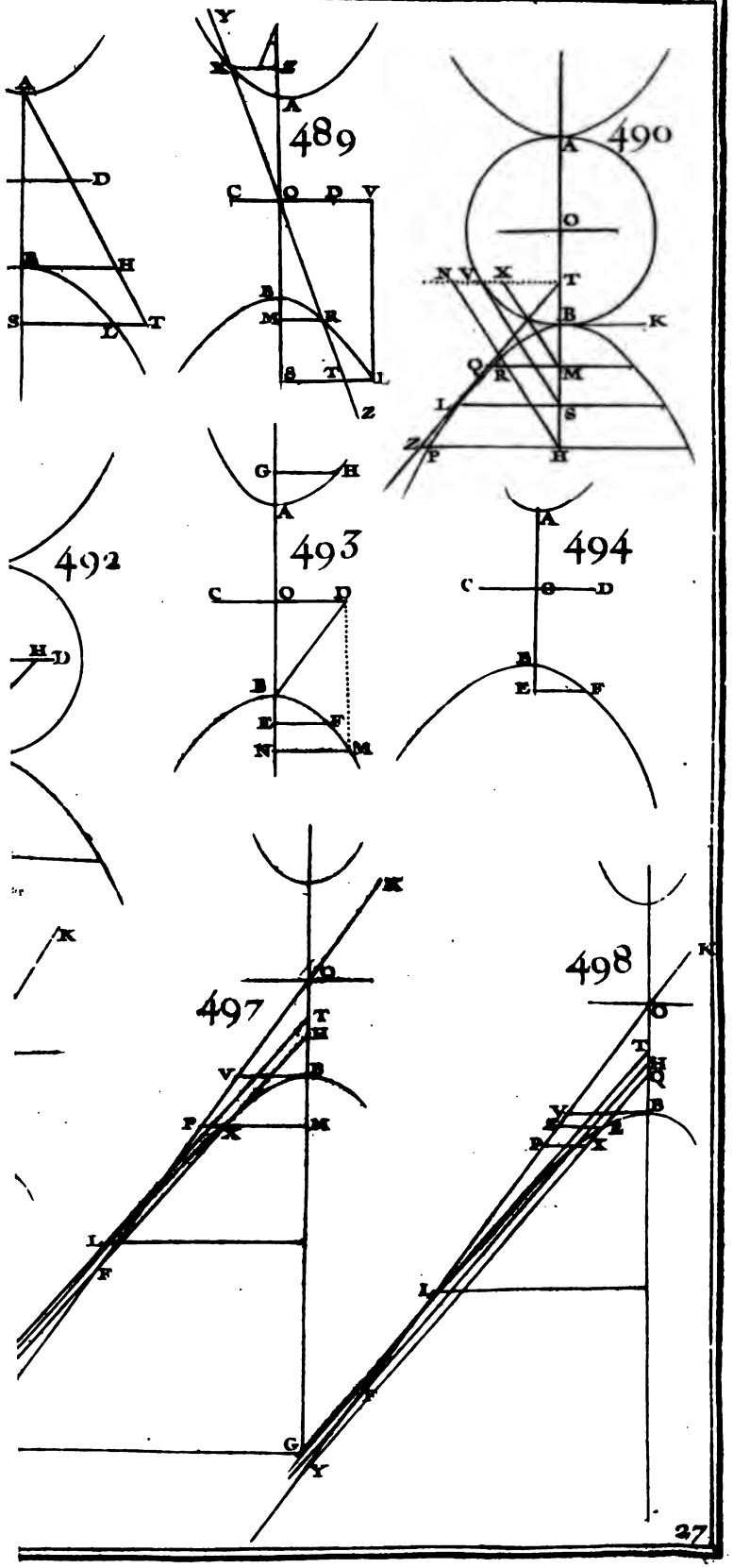

438
439
442
443
446
447
449
450
451

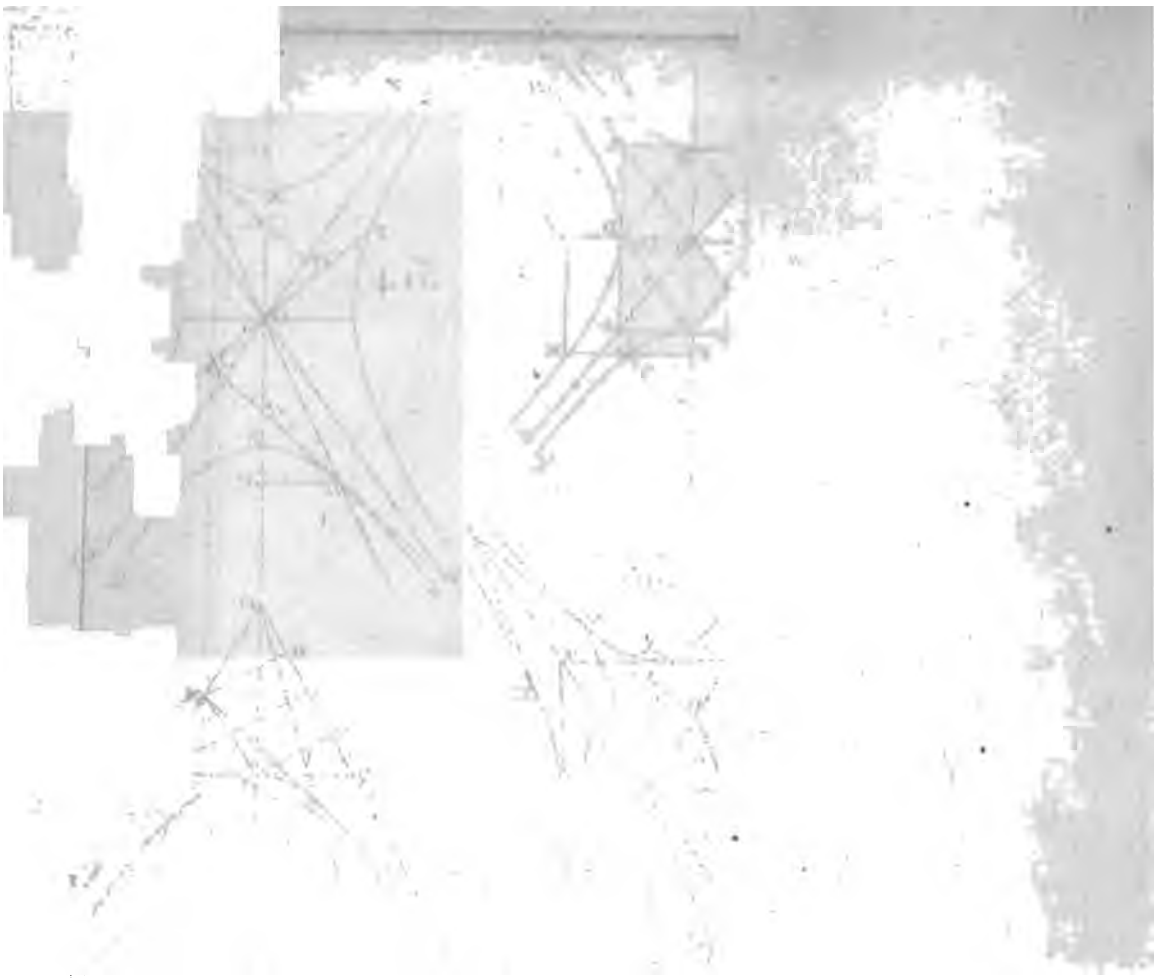


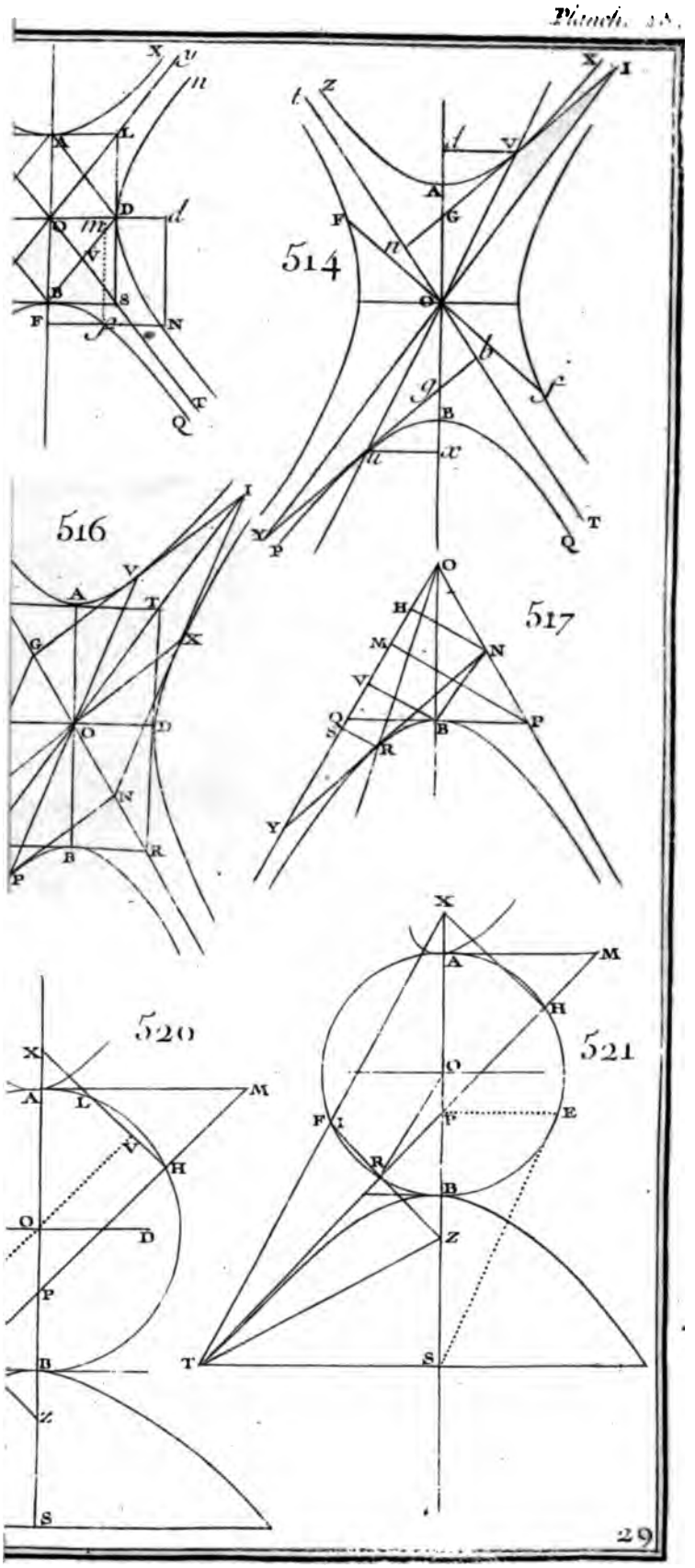

454
455
458
459
462
463
466
467

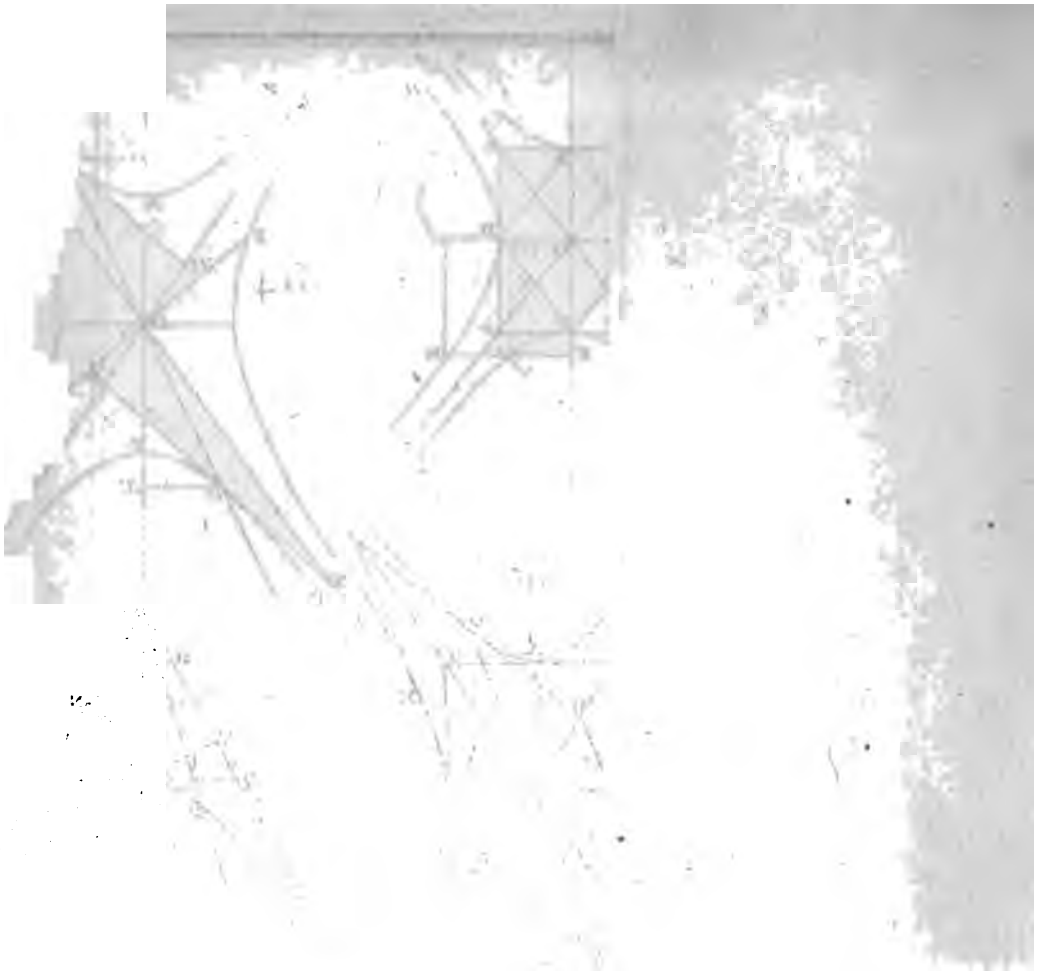

470
471
472
475
476
479
480
483
486

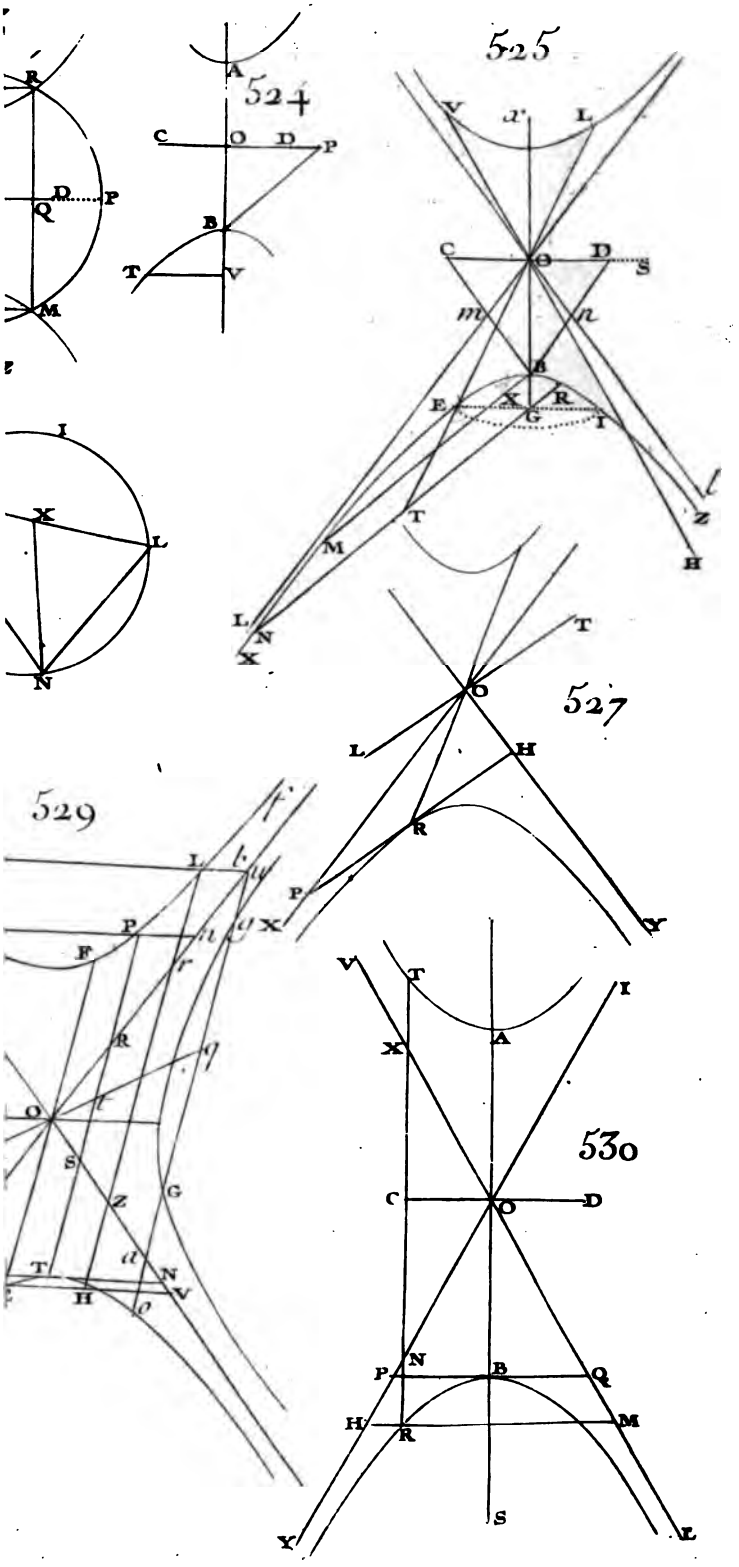



489
490
492
493
494
497
498




514
516
517
520
521
29




524
525
527
529
530

ÉLÉMENTS
DES PRINCIPALES PARTIES
DES MATHÉMATIQUES.

LIVRE TROISIEME.

Contenant l'Arithmétique des Infinis, & la Méchanique (*).

PREMIER TRAITÉ.

Principes de l'Arithmétique des Infinis, & leur application à la Géométrie, ou à la meſure des ſurfaces & des ſolides.

1. MESURER ou chercher la valeur d'une figure MNR (*Fig.* 1), c'eſt la même choſe que de chercher la valeur de la ſomme des

(*) Ce troiſieme Livre de M. l'Abbé Deidier renferme deux objets aſſez diſparats par leur nature, mais l'un & l'autre également utiles & néceſſaires à la claſſe de Militaires pour leſquels il fut principalement compoſé. La premiere Partie a pour objet les *Mathématiques pures*, le Calcul de la Géométrie : c'eſt une application du Calcul à la Géométrie des Courbes. La ſeconde Partie a pour objet la plus intéreſſante partie des *Mathématiques mixtes* ;

éléments infiniment proches AB, CD, RN, qui la compoſent. Or ſi ces éléments ſont tous égaux entre eux (*Fig.* 2), il eſt évident que leur ſomme eſt égale au produit du dernier élément ou de ſa baſe NR par le nombre qui en exprime la multitude, c'eſt-à-dire, par la hauteur ou la droite MN qui coupe tous ces éléments perpendiculairement. Mais ſi les éléments ſont inégaux (*Fig.* 1), on ne peut trouver leur ſomme que par le rapport qu'elle a au produit du dernier ou plus grand élément NR multiplié par la hauteur MN qui en exprime la multitude; & ce rapport eſt le même, comme on voit, que celui de la figure au rectangle circonſcrit NMHR.

2. Il en eſt de même à l'égard des ſolides. Si les plans élémentaires qui compoſent un corps, ſont tous égaux (*Fig.* 4), la valeur de ce corps, ou la ſomme de ſes éléments, n'eſt autre choſe que le produit de l'élément ou plan XNRS, par le nombre qui en exprime la multitude, c'eſt-à-dire, par la hauteur ou la perpendiculaire MN qui coupe tous ſes éléments. Mais ſi les plans élémentaires d'un ſolide (*Fig.* 3) ſont inégaux, on ne peut en connoître la valeur, ou la ſomme des éléments, que par le rapport de cette ſomme au produit du dernier ou plus grand élément XNRS par la hauteur XM qui en exprime la multitude; & ce rapport eſt le même que celui du ſolide au priſme circonſcrit XT.

3. La ligne NM (*Fig.* 1), qui coupe perpendiculairement tous les éléments d'une figure, eſt coupée par ces éléments en une infinité de petites parties toutes égales. C'eſt pourquoi les abſciſſes MA, MC, MN, correſpondantes aux éléments, à commencer depuis la premiere au ſommet M, laquelle eſt infiniment petite ou zéro, juſqu'à la derniere MN, ſont entre elles comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. 4. 5. &c, des nombres naturels. Car, comme il faut une infinité d'éléments pour compoſer une ſurface, il y a auſſi une infinité d'abſciſſes correſpondantes à ces éléments. Or il arrive toujours que les éléments d'une figure ont un rapport connu ou inconnu à leurs abſciſſes. Par exemple :

Dans le triangle (*Fig.* 5), les éléments AB, CD, NR, ſont

ſavoir, la Méchanique, ou la théorie du mouvement enviſagé dans toutes ſes différentes branches. Ce troiſieme Livre étoit ſuivi, dans l'ancienne édition, d'un Traité de la Perſpective, trop étranger à ce cours de Mathématiques. Ce dernier Traité ſe vend ſéparément, enrichi des notes critiques d'un Artiſte célebre, M. Cochin, qui excelle également & dans la théorie & dans la pratique de ſon Art : au crayon d'Apelle aſſociant le compas d'Euclide.

entre eux comme leurs abſciſſes MA, MC, MN, ou comme la ſuite infinie des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Dans le complément MNR de la parabole ordinaire (*Fig.* 6), les éléments AB, CD, NR, ſont entre eux comme les quarrés de leurs abſciſſes, ou comme la ſuite infinie o. 1. 4. 9. 16. &c, des quarrés de la ſuite infinie des nombres naturels o. 1. 2. 3. 4. 5. &c.

Au contraire, dans la parabole ordinaire (*Fig.* 7), les quarrés des éléments étant entre eux comme les abſciſſes, ces mêmes éléments ſont entre eux comme les racines quarrées des abſciſſes ou des nombres o. 1. 2. 3. 4. 5. & ainſi de ſuite à l'infini.

Dans d'autres figures les éléments ſont entre eux, ou comme les cubes, ou comme les quatriemes puiſſances, ou comme les cinquiemes, les ſeptiemes puiſſances, &c, des nombres o. 1. 2. 3. 4. 5. &c, à l'infini. Dans d'autres ils ſont comme les racines quarrées, ou les racines cubiques, ou les racines quatriemes, &c, des nombres o. 1. 3. 4. 5. &c, à l'infini. Dans d'autres ils peuvent être comme quelque puiſſance des nombres o. 1. 2. 3. &c, multipliée par une autre puiſſance de ces mêmes nombres; par exemple, comme les quarrés multipliés par les cubes; ou comme quelque puiſſance multipliée par quelque racine; ou comme quelque puiſſance diviſée par quelque autre puiſſance, ou par quelque racine; ou comme quelque puiſſance augmentée ou diminuée de quelque autre puiſſance, ou de quelque racine; ou comme les quarrés ou les cubes ou les quatriemes puiſſances, &c, de quelque puiſſance augmentée ou diminuée d'une autre puiſſance, ou d'une racine; ou comme des moyennes proportionnelles priſes entre les termes d'une puiſſance, & les termes d'une autre puiſſance ou d'une racine, &c: ce qui peut ſe combiner, comme on voit, d'une infinité de façons. Et il faut dire la même choſe des éléments qui compoſent un ſolide.

4. Connoiſſant donc le rapport qui ſe trouve entre les éléments d'une figure ou d'un ſolide, les regles *de l'Arithmétique des Infinis* nous apprennent à trouver tout d'un coup la valeur de la figure ou du ſolide; c'eſt-à-dire, le rapport de la ſomme des éléments au dernier & plus grand élément multiplié par le nombre qui en exprime la multitude, ou par le nombre des termes: lequel rapport, comme nous avons déja dit, eſt le même que celui de la figure ou du ſolide au parallélogramme ou au priſme circonſcrit. Or ces regles dépendent du Problême ſuivant, & des obſervations que nous ferons enſuite ſur la nature des nombres qu'on nomme *Infinis*.

PROBLÊME GÉNÉRAL.

5. *Une ſuite quelconque finie & déterminée de nombres en progreſſion arithmétique aſcendante étant donnée ; trouver la ſomme des quarrés de ces nombres, celle de leurs cubes, celle de leurs troiſiemes puiſſances, & ainſi du reſte.*

SOLUTION. Soient les nombres en progreſſion arithmétique aſcendante a, b, c, f, qui different entre eux d'une quantité quelconque que nous nommerons d.

I°. Si je veux trouver la *ſomme des quarrés* de ces nombres ; je prends celui qui viendroit immédiatement après le dernier f, ſi la progreſſion étoit continuée. Je le nomme x, & je l'éleve à une puiſſance plus élevée d'un degré que celle des quarrés que je cherche, c'eſt-à-dire au cube, & j'ai x^3. Or comme tous les termes de la progreſſion ſe ſurpaſſent d'une même quantité d; il eſt évident que $x=f+d$, & par conſéquent $x^3=f^3+3ffd+3fdd+d^3$. Je prends les coëfficients des puiſſances de f, dans le ſecond membre de cette équation, c'eſt-à-dire, les grandeurs qui multiplient les puiſſances de f & qui ſont $1, 3d, 3dd$: je prends auſſi le dernier terme d^3, & je le multiplie par le nombre des termes de la progreſſion donnée, lequel dans cet exemple eſt 4 ; ce qui fait $4d^3$. Ainſi j'ai les grandeurs $1, 3d, 3dd, 4d^3$, que je prends pour guides en cette ſorte. Je regarde la premiere comme repréſentant le cube a^3 du premier terme de la progreſſion, parceque j'ai élevé x au cube x^3 : la ſeconde $3d$, comme repréſentant la ſomme des quarrés que je cherche, multipliée par $3d$, ou par le triple de la différence d de la progreſſion : la troiſieme $3dd$, comme repréſentant la ſomme des termes de la progreſſion multipliée par $3dd$, ou par le triple du quarré de la différence : enfin la quatrieme $4d^3$, comme repréſentant le cube d^3 de la différence multiplié par 4, ou par le nombre des termes de la progreſſion.

Cela fait, je retranche du cube x^3, 1°. le cube du premier terme de la progreſſion, à cauſe de la grandeur 1 qui me repréſente ce cube : 2°. la ſomme des termes de la progreſſion multipliée par $3dd$, à cauſe de la troiſieme grandeur $3dd$: 3°. le cube d^3 de la différence multipliée par 4 ou par le nombre des termes. Après quoi, comme il ne me reſte plus que la ſeconde grandeur $3d$, qui repréſente la ſomme des quarrés, multipliée par $3d$, je diviſe ce qui reſte par $3d$, & le quotient eſt la ſomme des quarrés cherchés.

II°. De même, ſi je cherche la *ſomme des cubes* de la progreſſion ; je prends le terme x qui viendroit immédiatement après le

dernier, ſi la progreſſion étoit continuée; & je l'éleve à un degré plus haut que les cubes que je cherche, c'eſt-à-dire, au quatrieme degré : ce qui donne x^4. Or $x=f+d$: donc $x^4=f^4+4f^3d+6ffdd+4fd^3+d^4$. Je prends les coëfficients 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$, des puiſſances de f dans le ſecond membre de cette équation, & le dernier terme d^4 que je multiplie par le nombre des termes 4, ce qui fait $4d^4$; & j'ai les grandeurs 1, $4d$, $6dd$, $4d^3$, $4d^4$, dont je regarde la premiere comme repréſentant la quatrieme puiſſance a^4 du premier terme de la progreſſion, à cauſe que x a été élevé à cette puiſſance; la ſeconde $4d$, comme repréſentant les cubes que je cherche multipliés par $4d$; la troiſieme $6dd$, comme repréſentant la ſomme des quarrés, multipliée par $6dd$; la quatrieme $4d^3$, comme repréſentant la ſomme des termes multipliée par $4d^3$; & la cinquieme $4d^4$, comme repréſentant la quatrieme puiſſance de la différence multipliée par le nombre des termes 4.

C'eſt pourquoi je retranche de x^4, 1°. la quatrieme puiſſance a^4 du premier terme de la progreſſion, à cauſe de la premiere grandeur 1 : 2°. la ſomme des quarrés des termes de la progreſſion multipliée par $6dd$, à cauſe de la troiſieme grandeur $6dd$: 3°. la ſomme des termes de la progreſſion multipliée par $4d^3$, à cauſe de la quatrieme grandeur $4d^3$: 4°. enfin, la quatrieme puiſſance d^4 de la différence d, multipliée par le nombre des termes 4, à cauſe de la cinquieme grandeur $4d^4$. Après quoi, comme il ne me reſte plus que la grandeur $4d$, qui repréſente la ſomme des cubes multipliée par 4 fois la différence; je diviſe mon reſte par $4d$, & le quotient eſt la ſomme des cubes cherchés.

III°. De même encore, ſi je cherche la *ſomme des quatriemes puiſſances* de la progreſſion, je prends le terme x, qui viendroit immédiatement après le dernier, & je l'éleve à la puiſſance x^5 élevée d'un degré plus haut que les quatriemes puiſſances que je cherche. Or $x=f+d$: donc $x^5=f^5+5f^4d+10f^3dd+10ffd^3+5fd^4+d^5$. Les coëfficients des puiſſances de f dans le ſecond membre ſont 1, $5d$, $10dd$, $10d^3$, $5d^4$, & le dernier terme multiplié par le nombre des termes 4 eſt $4d^5$. Ainſi j'ai les 6 grandeurs 1, $5d$, $10dd$, $10d^3$, $5d^4$, $4d^5$: dont je regarde la premiere 1, comme repréſentant le premier terme de la progreſſion élevée à la même puiſſance que x; la ſeconde $5d$, comme repréſentant les quatriemes puiſſances que je cherche, multipliées par $5d$; la troiſieme $10dd$, comme repréſentant les cubes multipliés par $10dd$; la quatrieme $10d^3$, comme repréſentant les quarrés multipliés par $10d^3$; la cinquieme $5d^4$, comme repréſentant la ſomme des termes de la pro-

greſſion multipliée par $5d^4$; & la ſixieme $4d^5$, comme repréſentant la cinquieme puiſſance de la différence d multipliée par le nombre des termes 4. C'eſt pourquoi je retranche de x^5, 1°. la cinquieme puiſſance du premier terme a de la progreſſion, à cauſe de la premiere grandeur 1 : 2°. la ſomme des cubes multipliée par $10dd$, à cauſe de la troiſieme grandeur $10dd$: 3°. la ſomme des quarrés multipliée par $10d^3$, à cauſe de la quatrieme grandeur $10d^3$: 4°. la ſomme des termes de la progreſſion multipliée par $5d^4$, à cauſe de la cinquieme grandeur $5d^4$: 5°. la cinquieme puiſſance de la différence d multipliée par le nombre des termes 4. Après quoi, comme il ne me reſte plus que la ſeconde grandeur $5d$, qui repréſente la ſomme des quatriemes puiſſances multipliée par $5d$, je diviſe mon reſte par $5d$, & le quotient eſt la ſomme cherchée des quatriemes puiſſances. On feroit la même choſe, ſi l'on cherchoit la ſomme des puiſſances plus élevées.

De façon que la *premiere des grandeurs* qu'on prend pour guides, repréſente toujours une puiſſance du premier terme a de la progreſſion élevée au même degré que x : que les *autres grandeurs*, à l'exception de la derniere, repréſentent les puiſſances deſcendantes des termes de la progreſſion depuis le degré que l'on cherche, juſqu'aux premiers, multipliées par les quantités que les grandeurs repréſentent : que la *derniere grandeur* repréſente toujours la différence d élevée au même degré que x, & multipliée par le nombre des termes : que *toutes les grandeurs*, à l'exception de la ſeconde, repréſentent ce qu'il faut retrancher de x élevé à une puiſſance plus grande d'un degré que celle que l'on cherche : enfin que la *ſeconde grandeur* fait voir quel eſt le diviſeur qui doit diviſer le reſte pour avoir la ſomme des puiſſances cherchées.

Si l'on ſe donne la peine de mettre des nombres au lieu des lettres, & de faire les calculs que nous venons d'indiquer ; on ne manquera pas de ſe convaincre de la vérité de ce Problême. Cependant en voici la démonſtration.

DÉMONSTRATION. I°. Quand nous cherchons la *ſomme des quarrés* de la progreſſion arihmétique aſcendante a, b, c, f, dont la différence eſt d ; le cube du terme x qui viendroit immédiatement après le dernier, ſi la progreſſion étoit continuée, eſt x^3 : & il eſt clair que $x^3 = x^3 - f^3 + f^3 - c^3 + c^3 - b^3 + b^3 - a^3 + a^3$; à cauſe que tous les termes du ſecond membre ſe détruiſent par des ſignes contraires, à l'exception de x^3, qui par conſéquent eſt égal au terme x^3 du premier membre. Or $x = f + d$: donc $x^3 = f^3 + 3ffd + 3fdd + d^3$; & partant $x^3 - f^3 = 3ffd + 3fdd + d^3$. De même $f = c + d$: donc f^3 =

$=c^3+3ccd+3cdd+d^3$; & $f^3-c^3=3ccd+3cdd+d^3$. De même encore $c=b+d$: donc $c^3=b^3+3bbd+3bdd+d^3$; & $c^3-b^3=3bbd+3bdd+d^3$. Enfin $b=a+d$: donc $b^3=a^3+3aad+3add+d^3$; & partant $b^3-a^3=3aad+3add+d^3$. Substituant donc dans notre équation $x^3=x^3-f^3+f^3-c^3+c^3-b^3+b^3-a^3+a^3$, les valeurs de x^3-f^3, f^3-c^3, c^3-b^3, & b^3-a^3, que nous venons de trouver, nous aurons :

$$x^3 = 3ffd+3fdd+d^3 + 3ccd+3cdd+d^3 + 3bbd+3bdd+d^3 + 3aad+3add+d^3 + a^3.$$

Ce qui fait voir que le cube x^3 contient, 1°. le cube a^3 du premier terme de la progression : 2°. la somme des quarrés aa, bb, cc, ff, de la progression multipliés par $3d$: 3°. la somme des termes a, b, c, f, multipliés par $3dd$: 4°. le cube d^3 de la différence d pris quatre fois ou multiplié par le nombre des termes 4. Donc si de x^3 nous retranchons le cube a^3, plus la somme $a+b+c+d$ multipliée par $3dd$, & enfin le cube d^3 pris 4 fois, c'est-à-dire $4d^3$; le reste sera la somme des quarrés multipliés par $3d$; & par conséquent en divisant par $3d$, nous aurons la somme des quarrés. Or les grandeurs que nous avons prises pour guides ci-dessus, nous ont indiqué de faire les mêmes opérations : donc elles ont prescrit ce qu'il falloit faire.

II°. De même quand nous cherchons la somme des cubes de la progression a, b, c, f ; la quatrieme puissance de x est x^4, & nous avons $x^4=x^4-f^4+f^4-c^4+c^4-b^4+b^4-a^4+a^4$. Or $x=f+d$: donc $x^4=f^4+4f^3d+6ffdd+4fd^3+d^4$; & partant $x^4-f^4=4f^3d+6ffdd+4fd^3+d^4$. De même $f=c+d$: donc $f^4=c^4+4c^3d+6ccdd+4cd^3+d^4$, & $f^4-c^4=4c^3d+6ccdd+4cd^3+d^4$. De même encore $c=b+d$: donc $c^4=b^4+4b^3d+6bbdd+4bd^3+d^4$; & partant $c^4-b^4=4b^3d+6bbdd+4bd^3+d^4$. Enfin $b=a+d$: donc $b^4=a^4+4a^3d+6aadd+4ad^3+d^4$; & par conséquent $b^4-a^4=4a^3d+6aadd+4ad^3+d^4$. Substituant donc dans notre équation $x^4=x^4-f^4+f^4-c^4+c^4-b^4+b^4-a^4+a^4$, les valeurs de x^4-f^4, f^4-c^4, c^4-b^4, & b^4-a^4, que nous venons de trouver, nous aurons :

$$x^4 = 4fd+6ffdd+4fd^3+d^4 + 4c^3d+6ccdd+4cd^3+d^4 + 4b^3d+6bbdd+4bd^3+d^4 + 4a^3d+6aadd+4ad^3+d^4 + a^4.$$

Ce qui fait voir que x^4 contient, 1°. la quatrieme puissance a^4

du premier terme a de la progreſſion : 2°. les cubes a^3, b^3, c^3, f^3, multipliés par $4d$: 3°. les quarrés aa, bb, cc, ff, multipliés par $6dd$: 4°. la ſomme des termes a, b, c, f, multipliés par $4d^3$: 5°. enfin la quatrieme puiſſance d^4 de la différence d priſe 4 fois, c'eſt-à-dire multipliée par le nombre des termes 4. Donc ſi de x^4 on retranche la quatrieme puiſſance a^4, plus les quarrés multipliés par $6dd$, plus la ſomme des termes multipliée $4d^3$, & enfin $4d^3$; le reſte ſera la ſomme des cubes multipliée par $4d$, & par conſéquent en diviſant ce reſte par $4d$, le quotient ſera la ſomme des cubes. Or les grandeurs que nous avons priſes pour guides ci-deſſus, nous ont indiqué les mêmes opérations : donc elles ont preſcrit ce qu'il falloit faire. On démontrera la même choſe à l'égard des puiſſances plus élevées.

6. REMARQUE. J'ai dit au ſujet des piles de boulets (*Calc.* 267), que ſi l'on prend un nombre de termes fini dans la ſuite 0. 1. 2. 3. 4. 5., &c., des nombres naturels, & que l'on faſſe les quarrés des termes qu'on aura pris ; la ſomme de ces quarrés eſt au plus grand multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 3, plus comme 1 eſt à la racine du plus grand multipliée par 6. De là j'ai tiré une formule aiſée pour trouver la ſomme des boulets contenus dans une pyramide ou pile quarrée. Or comme je ne l'ai démontré que par induction, & que bien des gens ne veulent point mettre les preuves par induction au rang des preuves géométriques ; je vais le démontrer en rigueur, en ſuivant ce qui vient d'être dit : ce qui fera voir en même temps l'accord des principes.

Soient donc les termes 0. a. b. c. x, dont le dernier eſt x, & la différence eſt 1. Le nombre des termes ſera donc $x+1$, à cauſe que la progreſſion commence par zéro ; & les quarrés ſeront 0, a^2, b^2, c^2, x^2. Ainſi le dernier terme multiplié par le nombre des termes $x+1$, ſera x^3+x^2. Or le terme qui viendroit immédiatement après le dernier x, ſi l'on continuoit la progreſſion, eſt $x+1$, & ſon cube eſt $x^3+3xx+3x+1$: donc prenant dans ce cube les coëfficients 1, 3, 3, des puiſſances de x ; & multipliant le dernier terme 1 par le nombre des termes $x+1$; ce qui fait $x+1$: les quatre grandeurs 1, 3, 3, $x+1$, me font voir qu'il faut retrancher du cube $x^3+3xx+3x+1$, premiérement, le cube du premier terme 0, lequel n'eſt rien ; ſecondement, la ſomme des termes multipliée par 3 ; troiſièmement, le cube de la différence 1 multipliée par le nombre des termes ; & enfin, diviſer le reſte par trois ; ce qui me donnera au quotient la ſomme des quarrés. Or la ſomme des termes eſt $\frac{xx+x}{2}$ c'eſt-à-dire, le dernier terme x, & le premier

zéro, multipliés par la moitié $\frac{x+1}{2}$ du nombre des termes $x+1$: multipliant donc cette ſomme par 3, nous aurons $\frac{3xx+3x}{2}$; ce qui étant retranché du cube $x^3+3xx+3x+1$, nous laiſſera un reſte $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{3x}{2}+1$: & retranchant encore de ce reſte, le cube de la différence multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire retranchant $x+1$; le reſte ſera $x^3+\frac{3xx}{2}+\frac{x}{2}$, ou $x^3+x^2+\frac{xx+x}{2}$. Ainſi diviſant ce reſte par 3, le quotient $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$ ſera la ſomme des quarrés : or en multipliant le deſſus & le deſſous de la ſeconde fraction par x, ce qui n'en altere point la valeur ; la ſomme des quarrés eſt $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$, & cette ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire à x^3+x^2, comme $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{x^3+x^2}{6x}$ eſt à x^3+x^2, ou comme $\frac{1}{3}+\frac{1}{6x}$ eſt à 1. Donc la ſomme des quarrés eſt au dernier quarré multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3, plus comme 1 eſt à $6x$.

Maintenant puiſque la ſomme des quarrés eſt $\frac{x^3+x^2}{3}+\frac{xx+x}{6}$; ſi nous multiplions le deſſus & le deſſous de la premiere fraction par 2, nous aurons $\frac{2x^3+2x^2+x^2+x}{6}$, ou $\frac{2x^3+3x^2+x}{6}$, qui eſt la même formule générale que nous avons trouvée dans l'endroit cité (*Cal.* 267) : ce qui fait voir que l'induction dont nous nous ſommes ſervis en cet endroit, nous a conduits à la découverte de la vérité.

On pourroit trouver de la même façon, des formules pour avoir la ſomme des cubes, des quatriemes puiſſances, des cinquiemes, &c, des termes d'une progreſſion finie 0. 1. 2. 3, &c. Mais comme ces formules deviendroient trop compliquées, & que d'ailleurs la méthode de ce Problême eſt plus générale, nous n'en dirons rien, de peur de nous écarter de notre ſujet.

Observations touchant les Nombres infinis.

7. Définition I. On dit qu'un nombre *a* eſt *partie aliquote* d'un autre nombre *b*, lorſqu'il eſt contenu exactement un certain nombre de fois dans *b*.

8. Théorême I. *Une partie aliquote* a *d'un nombre* b, *eſt d'autant plus petite qu'elle eſt contenue plus de fois dans* b. Cela eſt évident : car ſi *a* eſt contenu trois fois dans *b*, il eſt certainement plus petit que s'il n'y étoit contenu que deux fois.

9. COROLLAIRE. Donc ſi un nombre *a* eſt contenu dans un autre nombre *b* plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelconque quelque grand qu'il puiſſe être ; ce nombre *a* eſt une partie aliquote *infiniment petite* de *b*.

10. THÉORÊME II. *Un nombre* a *qui eſt partie aliquote infiniment petite d'un autre nombre* b, *n'eſt rien à l'égard de* b. Car il eſt moindre à l'égard de *b*, que la plus petite partie aliquote de *b* que l'on puiſſe exprimer & concevoir.

11. COROLLAIRE I. Donc un nombre *b*, augmenté ou diminué d'une partie aliquote infiniment petite *a*, n'eſt pas différent de ce qu'il étoit avant l'augmentation ou la diminution, puiſque la différence qu'il peut y avoir, eſt plus petite que la moindre partie aliquote de *b* que l'on puiſſe concevoir.

12. COROLLAIRE II. Donc ſi deux nombres *b* & *c* ne different entre eux que d'une grandeur *a* infiniment petite à l'égard de l'un & de l'autre ; ils ſont parfaitement égaux entre eux.

13. DÉFINITION II. On dit qu'un nombre *x* eſt *infini*, lorſqu'il contient un nombre quelconque *a* connu & déterminé, plus de fois qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelque grand qu'il puiſſe être.

14. COROLLAIRE. Donc tout nombre connu & déterminé, quelque grand qu'il puiſſe être, eſt une partie aliquote infiniment petite d'un nombre infini *x*.

15. THÉORÊME III. *Le produit* ab *de deux nombres* a & b *déterminés, quelque grands qu'ils puiſſent être, eſt infiniment petit par rapport à un nombre infini* x. Car le nombre déterminé *a* eſt contenu dans le produit *ab* un nombre de fois qu'on peut exprimer par le nombre déterminé *b* ; & par conſéquent le produit *ab* n'étant pas infini, n'eſt qu'une partie aliquote infiniment petite du nombre infini *x*.

16. COROLLAIRE. Donc ſi on multiplie une partie infiniment petite *a*, d'un nombre infini *x*, par un nombre déterminé *b*, quelque grand qu'il puiſſe être ; le produit *ab* eſt encore infiniment petit par rapport à *x*.

17. THÉORÊME IV. *Toute partie aliquote qu'on peut exprimer par un nombre infini* x, *eſt encore infiniment grande, quelque petite*

qu'elle puiſſe être à l'égard de x. Soit *y* la partie aliquote de *x*, & *a* le nombre qui marque combien de fois *y* eſt dans *x* : donc le produit *ya* de *y* par *a*, ſera égal à *x*, & par conſéquent infini. Or le nombre *a* étant déterminé, puiſqu'on peut l'exprimer, eſt contenu dans l'infini *x* ou *ya*, plus de fois que le plus grand nombre imaginable ne peut l'exprimer (13) : donc la grandeur *y*, qui marque combien de fois *a* eſt contenu dans *ya*, eſt plus grande que le plus grand nombre qu'on puiſſe concevoir, & par conſéquent *y* eſt infini.

18. THÉORÊME V. *Tout nombre infini* x *eſt infiniment petit par rapport à ſon quarré* xx : *ſon quarré* xx *eſt infiniment petit par rapport à ſon cube* x^3 : *ſon cube* x^3 *eſt infiniment petit par rapport à ſa quatrieme puiſſance* x^4, *& ainſi de ſuite.* Le quarré *xx* n'eſt autre choſe que le nombre infini *x* multiplié par lui-même, ou pris autant de fois qu'il contient d'unités : or le nombre d'unités que *x* contient, eſt plus grand qu'on ne peut l'exprimer par un nombre quelconque, quelque grand qu'il puiſſe être : donc *x* eſt contenu dans *xx* plus de fois qu'on ne peut l'exprimer, & par conſéquent il eſt partie aliquote infiniment petite de *xx* (9). De même le cube x^3 n'eſt autre choſe que le quarré *xx* multiplié par *x*, ou pris autant de fois qu'il y a d'unités dans *x* : donc *xx* eſt dans x^3, plus de fois qu'on ne peut l'exprimer, & par conſéquent il eſt infiniment petit par rapport à x^3. On prouvera la même choſe à l'égard des puiſſances ſupérieures de *x*.

19. COROLLAIRE. *Il y a donc des infiniment petits d'infiniment petits à l'infini.* Par exemple, tout nombre connu & déterminé étant infiniment petit par rapport à un nombre infini *x*, lequel eſt infiniment petit par rapport à ſon quarré ; il eſt clair que tout nombre connu *a* eſt, par rapport au quarré *xx*, un infiniment petit d'un infiniment petit *x*, ou un infiniment petit du ſecond genre ; & par la même raiſon, tout nombre connu *a* eſt, par rapport à x^3, un infiniment petit d'un infiniment petit *x* d'un autre infiniment petit *xx* ; c'eſt-à-dire, *a* eſt un infiniment petit du troiſieme genre, &c.

20. AVERTISSEMENT. Avant que d'aller plus loin, il eſt bon qu'on ſe rappelle ici ce que nous avons dit touchant le Calcul des Expoſants (*Calc.* 153, 154, *&c.*) ; ſavoir :

I°. Que les puiſſances aſcendantes d'une grandeur *a* ſont a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, &c, qui ont pour expoſants les nombres 1, 2, 3, 4, &c.

II°. Que ſi l'on diviſe la premiere puiſſance a^1 par elle-même, on aura $a^0=1$, dont l'expoſant eſt zéro.

III°. Que pour multiplier une puiſſance a^2 par une autre a^3, il n'y a qu'à ajouter les expoſants 2 & 3 enſemble, ce qui fait 5 ; & écrire a^5 pour le produit.

IV°. Que pour diviſer une puiſſance a^6 par une autre a^3, il faut retrancher de l'expoſant 6 du dividende l'expoſant 3 du diviſeur, ce qui donne 3 ; & écrire a^3 pour le quotient.

V°. Que pour élever une puiſſance quelconque a^2 à une autre puiſſance, par exemple à la troiſieme ; il faut multiplier l'expoſant 2 de a^2 par l'expoſant 3 de la puiſſance à laquelle on veut élever a^2, ce qui fait 6 ; & écrire a^6.

VI°. Que pour tirer la racine quelconque, par exemple, la racine troiſieme d'une puiſſance a^6, il faut diviſer l'expoſant 6 de la puiſſance a^6 par l'expoſant 3 de la racine qu'on veut tirer, ce qui fait 2 ; & écrire a^2.

VII°. Enfin que les racines 2e, 3e, 4e, &c, de a^1, s'expriment par $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$, &c, qui ont pour expoſants $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. De même, que les racines 3e, 4e, 5e, &c, de a^2, s'expriment par $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{2}{5}}$, &c ; & ainſi des autres. De façon que quand l'expoſant de a eſt une fraction quelconque, par exemple $\frac{3}{4}$; le numérateur 3 repréſente la puiſſance à laquelle la grandeur a eſt élevée, & le dénominateur 4 repréſente la racine qu'on veut extraire de cette puiſſance a^3.

21. DÉFINITION III. Si l'on prend la ſuite infinie des nombres naturels 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. . . . . x, qui commence par zéro, & qui ſe termine à l'infini x ; l'expoſant de cette ſuite ſera 1, à cauſe que chaque terme de cette ſuite eſt au premier degré : l'expoſant de la ſuite des quarrés de ces mêmes nombres ſera 2, à cauſe que chaque terme eſt au ſecond degré : l'expoſant de la ſuite de leurs cubes ſera 3, & ainſi de ſuite. De même l'expoſant de la ſuite de leurs racines quarrées ſera $\frac{1}{2}$; celui de la ſuite de leurs racines cubiques ſera $\frac{1}{3}$, &c : & ſi l'on diviſe chacun des termes de la ſuite 0. 1. 2. 3, &c, par lui-même ; on aura une ſuite infinie d'unités 1, 1, 1, 1, &c, dont l'expoſant ſera zéro ; parcequ'une premiere puiſſance a, diviſée par elle-même, eſt a^0, dont l'expoſant eſt zéro.

Dans toutes ces ſuites, le nombre des termes ſera toujours $x+1$, c'eſt-à-dire, le dernier terme x de la premiere ſuite 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . x, augmenté de l'unité. Car ſi la progreſſion commençoit par 1, il eſt clair que le dernier terme x ſeroit égal au nombre des termes ;

mais comme elle commence par zéro, ce qui donne un terme de plus, le nombre des termes doit être $x+1$.

PROPOSITION I.

22. *Si l'on prend la ſuite infinie des nombres naturels* 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.... x, *celle des quarrés de ces nombres, celle de leurs cubes, celle de leurs quatriemes puiſſances, & ainſi de ſuite à l'infini; la ſomme de chacune de ces ſuites ſera toujours au dernier & plus grand terme multiplié par le nombre des termes, comme* 1 *eſt à l'expoſant de la ſuite augmenté de l'unité.*

Démonstration. I°. La ſuite 0. 1. 2. 3. 4.... x, étant une progreſſion arithmétique, ſa ſomme ſe trouve en ajoutant le premier terme au dernier, & en multipliant la ſomme $0+x$ par la moitié du nombre des termes $x+1$, c'eſt-à-dire par $\frac{x+1}{2}$ (*Calc.* 251). Donc la ſomme des termes eſt $\frac{xx+x}{2}$, ou bien $\frac{xx}{2}$: à cauſe que x étant infiniment petit à l'égard de xx (18), n'eſt par conſéquent rien par rapport à xx. Or le dernier terme x, multiplié par le nombre des termes $x+1$, eſt $xx+x$, ou xx, par la raiſon que nous venons de dire: donc la ſomme des termes eſt au dernier multiplié par le nombre des termes, comme $\frac{xx}{2}$ eſt à xx, ou comme $\frac{1}{2}$ eſt à 1, ou comme 1 eſt à 2; c'eſt-à-dire, comme l'unité eſt à l'expoſant 1 de la ſuite augmenté de l'unité.

II°. Dans la *ſuite des quarrés* des nombres 0. 1. 2. 3. 4. .... x; le dernier quarré xx, multiplié par le nombre des termes $x+1$, eſt x^3+x^2, ou ſimplement x^3; à cauſe que x^2 eſt infiniment petit par rapport à x^3 (18). Or pour avoir la ſomme des quarrés, je prends le terme $x+1$ qui viendroit après le dernier terme, ſi la progreſſion pouvoit être continuée; & ſuivant les regles données ci-deſſus (5), j'éleve $x+1$ au cube: ce qui donne x^3+3x^2+3x+1, ou ſimplement x^3. Car x^2, étant infiniment petit par rapport à x^3 (18), le terme $3x^2$ eſt encore infiniment petit (16); & par la même raiſon les termes $3x$ & 1 ſont auſſi infiniment petits par rapport à x^3. Ainſi le cube du terme $x+1$ n'eſt pas différent du quarré xx multiplié par le nombre des termes.

Maintenant les coefficients de x dans x^3+3x^2+3x+1, ſont 1, 3, 3; & le dernier terme 1, multiplié par le nombre des termes, eſt $x+1$; qui me font voir que pour avoir la ſomme des quarrés, il faut que je retranche du cube de $x+1$, ou du quarré xx multiplié par le nombre des termes, 1°. le cube du premier terme 0 de la

progreſſion, lequel n'eſt rien : 2°. la ſomme de termes $\frac{x^3+x}{2}$, ou $\frac{x^3}{2}$ multiplié par 3, c'eſt-à-dire $\frac{3x^3}{2}$; ce qui eſt infiniment petit à l'égard de x^3+x^2, ou ſimplement de x^3 (18, 16) : 3°. le terme $x+1$, qui n'eſt encore rien à l'égard de x^3 ou du quarré xx multiplié par le nombre des termes. Donc après ces ſouſtractions, le cube de $x+1$, ou le quarré xx multiplié par le nombre des termes, ne ſera pas différent de ce qu'il étoit. Or la ſeconde grandeur 3 me fait voir qu'il faut enfin diviſer le reſte par 3 : donc en diviſant par 3 le cube de $x+1$, ou le quarré xx multiplié par le nombre des termes, le quotient $\frac{x^3}{3}$ ſera la ſomme des termes; & par conſéquent cette ſomme ſera au dernier quarré multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire, à x^3, comme $\frac{x^3}{3}$ eſt à x^3, ou comme $\frac{1}{3}$ eſt à 1, ou comme 1 eſt 3, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à l'expoſant 2 de la ſuite des quarrés augmenté de l'unité.

III°. Dans la *ſuite des cubes* des nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5. . . . x; le dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes $x+1$ eſt x^4+x^3, ou ſimplement x^4, à cauſe que x^3 eſt infiniment petit à l'égard de x^4 (18). Or pour avoir la ſomme des cubes ſelon les regles ci-deſſus (5), je prends le terme $x+1$ qui viendroit après le dernier terme x, & je l'éleve à la quatrieme puiſſance, laquelle eſt $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, ou ſimplement x^4 : car x^3 étant infiniment petit par rapport à x^4, le ſecond terme $4x^3$ eſt encore infiniment petit par rapport à x^4 (16). Quant aux autres termes $6x^2$, $4x^2$, & 1; il eſt viſible qu'ils ſont des infiniment petits d'infiniment petits (19); & que par conſéquent ils ſont, pour ainſi dire, moins que rien par rapport à x^4. Ainſi la quatrieme puiſſance du terme $x+1$ n'eſt pas différente du dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes. Or les coëfficients de x dans $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$, ſont 1, 4, 6, 4, & le dernier terme 1 multiplié par le nombre des termes eſt $x+1$.

J'ai donc cinq grandeurs 1, 4, 6, 4, $x+1$, qui me font voir qu'il faut que je retranche de la quatrieme puiſſance de $x+1$, ou du dernier cube multiplié par le nombre des termes, c'eſt-à-dire, de x^4 : 1°. la quatrieme puiſſance du premier terme 0 de la progreſſion, laquelle n'eſt rien : 2°. la ſomme $\frac{x^3}{3}$ des quarrés multipliée par 6, c'eſt-à-dire $\frac{6x^3}{3}$, ou $2x^3$: ce qui eſt infiniment petit par rapport

port à x^4 : 3°. La ſomme $\frac{x^3}{2}$ de la progreſſion multipliée par 4, ou $\frac{4x^3}{2}$, ou $2x^3$; ce qui eſt un infiniment petit d'infiniment petit par rapport à x^4 : 4°. enfin, le terme $x+1$, qui eſt un infiniment petit du troiſieme genre par rapport à x^4 : donc après toutes ces ſouſtractions x^4 ne différera pas de ce qu'il étoit auparavant. Or à cauſe de la ſeconde grandeur 4, il faut diviſer le reſte par 4 pour avoir la ſomme des cubes : diviſant donc x^4 par 4, la ſomme des cubes ſera $\frac{x^4}{4}$; & cette ſomme ſera au dernier cube x^3 multiplié par le nombre des termes, comme $\frac{x^4}{4}$ eſt à x^4, ou comme $\frac{1}{4}$ eſt à 1, ou comme 1 à 4 : c'eſt-à-dire comme 1 eſt à l'expoſant 3 de la ſuite des cubes augmenté de l'unité.

IV°. La même choſe ſe démontreroit à l'égard des *ſuites des quatriemes puiſſances*, des cinquiemes, des ſixiemes, & ainſi du reſte à l'infini.

23. COROLLAIRE I. Si l'on diviſe tous les termes de la ſuite 0, 1, 2, 3, 4, 5.... x, chacun par lui-même, il eſt clair qu'on aura une ſuite infinie d'unités, & que cette ſuite ſera au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à 1 : or l'expoſant de cette ſuite d'unités eſt zéro (21) ; donc la ſomme ſera encore au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 eſt à l'expoſant zéro augmenté de l'unité.

Nous nommerons *ſuite des égaux*, la ſuite compoſée d'unités.

24. COROLLAIRE II. Les rapports de la ſuite des égaux, de celle des premieres puiſſances, de celles des cubes, des quatriemes puiſſances, &c, à leurs derniers termes multipliés par le nombre des termes, ſont donc $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, &c.

Ainſi quand les expoſants 0, 1, 2, 3, 4, &c, de ces différentes ſuites ſont en progreſſion arithmétique ; les rapports de ces différentes ſuites à leurs derniers termes multipliés par le nombre des termes, ſont des fractions qui ont toutes l'unité pour numérateur, & dont les dénominateurs 1, 2, 3, 4, 5, &c, ſont auſſi en progreſſion arithmétique.

PROPOSITION II.

25. *Si l'on prend la ſuite des racines quarrées des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5.... x, *qui ſe terminent à l'infini* x, *la ſuite de leurs racines cubiques, celle de leurs racines quatriemes, & ainſi de ſuite;*

le rapport de chacune de ces ſuites à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 *à l'expoſant de la ſuite augmenté de l'unité.*

DÉMONSTRATION. I°. La *ſuite des racines quarrées* a pour expoſant $\frac{1}{2}$, & cet expoſant eſt moyen arithmétique entre l'expoſant 0 de la ſuite des égaux, & l'expoſant 1 de la ſuite des premieres puiſſances 0, 1, 2, 3, 4. ... *x :* donc le dénominateur du rapport de la ſuite des racines au dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être moyen arithmétique entre le dénominateur 1 du rapport $\frac{1}{1}$ de la ſuite des égaux, & le dénominateur 2 du rapport $\frac{1}{2}$ de la ſuite des premieres puiſſances (24). Prenant donc un moyen arithmétique entre 1 & 2, lequel eſt $\frac{3}{2}$, le rapport de la ſuite des racines quarrées à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 eſt à $\frac{3}{2}$, ou comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité ; car $\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$: & ce rapport peut ſe changer en celui de 2 à 3 ; car 1 eſt à $\frac{3}{2}$, comme $\frac{2}{2}$ eſt à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 eſt à 3.

II°. De même l'expoſant de la *ſuite des racines cubiques* eſt $\frac{1}{3}$; & cet expoſant eſt le premier des deux moyens arithmétiques entre l'expoſant 0 de la ſuite des égaux, & l'expoſant 1 de la ſuite des premieres puiſſances 0, 1, 2, 3. .... *x*. Car les deux moyens arithmétiques entre 0 & 1, ſont $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$: donc le dénominateur du rapport des racines cubiques à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être le premier de deux moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 du rapport des égaux, & le dénominateur 2 du rapport des premieres puiſſances (24). Prenant donc deux moyens arithmétiques $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, entre 1 & 2 ; le rapport de la ſuite des racines cubiques à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, eſt comme 1 eſt à $\frac{4}{3}$, ou comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{3}$ de la ſuite augmenté de l'unité ; car $\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$: & ce rapport peut ſe changer en celui de 3 à 4 ; car 1 eſt à $\frac{4}{3}$, comme $\frac{3}{3}$ eſt à $\frac{4}{3}$, comme 3 à 4.

III°. De même encore l'expoſant de la *ſuite des quatriemes racines* des nombres 0, 1, 2, 3, 4. ... *x* eſt $\frac{1}{4}$; & cet expoſant eſt le premier de trois moyens arithmétiques $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, entre l'expoſant 0 de la ſuite des égaux, & l'expoſant 1 de la ſuite 0, 1, 2, 3, 4 .... *x :* donc le dénominateur du rapport de la ſuite des quatriemes puiſſances à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, doit être le premier de trois moyens arithmétiques entre le dénominateur 1 du rapport de la ſuite des égaux, & le dénomina-

teur 2 du raport de la ſuite 0, 1, 2, 3. ... x (24). Prenant donc trois moyens arithmétiques $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, entre 1 & 2; le rapport de la ſuite des quatriemes racines à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, eſt comme 1 eſt à $\frac{5}{4}$, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{4}$ augmenté de l'unité; car $\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$: & ce rapport peut ſe changer en celui de 4 à 5; à cauſe que 1 eſt à $\frac{5}{4}$ comme $\frac{4}{4}$ eſt à $\frac{5}{4}$, ou comme 4 à 5; & on prouvera la même choſe à l'égard des autres racines.

26. COROLLAIRE I. Si l'on multiplie les termes de quelqu'une des ſuites dont nous venons de parler, par exemple les termes de la ſuite des quarrés qui ont pour expoſant 2, par les termes d'une autre ſuite, par exemple, par les termes de celle des cubes qui ont pour expoſant 3; on aura une autre ſuite qui aura pour expoſant la ſomme des expoſants 2 & 3 (20). Ainſi les termes de cette ſuite étant les cinquiemes puiſſances, le rapport de leur ſomme au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 eſt à l'expoſant 5 augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à 6 (22); & ainſi des autres.

De même ſi l'on diviſe les termes d'une ſuite, par exemple, de la ſuite des cinquiemes puiſſances qui a pour expoſant 5, par les termes d'une autre ſuite dont l'expoſant eſt moindre que 5, par exemple, par les termes de la ſuite des cubes, dont l'expoſant eſt 3, on aura une nouvelle ſuite dont l'expoſant poſitif 2 ſera la différence des deux expoſants 5 & 3 (20): par conſéquent les termes de cette ſuite étant les quarrés, le rapport de leur ſomme à leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, ſera comme 1 eſt à l'expoſant 2 augmenté de l'unité, ou comme 1 eſt à 3 (22); & ainſi des autres.

27. COROLLAIRE II. Mais ſi l'on diviſe les termes d'une ſuite par les termes d'une autre qui ait un expoſant plus grand, par exemple, les termes de la ſuite 0, 1, 2, 3.... x, dont l'expoſant eſt 1, par les termes des quarrés dont l'expoſant eſt 2, ou par ceux des cubes dont l'expoſant eſt 3, ou par ceux des quatriemes puiſſances, &c; on aura alors de nouvelles ſuites qui auront des expoſants négatifs $1-2$, $1-3$, $1-4$, &c. (20); ou -1, -2, -3, -4, &c: & le rapport de la ſomme de chacune de ces ſuites à ſon dernier terme, ſera toujours comme 1 eſt à l'expoſant augmenté de l'unité.

Car les expoſants de ces ſuites formeront avec l'expoſant 0 de la ſuite des égaux une progreſſion arithmétique négative 0, -1, -2, -3, -4, &c: par conſéquent les dénominateurs de leur

rapport devront auſſi former une progreſſion arithmétique négative, dont le premier ſera le dénominateur 1 du rapport des égaux, & c'eſt ce qui arrive effectivement. Car le rapport de la ſuite qui a pour expoſant —1 à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, étant comme 1 eſt à l'expoſant —1 augmenté de l'unité, eſt $\frac{1}{0}$: celui de la ſuite qui a pour expoſant —2, étant comme 1 eſt à l'expoſant —2 augmenté de l'unité, eſt $\frac{1}{-1}$: celui de la ſuite qui a pour expoſant —3, étant comme 1 à l'expoſant —3, augmenté de l'unité, eſt $\frac{1}{-2}$, &c. Donc le rapport $\frac{1}{1}$ des égaux, & les rapports des ſuites négatives ſont $\frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-4}$, &c : & il eſt viſible que leurs dénominateurs forment une progreſſion arithmétique négative, de même que les expoſants des ſuites.

28. REMARQUE I. Il faut obſerver que les termes de toute ſuite dont l'expoſant eſt négatif, ſont réciproques aux termes de la ſuite dont l'expoſant poſitif eſt le même nombre que celui de l'expoſant négatif. Nommons $0, a, b, c, d \ldots x$, les termes de la ſuite 0, 1, 2, 3, 4 ... x : la ſuite des quarrés ſera donc $0^2, a^2, b^2, c^2, d^2 \ldots xx$; & la ſuite négative qui aura le même expoſant 2, ſera $0^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2} \ldots x^{-2}$. Or cette derniere ſuite peut s'exprimer en cette ſorte : $\frac{1}{0^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{d^2} \ldots \frac{1}{x^2}$; ainſi que nous l'avons dit en parlant du calcul des expoſants (*Calc.* 161) : & la ſuite $0^2, a^2, b^2, c^2, d^2 \ldots x^2$, pour s'exprimer ainſi : $\frac{0^2}{1}, \frac{a^2}{1}, \frac{b^2}{1}, \frac{c^2}{1}, \frac{d^2}{1} \ldots \frac{x^2}{1}$.

Maintenant, pour démontrer que les termes de ces deux ſuites ſont réciproques, il n'y a qu'à prendre dans la premiere les deux termes $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}$; & dans la ſeconde, les termes correſpondants $\frac{a^2}{1}, \frac{b^2}{1}$; & faire voir que l'on a cette proportion $\frac{1}{a^2} . \frac{1}{b^2} :: \frac{b^2}{1} . \frac{a^2}{1}$: ce qui eſt aiſé ; puiſqu'en faiſant le produit $\frac{a^2}{a^2}$ des extrêmes, & le produit $\frac{b^2}{b^2}$ des moyens, on trouve que ces deux produits ſont égaux, à cauſe de $\frac{a^2}{a^2} = 1$, & de $\frac{b^2}{b^2} =$.

29. De là il ſuit que les termes de la ſuite $0^{-2}, a^{-2}, b^{-2}, c^{-2}, d^{-2} \ldots . x^{-2}$, qui eſt la même que la ſuite $\frac{1}{0^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{d^2} \ldots . \frac{1}{x^2}$, vont en diminuant : au lieu que ceux de la ſuite réciproque $0^2, a^2, b^2, c^2, d^2 \ldots x^2$, vont en augmentant ; & qu'au lieu que le premier terme 0^2, de la ſuite $0^2, a^2, b^2$, &c, eſt infiniment petit, au contraire le

premier terme $\frac{1}{0^1}$ de la ſuite $\frac{1}{0^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, &c, eſt infiniment grand. Car puiſque, ſelon les regles de la diviſion, le quotient devient d'autant plus grand que le diviſeur eſt moindre; il eſt clair que lorſque le diviſeur ſera infiniment petit ou zéro, le quotient doit être infiniment grand; & par conſéquent $\frac{1}{0^2}$, c'eſt-à-dire 1 diviſé par zéro, doit être infini.

30. REMARQUE II. De peur qu'on ne prenne pour un paradoxe ce que je viens de dire au ſujet de $\frac{1}{0}$; on n'a qu'à faire attention que 1 diviſé par 1 donne 1 au quotient: que 1 diviſé par $\frac{1}{2}$, donne 2 au quotient: que 1 diviſé par $\frac{1}{3}$ donne au quotient 3, &c: c'eſt-à-dire 1 diviſé par une fraction, donne toujours au quotient le dénominateur de la fraction qui ſert de diviſeur. Or on ſait que les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c, diminuent d'autant plus, que leurs dénominateurs deviennent grands: donc quand la fraction aura un dénominateur infiniment grand, & que par conſéquent elle ſera infiniment petite, la grandeur 1 diviſée par cette fraction donnera un quotient infiniment grand. Mais une fraction infiniment petite n'eſt rien, puiſqu'elle eſt moindre que tout ce qu'on peut aſſigner de de plus petit: donc elle eſt égale à zéro; & partant 1 diviſé par zéro, eſt infini.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A LA GÉOMÉTRIE.

Application au Triangle.

31. REMARQUE. Les éléments AB, CD, NR, d'un triangle MNR (*Fig.* 5), ſont entre eux comme leurs abſciſſes MA, MC, MN. Car les triangles ſemblables MAB, MCD, MNR, donnent AB. CD :: MA. MC. Or les abſciſſes MA, MC, MN, ſont entre elles comme les nombres 0. 1. 2. 4. 5..... x, dont l'expoſant eſt 1: donc la ſomme infinie des éléments AB, CD, NR, c'eſt-à-dire le triangle MNR, eſt au dernier élément NR, ou à la baſe, multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur NM; comme 1 eſt à l'expoſant 1 augmenté de l'unité; c'eſt-à-dire, comme 1 à 2: ce que nous ſavons être véritable par la Géométrie (*Géom.* 375).

Application au Cercle & à la Pyramide.

32. REMARQUE I. Si l'on diviſe le rayon AB d'un cercle (*Fig.* 8) en une infinité de parties égales, & que du centre A on décrive

des circonférences qui paſſent par les points de diviſion N, M, &c; toutes ces circonférences ſeront comme leurs rayons AN, AM, &c; ou comme les nombres 0. 1. 2. 3.... x dont l'expoſant eſt 1 : donc la ſomme de ces circonférences ſera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, ou par le rayon AB, comme 1 eſt à l'expoſant 1 augmenté de l'unité, ou comme 1 à 2. Or la ſomme des circonférences n'eſt pas différente du cercle BCD : donc le cercle eſt égal à ſa circonférence multipliée par la moitié du rayon, ou à un triangle qui auroit pour baſe une ligne droite égale à la circonférence, & pour hauteur le rayon ; ce que nous ſavons être vrai par la ſimple Géométrie (*Géom.* 378).

33. Les plans élémentaires PQ, RS, &c, d'une pyramide (*Fig.* 9.) ſont entre eux comme les quarrés de leurs diſtances AX, AZ, &c, au ſommet A (*Géom.* 540); c'eſt-à-dire, comme les quarrés des abſciſſes qu'elles occupent ſur la hauteur AB de la pyramide, & par conſéquent comme les quarrés des nombres 0. 1. 2. 3.... x, deſquels quarrés l'expoſant eſt 2 : donc la ſomme des plans élémentaires, ou la pyramide, eſt au plus grand, ou à la baſe multipliée par le nombre des termes, ou par la hauteur AB ; comme 1 eſt à l'expoſant 2 augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire, comme 1 à 3. Ainſi la pyramide eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur : ce qui eſt démontré vrai par la Géométrie ordinaire (*Géom.* 503).

34. HYPOTHESE. Si l'on fait tourner un quart de cercle ABC (*Fig.* 10) autour de ſon rayon fixe & immobile AC ; les éléments perpendiculaires ſur AC, décriront des cercles dont la ſomme ſera une demi-ſphere, & qui ſeront entre eux comme les quarrés des éléments, c'eſt-à-dire de leurs rayons, & par conſéquent comme les rectangles des parties du diametre que les éléments coupent. Or les parties AE, AF, AG, &c, que les éléments coupent du côté de A, ſont entre elles comme la ſuite infinie 0. 1. 2. 3. 4, &c ; & les parties reſtantes EP, FP, &c, ſont égales au diametre AP, moins les parties AE, AF, &c.

Nommant donc 0, a, b, c, d.... x, les parties AE, AF, AG, &c, juſqu'à la derniere AC qui eſt le rayon, & que nous nommons x; le diametre ſera par conſéquent $2x$, & les parties EP, FP, GP, ſeront $2x-0$, $2x-a$, $2x-b$, $2x-c$, $2x-d$, &c. $2x-x$. Ainſi multipliant les termes de cette ſuite par ceux de la ſuite 0, a, b, c, d.... x; les produits $2x\times 0-00$, $2xa-aa$, $2xb-bb$, $2xc-cc$, $2xd-dd$... $2xx-xx$, ſeront la ſuite des rectangles correſpondants aux quarrés des éléments : or cette ſuite eſt compoſée de deux autres, l'une poſitive, & l'autre négative.

La poſitive eſt $2x\times o$, $2xa$, $2xb$, $2xc$, $2xd\ldots 2xx$; & comme dans cette ſuite les grandeurs o, a, b, c, $d\ldots x$, ſe trouvant multipliées par la même quantité $2x$, ſont entre elles comme ſi elles n'étoient pas multipliées ; il s'enſuit que la ſomme de cette ſuite eſt à ſon dernier terme $2xx$ multiplié par le nombre des termes x, comme 1 à l'expoſant 1 de la ſuite o, a, b, c, &c, augmenté de l'unité, ou comme 1 à 2, c'eſt-à-dire que cette ſuite eſt égale à x^2.

La négative eſt $-o$, $-aa$, $-bb$, $-cc$, $-dd\ldots -xx$; & les termes de celle-ci étant comme les quarrés des nombres 0, 1, 2, 3, &c ; leur ſomme eſt égale au tiers du dernier terme $-xx$ multiplié par le nombre des termes x : donc la ſomme de la ſuite des rectangles eſt égale au produit de ſon dernier terme $2xx-xx$, c'eſt-à-dire xx multiplié par le nombre des termes, moins le tiers de ce produit. Or les cercles décrits par les éléments du quart de cercle ſont dans la même raiſon que les rectangles : donc leur ſomme, c'eſt-à-dire la demi-ſphere, eſt égale au produit du plus grand cercle BCN multiplié par le nombre des termes, ou par le rayon AC, moins le tiers de ce produit ; & par conſéquent elle en vaut les deux tiers. D'où il eſt aiſé de conclure que la demi-ſphere eſt égale aux deux tiers d'un cylindre BNMD, qui auroit pour baſe le grand cercle BCN, & pour hauteur le rayon, & que la ſphere entiere eſt égale aux deux tiers du cylindre circonſcrit, ou qui auroit pour baſe le cercle BCN, & pour hauteur le diametre AP : ce que nous ſavons être véritable par la Géométrie ordinaire (*Géom.* 510).

35. Remarque II. Les quarrés des éléments du quart de cercle ABC étant entre eux comme la ſuite des rectangles correſpondants $2x\times o-oo$, $2xa-aa$, $2xb-bb$, $2xc-cc$, $2xd-dd\ldots 2xx-xx$; les éléments ſeront donc entre eux comme la ſuite $\sqrt{2x\times o-oo}$, $\sqrt{2xa-aa}$, $\sqrt{2xb-bb}$, $\sqrt{2xc-cc}$, $\sqrt{2xd-dd}\ldots \sqrt{2xx-xx}$. On auroit donc la quadrature du cercle, ſi l'on pouvoit trouver le rapport de cette ſuite à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes ; mais c'eſt ce qu'on n'a pu découvrir juſqu'à préſent.

Application à l'Ellipſe.

36. Hypothese. Si l'on fait tourner une demi-ellipſe ACB (*Fig.* 11) autour de ſon grand axe AB ; l'ellipſoïde qui en ſera formé ſera égal au cercle que décrira le petit diametre OC multiplié par les deux tiers du grand axe AB. Car les éléments de

l'ellipſe ordonnés au grand axe AB, ſont entre eux comme les éléments du demi-cercle circonſcrit AEB : ainſi leurs quarrés, ou les cercles qu'ils décriront autour du grand axe, ſeront entre eux comme les quarrés, ou comme les cercles que décriront les ordonnées du demi-cercle. Or la ſomme des cercles décrits par les éléments du demi-cercle, c'eſt-à-dire la ſphere, eſt égale à ſon grand cercle multiplié par les deux tiers du diametre AB : donc l'ellipſoïde, ou la ſomme des cercles décrits par les éléments de l'ellipſe, ſera égal à ſon plus grand cercle, c'eſt-à-dire au cercle décrit par OC multiplié par $\frac{2}{3}$ AB.

37. Remarque. Il eſt aiſé de voir que ſi l'on fait tourner une demi-ellipſe DAC autour de ſon petit axe DC ; le ſphéroïde qui en ſera formé ſera égal au cercle que décrira le demi-grand axe AO multiplié par les deux tiers du petit axe CD : car les éléments de cette demi-elliſpe ordonnés au petit axe, ſont entre eux comme les éléments du demi-cercle inſcrit DHC.

Application à la Parabole.

38. Dans la parabole ordinaire MNR (*Fig.* 7) les quarrés des éléments AB, CD, ſont entre eux comme les abſciſſes MA, MC, &c, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4. 5 .... x : donc les éléments ſont entre eux comme les racines quarrées de ces nombres, leſquelles ont pour expoſants $\frac{1}{2}$. Par conſéquent leur ſomme eſt au dernier ou plus grand NR multiplié par le nombre des termes, ou par NM, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à $\frac{3}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ eſt à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3 : ainſi la parabole eſt les deux tiers du rectangle circonſcrit.

39. Hypothese I. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 13) autour de ſon axe fixe & immobile MR, ſes éléments AB, CD, perpendiculaires à l'axe, décriront des cercles dont la ſomme ſera un paraboloïde, & ces cercles ſeront entre eux comme les quarrés des éléments qui ſont leurs rayons : or les quarrés des éléments ſont entre eux comme leurs abſciſſes, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4 .... x : donc la ſomme des quarrés des éléments, ou celle de leurs cercles, eſt au dernier & plus grand NS multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur MR, comme 1 à 2, c'eſt-à-dire, la paraboloïde eſt la moitié du cylindre circonſcrit.

40. Hypothese II. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 14) autour de la baſe HN de ſon complément MHN ; on trouvera le ſolide décrit en cette ſorte.

Je

Je cherche d'abord le ſolide décrit par ſon complément, c'eſt-à-dire la ſomme des cercles décrits par ſes éléments BE, DF, &c, perpendiculaires à HN. Mais comme le rapport de ces éléments entre eux m'eſt inconnu, car je ne connois dans ce complément que le rapport des éléments perpendiculaires ſur MH ; j'obſerve que les éléments BE, DF, &c, ne ſont autre choſe que les éléments AE, CF, &c, du rectangle circonſcrit, moins les éléments AB, CD, &c, de la parabole, leſquels ſont entre eux comme les racines de leurs abſciſſes MA, MC, &c, ou des nombres 0. 1. 2. 3. &c.

Nommant donc *e* chaque élément AE, &c, du rectangle ; & *r* chaque élément AB, &c, de la parabole; chaque élément BE, &c, du complément ſera $e-r$. Or les cercles que les éléments $e-r$ décriront autour de HN ſeront comme les quarrés de ces éléments qui ſont leurs rayons : faiſant donc le quarré de $e-r$ qui eſt $ee-2er+rr$; les quarrés des éléments BE, DF, &c, formeront la ſuite des $ee-2er+rr$, & par conſéquent cette ſuite contiendra la ſuite *ee* des quarrés des égaux ou des quarrés des éléments AE, CF, &c, du rectangle circonſcrit RH, moins $2er$, c'eſt-à-dire moins deux ſuites des racines quarrées ou des éléments AB, CD, &c, de la parabole multipliés chacun par *e*, plus la ſuite des quarrés *rr* de ces racines. Or la ſuite des *ee* eſt égale à ſon dernier terme, c'eſt-à-dire au quarré de RN, ou MH, multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur HN : les *er* étant tous multipliés par la même quantité *e*, ſont entre eux comme s'ils n'étoient pas multipliés ; & par conſéquent leur ſomme eſt à leur dernier terme, ou au quarré de RN, ou MH, multiplié par le nombre des termes HN, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité, ou comme 2 eſt à 3 : donc les $2er$, c'eſt-à-dire les doubles des *er*, ſont les $\frac{2}{3}$ de leur dernier terme multiplié par HN. Enfin les *rr* étant les quarrés des racines, ſont comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c ; & leur ſomme eſt la moitié du produit de leur dernier terme, ou quarré de RN ou HM, multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur HN : donc la ſuite des quarrés des éléments eſt égale au produit $\overline{HM}\times HN$, moins les $\frac{2}{3}$ de ce produit, plus la moitié ; c'eſt-à-dire, elle eſt égale à $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$ du produit de ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes. Or les cercles décrits par les éléments BE, DF, &c, du complément ſont entre eux comme les quarrés de ces éléments : donc la ſomme des cercles, ou le ſolide décrit par le complément, eſt le ſixieme du pro-

duit de ſon plus grand cercle MT multiplié par la hauteur HN, c'eſt-à-dire le ſixieme du cylindre circonſcrit RT.

D'où il ſuit que le ſolide décrit par la circonvolution de la parabole MNR autour de HN doit être les $\frac{5}{6}$ du cylindre RT.

41. REMARQUE. Lorſqu'on a une ſuite compoſée de pluſieurs autres, il faut que les derniers termes de chacune de ces ſuites ſoient égaux entre eux pour pouvoir en tirer la ſomme totale, comme nous avons fait dans l'exemple précédent: mais ſi cela n'étoit pas, on s'y prendroit comme il ſera dit plus bas.

42. HYPOTHESE III. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 15) autour d'une droite MH tangente à ſon ſommet M; on trouvera le ſolide décrit en cette ſorte.

Les éléments AB, CD, &c, du complément MHN perpendiculaires ſur MH, ſont entre eux comme les quarrés de leurs abſciſſes MA, MC, ou des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c: donc les quarrés de ces éléments ſont entre eux comme les quatriemes puiſſances de ces nombres, & par conſéquent ils ſont à leur dernier terme, c'eſt-à-dire au quarré de HN multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur MH, comme 1 eſt à l'expoſant 4 augmenté de l'unité, ou comme 1 à 5. Mais les cercles que les éléments décrivent en tournant autour de MH, ſont entre eux comme les quarrés des éléments: donc leur ſomme eſt le $\frac{1}{5}$ du produit du plus grand NT multiplié par MH, c'eſt-à-dire le cinquieme du cylindre circonſcrit RT: donc le ſolide produit par la circonvolution de la demi-parabole MNR doit être les $\frac{2}{5}$ de ce cylindre.

43. HYPOTHESE IV. Si l'on fait tourner une demi-parabole MNR (*Fig.* 16) autour de ſa baſe RN, voici comme on trouvera le ſolide décrit: les éléments AB, CD, &c, perpendiculaires ſur la baſe RN, ſont égaux aux éléments AE, CF, du rectangle circonſcrit RH moins les éléments BE, DF, &c, du complément, qui ſont entre eux comme les quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4. &c.

Nommant donc e chaque élément AE, &c, du rectangle; & q chaque élément BE du complément; les éléments AB, &c, ſeront les $e-q$, & leurs quarrés ſeront les $ee-2eq+qq$. Ainſi la ſuite de leurs quarrés contiendra la ſuite des ee, ou des quarrés égaux des éléments du rectangle, moins $2eq$, c'eſt-à-dire moins deux fois la ſuite des quarrés ou des éléments du complément multipliés chacun par e, plus la ſuite des qq ou des quatriemes puiſſances des nombes 0. 1. 2. 3 .... x. Or la ſuite des ee eſt égale à ſon dernier terme, ou au quarré de MR multiplié par le nombre des termes

NR : les *eq* étant la ſuite des quarrés, multipliés chacun par une même grandeur *e*, ſont entre eux comme s'ils n'étoient pas multipliés, & par conſéquent à cauſe de leur expoſant 2 leur ſomme eſt le tiers du produit de leur dernier terme *eq*, ou du quarré de HN ou MR multiplié par le nombre des termes RN : d'où il ſuit que la ſomme des 2*eq* eſt les deux tiers du même produit. Enfin la ſomme des *qq* dont l'expoſant eſt 4, eſt le cinquieme du produit de ſon dernier terme *qq*, c'eſt-à-dire du quarré $\overline{HN}$, ou $\overline{RM}$, multiplié par le nombre des termes RN. Donc la ſomme des quarrés des éléments AB, CD, &c, de la parabole eſt égale au produit $\overline{RM}\times RN$ du quarré de leur dernier terme multiplié par le nombre des termes, moins les $\frac{2}{3}$ de ce produit, plus le $\frac{1}{5}$, c'eſt-à-dire égale à $\frac{6}{5}-\frac{2}{3}=\frac{18}{15}-\frac{10}{15}=\frac{8}{15}$ du produit : donc la ſomme des cercles décrits par ces éléments eſt auſſi au plus grand MS multiplié par le nombre des termes RN, comme 8 à 15, & par conſéquent elle eſt les huit cinquiemes du cylindre circonſcrit MT.

Paraboles d'un genre ſupérieur.

44. REMARQUE. Il y a des paraboles de tous les degrés au-deſſus de la parabole ordinaire, qui ſe nomme *parabole quarrée*, parceque les quarrés de ſes ordonnées ſont entre eux comme leurs abſciſſes ; & dans chaque degré, excepté dans le ſecond, qui eſt celui de la parabole ordinaire, il ſe trouve plus d'une parabole.

Par exemple, en nommant *y* chaque ordonnée, *x* chaque abſciſſe, & *a* le parametre, la *premiere parabole du troiſieme degré* eſt $y^3=aax$, c'eſt-à-dire celle dans laquelle les cubes des ordonnées ſont égaux aux abſciſſes multipliées par le quarré du parametre, & par conſéquent les cubes des ordonnées ſont comme les abſciſſes. La *ſeconde parabole du même degré* eſt $y^3=axx$, c'eſt-à-dire celle dans laquelle les cubes des ordonnées ſont entre eux comme les quarrés des abſciſſes ; & dans ce degré il n'y a que ces deux paraboles, parcequ'on ne peut pas combiner les lettres *a*, *x*, autrement que de ces deux façons.

La *premiere parabole du quatrieme degré* eſt $y^4=a^3x$, où les quatriemes puiſſances des ordonnées ſont entre elles comme leurs abſciſſes : la *ſeconde parabole du même degré* eſt $y^4=ax^3$; & quoiqu'il ſemble qu'on puiſſe en trouver une troiſieme $y^4=aaxx$, cependant celle-ci eſt du ſecond degré : car celle du ſecond degré étant $yy=ax$, il eſt clair qu'en quarrant les deux membres on aura $y^4=aaxx$.

La *premiere parabole du cinquieme degré* eſt $y^5 = a^4x$; la ſeconde $y^5 = a^3xx$; la troiſieme eſt $y^5 = aax^3$, & la quatrieme eſt $y^5 = ax^4$.

Dans le ſixieme degré on trouve $y^6 = a^5x$, $y^6 = ax^5$. Mais $y^6 = a^4xx$ n'eſt pas de ce degré : car en tirant la racine quarrée de part & d'autre, on a $y^3 = a^2x$; ce qui fait voir que cette parabole eſt du troiſieme degré. De même $y^6 = a^3x^3$, & $y^6 = a^2x^4$ ne ſont pas du ſixieme degré : car par l'extraction de la racine cubique, on réduit la premiere à $y^2 = ax$ qui eſt la parabole quarrée ; & par l'extraction de la racine quarrée, on réduit la ſeconde à $y^3 = axx$ qui eſt la ſeconde parabole du troiſieme degré.

On trouvera de même les paraboles du ſeptieme degré, &c, en obſervant que dans tous les degrés, les premieres paraboles ſont celles où l'abſciſſe x eſt au premier degré. Cela poſé :

45. COROLLAIRE. *Il eſt aiſé de trouver le rapport de toutes les paraboles au rectangle circonſcrit, de quelque degré que ſoient ces paraboles.*

I°. Par exemple, dans la premiere parabole cubique ou du troiſieme degré $y^3 = aax$; les cubes AB, CD, &c (*Fig.* 17), étant entre eux comme leurs abſciſſes ; les ordonnées ou les éléments ſont par conſéquent comme les racines cubiques des abſciſſes MA, MC, &c : ou comme les racines des nombres 0. 1. 2. 3. 4. .... x, leſquelles ont pour expoſant $\frac{1}{3}$: donc la ſomme des éléments eſt au dernier ou plus grand RN multiplié par le nombre des termes MR, comme 1 à l'expoſant $\frac{1}{3}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{4}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{4}{3}$, c'eſt-à-dire comme 3 à 4 ; & partant la parabole eſt les $\frac{3}{4}$ du rectangle circonſcrit.

II°. De même dans la premiere parabole $y^4 = a^3x$ du quatrieme degré, les quatriemes puiſſances des ordonnées ou des éléments étant entre eux comme les abſciſſes, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4. .... x ; les éléments ſont comme les racines quatriemes de ces nombres, leſquels ont pour expoſant $\frac{1}{4}$: donc leur ſomme eſt au rectangle circonſcrit, comme 1 à l'expoſant $\frac{1}{4}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{5}{4}$, ou comme $\frac{4}{4}$ à $\frac{5}{4}$, ou comme 4 à 5 ; & par conſéquent cette parabole eſt les $\frac{4}{5}$ du rectangle circonſcrit ; & ainſi des autres premieres paraboles de tous les degrés.

III°. Dans la ſeconde parabole cubique $y^3 = axx$, les cubes des ordonnées ou des éléments étant entre eux comme les quarrés des abſciſſes, ou comme les quarrés des nombres 0. 1. 2. 3. 4. .... x, leſquels quarrés ont pour expoſant 2 ; les éléments ſont par conſéquent comme les racines cubiques de ces quarrés, & ces racines ont pour expoſant $\frac{2}{3}$. Car nous ſavons que pour tirer la racine d'une

puiſſance, il faut diviſer l'expoſant de cette puiſſance par l'expoſant de la racine qu'on veut tirer (20) : donc la ſomme des éléments eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, ou au rectangle circonſcrit, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{2}{3}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{5}{3}$, ou comme $\frac{3}{3}$ à $\frac{5}{3}$, ou comme 3 à 5.

IV°. De même dans la ſeconde parabole du quatrieme degré $y^4 = ax^3$, les quatriemes puiſſances des ordonnées étant entre elles comme les cubes des abſciſſes ou des nombres 0. 1. 2. 3.... x, leſquels cubes ont pour expoſant 3, les éléments ſont comme les racines quatriemes de ces cubes, & par conſéquent leur expoſant eſt $\frac{3}{4}$: donc leur ſomme eſt au rectangle circonſcrit, comme 1 eſt à $\frac{3}{4}$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $\frac{7}{4}$, ou comme $\frac{4}{4}$ à $\frac{7}{4}$, c'eſt-à-dire comme 4 à 7 ; & ainſi des autres.

46. HYPOTHESE. Si ſur l'axe MR d'une demi-parabole ordinaire MNR (*Fig.* 18) on eleve perpendiculairement un triangle rectangle MRT, & qu'on multiplie les éléments AB, CD, &c, de la parabole par les éléments correſpondants AE, CF, &c, du triangle ; les rectangles formés par ces produits compoſeront un ſolide TPNRM dont on trouvera la ſolidité en cette ſorte.

Les éléments AB, CD, &c, de la parabole, ſont entre eux comme les racines quarrées de leurs abſciſſes ou des nombres 0. 1. 2. 3. .... x, leſquelles racines ont pour expoſant $\frac{1}{2}$; & les éléments AE, CF, &c, du triangle, ſont entre eux comme leurs abſciſſes, ou comme les nombres 0. 1. 2. 3.... x, dont l'expoſant eſt 1 : donc les produits des termes de ces deux ſuites, c'eſt-à-dire les rectangles faits par les éléments de la parabole, multipliés par ceux du triangle, auront pour expoſant $\frac{1}{2} + 1$, ou $\frac{3}{2}$ (20) ; & par conſéquent ces rectangles ſeront à leur dernier terme ou à la baſe TPNR multipliée par le nombre des termes, ou par la hauteur MR, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{3}{2}$ plus 1, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{5}{2}$, c'eſt-à-dire comme 2 à 5. Ainſi le ſolide TPRNM ſera les deux cinquiemes du parallélipipede circonſcrit, c'eſt-à-dire de même baſe & de même hauteur.

47. REMARQUE. A l'exemple du ſolide précédent, on pourroit en former une infinité d'autres, & en trouver la ſolidité tout auſſi aiſément ; par exemple, on pourroit multiplier les éléments d'un triangle par les éléments d'un complément de parabole, ou les éléments d'une parabole par ceux de ſon complément, ou les éléments d'une parabole d'un certain degré par ceux d'une parabole d'un autre degré, &c.

48. HYPOTHESE I. Si l'on ajoute aux éléments BA, DC, &c,

d'une demi-parabole quarrée MNR (*Fig.* 19), les éléments AE, CF, &c, d'un rectangle MRTP; & qu'on faſſe tourner leur ſomme autour du côté PT fixe & immobile du rectangle; le ſolide produit par la circonvolution de la figure NMPT ſe connoîtra en cette ſorte.

Les éléments de la figure NMPT étant compoſés des éléments du rectangle qui ſont tous égaux entre eux, & des éléments de la demi-parabole qui ſont entre eux comme les racines de leurs abſciſſes, ou des nombres 0. 1. 2. 3.... x; ſi nous nommons e chaque élément du rectangle, & r chaque élément de la demi-parabole; les éléments de la figure NMPT ſeront les $e+r$, & leurs quarrés ſeront la ſuite des $ee+2er+rr$. Or cette ſuite contient 1°. la ſuite des ee, ou des quarrés des éléments du rectangle: 2°. la ſuite $2er$, c'eſt-à-dire deux fois la ſuite des éléments de la demi-parabole multipliés chacun par e: 3°. la ſuite des rr, ou des quarrés des éléments de la demi-parabole. Mais la ſuite des ee eſt égale à ſon dernier terme, ou au quarré de RT multiplié par le nombre des termes, ou par la hauteur PT: les er étant les r multipliés par la même quantité e, ſont entre eux comme les r; & par conſéquent leur ſomme eſt au dernier terme er, c'eſt-à-dire au rectangle RT× NR multiplié par le nombre des termes, ou par PT, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ des r augmenté de l'unité, c'eſt-à-dire comme 1 eſt à $\frac{3}{2}$, ou comme 2 à 3; d'où il ſuit que les $2er$ ſont les $\frac{4}{3}$ de RT×NR multiplié par PT: enfin les rr étant les quarrés des racines quarrées ou des éléments de la demi-parabole, ſont comme les nombres 0. 1. 2. 3.... x, & leur ſomme eſt la moitié de leur dernier terme, ou du quarré de NR multiplié par le nombre des termes PT.

Maintenant, comme ces trois ſuites ee, $2er$, rr, n'ont pas leurs derniers termes égaux, à cauſe que RT peut être plus grand ou moindre que NR, nous ne pouvons pas faire une ſomme totale de leurs ſommes: ainſi nous nous contenterons de ſavoir que la ſomme des quarrés des éléments BE, DF, &c, de la figure NMPT eſt $\overline{RT}^2\times PT+\frac{4}{3}RT\times RN\times PT+\frac{1}{2}\overline{NR}^2\times PT$. Or le quarré du dernier terme de cette ſomme, c'eſt-à-dire le quarré de NT ou de RT+ NR, eſt $\overline{RT}^2+2RT\times RN+\overline{NR}^2$: donc ce quarré multiplié par le nombre des termes PT eſt $\overline{RT}^2\times PT+2RT\times RN\times PT+\overline{NR}^2\times PT$; & par conſéquent la ſomme des quarrés des éléments de la figure NMPT eſt à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme $\overline{RT}^2\times PT+\frac{4}{3}RT\times RN\times PT+\frac{1}{2}\overline{NR}^2\times PT$ eſt à $\overline{RT}^2\times PT+2RT\times RN\times PT+\overline{NR}^2\times PT$, ou comme $\overline{RT}^2+\frac{4}{3}RT\times RN+\frac{1}{2}\overline{NR}^2$

eſt à $\overline{RT}^2+2RT\times RN+\overline{NR}^2$, à cauſe du multiplicateur commun PT : c'eſt-à-dire que la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes ; comme le quarré de RT plus les $\frac{4}{3}$ du rectangle fait de RT par NR, plus la moitié du quarré de NR, eſt au quarré de RT plus deux fois le rectangle de RT par NR, plus le quarré de NR ; & ce rapport peut ſe connoître aiſément quand les lignes RT, NR, ſeront connues.

Or les cercles que les éléments BE, DF, &c, décrivent en tournant autour de PT, ſont comme les quarrés de ces éléments : donc leur ſomme ou le ſolide décrit par la circonvolution de la figure NMPT autour de PT, eſt au dernier terme, ou au cercle NH multiplié par le nombre des termes PT ; comme $\overline{RT}^2+\frac{4}{3}RT\times RN+\frac{1}{2}\overline{NR}^2$ eſt à $\overline{RT}^2+2RT\times RN+\overline{NR}^2$.

A l'imitation de ce ſolide, on pourroit en former une infinité d'autres, & en trouver la valeur avec la même facilité : par exemple, on pourroit ajouter aux éléments du rectangle RMPT les éléments d'un complément de parabole quarrée, ou ceux d'une parabole, de quelque degré qu'elle fût, ou ceux d'un complément d'une parabole quelconque, &c.

De plus, ſi du ſolide décrit par la circonvolution de la figure NMPT autour de PT, nous ôtons le cylindre décrit par le rectangle MRTP, nous aurons le ſolide, ou l'anneau ouvert décrit par la demi-parabole NMR autour de PT : ce qui donne le moyen de connoître une infinité d'anneaux ouverts, qu'on pourroit former en mettant, au lieu de la parabole NMR, quelque autre parabole d'un degré plus élevé, ou quelque complément, &c.

49. REMARQUE. Dans toutes les paraboles, le rapport des éléments du complément, paralleles à l'axe, ſe connoît par l'équation même de la parabole.

Par exemple, ſoit la premiere parabole cubique MNR (*Fig.* 19), dont le complément eſt MHN, & dont l'équation eſt $y^3=aax$, qui ſignifie que les cubes des ordonnées ſont entre eux comme leurs abſciſſes. Je mene dans ſon complément les éléments AB, CD, &c, paralleles à l'axe ; & des points B, D, &c, les ordonnées BE, DF, &c. Ainſi les éléments AB, CD, &c, ſont égaux aux abſciſſes ME, MF, &c, de l'axe ; & les coupées MA, MC, &c, ſont égales aux ordonnées BE, DE, &c, à l'axe : donc les éléments AB, CD, &c, du complément, ſont comme les cubes de leurs abſciſſes MA, MC, &c ; & c'eſt ce que l'équation $y^3=aax$ me fait voir : car x repréſentant les abſciſſes, repréſente par con-

ſéquent les éléments du complément; & y^3 repréſentant les cubes des ordonnées à l'axe, repréſente auſſi les cubes des coupées MA, MC, &c. Par la même raiſon, on trouvera que dans la ſeconde parabole cubique $y^3 = axx$, les quarrés des éléments du complément ſont comme les cubes de leurs abſciſſes, & ainſi des autres.

50. HYPOTHESE II. Si l'on fait tourner une demi-hyperbole MNR (*Fig.* 20) autour de ſon premier axe prolongé PR, on trouvera le ſolide décrit en cette ſorte.

Les quarrés des éléments AB, CD, &c, ſont entre eux comme les rectangles MB×BP, MD×DP, &c, des abſciſſes MB, MD, &c, par les droites PB, PD, &c, qui ne ſont autre choſe que l'axe PM augmenté des abſciſſes MB, MD. Nommant donc a l'axe, & x chaque abſciſſe; chaque droite PB, PD, &c, ſera donc $a+x$, & chaque rectangle ſera $ax+xx$. Ainſi la ſuite des rectangles ſera la ſuite des $ax+xx$, qui contient la ſuite des ax, & celle des xx. Or les ax étant les abſciſſes x multipliés par la même grandeur a, ſont entre eux comme les x, c'eſt-à-dire, comme les nombres 0. 1. 2. 3. 4.... x: donc leur ſomme ſera la moitié de leur dernier terme MR×PM multiplié par le nombre des termes, ou par MR, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM$; & les xx étant les quarrés des abſciſſes, ſont le tiers de leur dernier terme $\overline{MR}^2$ multiplié par le nombre des termes, ou par MR, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{3}\overline{MR}^3$: partant, la ſomme des rectangles eſt $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$.

Mais le dernier ou le plus grand rectangle eſt MR×PR, ou MR×PM+MR×MR, à cauſe que PR=PM+MR; & ce rectangle, multiplié par le nombre des termes MR, eſt $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^2$: donc la ſomme des rectangles eſt à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme $\frac{1}{2}\overline{MR}^2 \times PM + \frac{1}{3}\overline{MR}^3$ eſt à $\overline{MR}^2 \times PM + \overline{MR}^2$; & diviſant tout par $\overline{MR}^2$, la ſomme eſt au dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme $\frac{1}{2}PM + \frac{1}{3}MR$ eſt à PM+MR, c'eſt-à-dire, comme la moitié du premier axe PM, plus le tiers de la plus grande abſciſſe MR, eſt à la ſomme PM+MR du premier axe & de la plus grande abſciſſe. Or les cercles décrits par les ordonnées autour de MR, ſont entre eux comme les quarrés des ordonnées: donc leur ſomme ou l'hyperboloïde eſt au dernier cercle NH multiplié par MR, c'eſt-à-dire, au cylindre circonſcrit, comme $\frac{1}{3}PM + \frac{1}{3}MR$ eſt à PM+MR.

Application

Application à l'Hyperbole.

51. HYPOTHESE I. Soit un angle MAX (*Fig.* 21) de 45 degrés, dont les côtés AM, AX, ſont indéfinis. Si l'on conçoit dans cet angle une infinité d'éléments CG, FH, &c, perpendiculaires au côté AX, & qu'après avoir pris des troiſiemes proportionnelles à chaque élément CG, FH, &c, & à une même grandeur conſtante AB, on mette ces troiſiemes proportionnelles perpendiculairement ſur AX de G en *u*, de H en *i*, &c; & qu'enſuite on faſſe paſſer une courbe par leurs extrémités *u*, *i*, E, &c:

Je dis que cette courbe ne touchera les deux droites A*d*, AX, qu'à l'infini; & que les eſpaces compris de part & d'autre entre la courbe & les droites A*d*, AX, ſont infinis & égaux entre eux.

DÉMONSTRATION. En premier lieu, la droite A*d* étant troiſieme proportionnelle à l'élément de l'angle MAX, lequel élément eſt égal à zéro au point A, & à la droite AB, doit être infini en longueur, & par conſéquent la courbe qui doit paſſer par ſon extrémité ne peut la rencontrer qu'à l'infini.

En ſecond lieu, les éléments CG, FH, &c, de l'angle MAB allant toujours en augmentant, il s'en trouve un *b*B égal à AB; après quoi ceux qui viennent après, tels que *r*R, M*m*, &c, deviennent d'autant plus grands que *b*B, qu'ils s'en éloignent davantage: c'eſt pourquoi les troiſiemes proportionnelles à ces éléments, & à AB, vont toujours en diminuant. Cependant il ne peut ceſſer d'y avoir de troiſieme proportionnelle, ou la troiſieme proportionnelle ne peut devenir égale à zéro, que lorſque l'élément de l'angle MAX deviendra infiniment grand par rapport à AB: ſon abſciſſe priſe ſur la ligne AX ſera auſſi infinie; car les éléments CG, FH, &c, de l'angle MAX ſont égaux chacun à chacun à leurs abſciſſes AG, AH, &c, à cauſe qu'ils ſont perpendiculaires ſur AX, & que l'angle MAX eſt de 45 degrés: donc la courbe ne rencontrera la droite AX qu'à l'infini; ainſi les deux droites A*d*, AX, ſont aſymptotes de la courbe.

En troiſieme lieu, à cauſe de CG. AB :: AB. G*u*, nous avons $CG \times G\overline{u} = \overline{AB}$. De même à cauſe de FH. AB :: AB. H*i*, nous avons $FH \times H\overline{i} = \overline{AB}$; donc $CG \times G\overline{u} = FH \times H\overline{i}$, & partant G*u*. H*i* :: FH. CG. Or les triangles ſemblables FHA, CGA, donnent FH. CG :: AH. AG; donc G*u*. H*i* :: AH. AG; c'eſt-à-dire, les éléments G*u*, H*i*, &c, perpendiculaires à l'aſymptote AX, ſont entre eux réciproquement comme leurs abſciſſes: or les abſciſſes AG, AH, &c,

ſont comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c, dont l'expoſant eſt 1; donc l'expoſant de la ſuite des ordonnées *Gu*, *Hi*, &c, à l'aſymptote AX eſt —1 (28) : ainſi la ſomme des éléments compris dans l'eſpace BA*due* eſt à ſon dernier terme BE multiplié par le nombre des termes BA, c'eſt-à-dire au quarré ABED, comme 1 eſt à —1+1, ou comme 1 à zéro : mais le rapport de 1 à zéro eſt infini; donc l'eſpace BA*due* eſt infini par rapport au quarré ABED.

Remarquez que je dis *le quarré* ABED ; à cauſe que l'élément *b*B de l'angle MAX mené de l'extrémité B de la droite AB étant égal à AB, la troiſieme proportionnelle BE à l'élément *b*B, & à la droite AB, eſt égal à AB.

De même ſi je mene des ordonnées T*s*, P*x*, &c, à l'aſymptote A*d*, & que de leurs extrémités *s*, *x*, je mene les ordonnées *s*S, *xm*, &c, à l'aſymptote AX; j'aurai, à cauſe des paralleles, AT=S*s*, AP=*mx*, &c; & T*s*=AS, P*x*=A*m*, &c. Or nous venons de trouver que les ordonnées S*s*, *mx*, &c, ſont réciproques à leurs abſciſſes: donc les ordonnées T*s*, P*x*, &c, à l'aſymptote A*d*, ſont réciproques à leurs abſciſſes AT, AP, &c. Mais ces abſciſſes ſont entre elles comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c, dont l'expoſant eſt 1 : donc la ſuite des ordonnées T*s*, P*x*, &c, de l'eſpace indéfini ADESX, a pour expoſant —1 : & par conſéquent cette ſuite eſt à ſon dernier terme DE multiplié par le nombre des termes AD, c'eſt-à-dire au quarré ADEB, comme 1 eſt à —1+1, ou comme 1 à 0. Ainſi l'eſpace indéfini eſt infiniment grand par rapport au quarré ABED.

Les eſpaces indéfinis BA*due*, ADE*s*X, ayant le même rapport infini au quarré ABED, ſont donc parfaitement égaux entre eux.

52. COROLLAIRES. I°. *La courbe que nous venons de décrire eſt une hyperbole ordinaire équilatere, c'eſt-à-dire dont les deux axes ſont égaux ; & ſa puiſſance eſt le quarré ABED.*

Car d'un point quelconque *i* menant les ordonnées *i*H, *i*N, aux deux aſymptotes, nous aurons *i*H. BE :: AB. AH, comme on a vu ci-deſſus ; donc *i*H×AH=$\overline{BE}$. Or à cauſe des paralleles, nous avons *i*N=AH, & H*i*=AN : donc *i*N×AN=$\overline{BE}$, ce qui eſt la propriété de l'hyperbole entre ſes aſymptotes.

J'ai dit que cette hyperbole eſt équilatere, à cauſe que l'angle des aſymptotes eſt droit; car ſi l'on décrit une hyperbole avec deux axes égaux, on trouvera toujours que ſes aſymptotes formeront un angle droit, ce qui n'arrive jamais quand les deux axes ſont inégaux.

II°. *Si l'on fait tourner l'eſpace hyperbolique infini BA*duE, *autour de l'aſymptote A*d *immobile, le ſolide infiniment long* pqtxzh,

produit par cette circonvolution, eſt cependant d'une grandeur finie & égal à un parallélipipede qui auroit pour baſe le quarré ABED, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence décrite par le rayon AB.

Car par la propriété de l'hyperbole *Gu*×AG=*Hi*×AH=BE× AB, c'eſt-à-dire les produits des ordonnées *Gu*, *Hi*, &c, par leurs abſciſſes AG, AH, &c, ſont tous égaux entre eux, & au quarré de AB: or les abſciſſes AG, AH, &c, AB, ſont entre elles comme les circonférences qu'elles décriront autour de l'aſymptote *Ad* : donc les ordonnées *Gu*, *Hi*, &c, BE, multipliées par les circonférences que leurs abſciſſes AG, AH, &c, AB, décriroient, donnent des produits égaux, c'eſt-à-dire *Gu*×(AG=*Hi*×(AH=BE×(AB.

Mais quand la figure BA*du*E tourne autour de l'aſymptote, ſes ordonnées *Gu*, *Hi*, &c, BE, décrivent des ſurfaces de cylindres qui ont pour baſe les cercles décrits par les abſciſſes AG, AH, &c, AB; & ces ſurfaces ne ſont autre choſe que les produits *Gu*×(AG, *Hi*×(AH, &c, BE×(AB: donc le ſolide décrit par la circonvolution de la figure BA*du*E n'eſt pas différent de la ſomme de ces ſurfaces, ou des produits *Gu*×(AG, *Hi*×(AH, &c. Or la ſomme de ces produits eſt égale au dernier produit BE×(AB multiplié par le nombre qui en marque la multitude, c'eſt-à-dire par AB : donc le ſolide eſt égal à BE×(AB×AB, ou BE×AB×(AB ; c'eſt-à-dire que ſi l'on prend une ligne droite égale à (AB, & qu'on multiplie le quarré ADEB par cette ligne, on aura la valeur du ſolide. Mais le produit du quarré ADEB par la ligne égale à (AB eſt un parallélipipede : donc le ſolide eſt égal à ce parallélipipede.

On prouveroit la même choſe par l'arithmétique des Infinis ; car les éléments *Gu*, *Hi*, &c, étant réciproques aux éléments CG, FH, &c, de l'angle indéfini MAX, ont pour expoſant — 1 ; à cauſe que l'expoſant des éléments CG, FH, &c, eſt 1. Multipliant donc ces éléments *Gu*, *Hi*, &c, par les circonférences de leurs abſciſſes AG, AH, dont l'expoſant eſt 1 ; la ſuite des produits aura pour expoſant —1+1, ou 0 : & par conſéquent cette ſuite ſera à ſon dernier terme BE×(AB multiplié par le nombre des termes AB, comme 1 eſt à 0+1, ou comme 1 à eſt 1. Ainſi la ſomme des ſurfaces décrites par les éléments *Gu*, *Hi*, ou le ſolide, ſera BE× AB×(AB : ce qui fait voir le parfait accord de l'arithmétique des Infinis avec la Géométrie.

53. HYPOTHESE II. *Soit une demi-parabole ordinaire indéfinie* Abrm (Fig. 22), *dont le parametre ſoit la ligne AB, & dans laquelle on ait mené l'ordonnée* ab *égale au parametre, & par conſéquent*

égale à ſon abſciſſe a*A* (Géom. 673). *Si l'on prend des troiſiemes proportionnelles aux éléments CG, FH, &c, du complément indéfini* m*AX, & au parametre AB; & qu'après avoir mis ces troiſiemes proportionnelles perpendiculairement ſur AX de G en* u, *de H en* i, *&c, on faſſe paſſer un courbe par ſes extrémités, je dis;*

I°. *Que cette courbe ne rencontrera les droites Ad, AX, qu'à l'infini:*

II°. *Que l'eſpace indéfini compris entre la courbe & l'aſymptote Ad eſt pour ainſi dire plus qu'infini; & qu'au contraire l'eſpace compris entre la courbe & l'autre aſymptote AX, eſt d'une valeur finie, quoiqu'il ſoit indéfini en longueur.*

DÉMONSTRATION. En premier lieu, la ligne A*d* eſt infinie en longueur, à cauſe qu'elle eſt troiſieme proportionnelle à l'élément du complément parabolique, lequel eſt égal à zéro au point A, & au parametre AB.

En ſecond lieu, les éléments du triangle parabolique qui ſe trouvent au-deſſous de l'élément *b*B=AB, ſont d'autant plus grands que *b*B ou AB, qu'ils s'en éloignent davantage: ainſi les troiſiemes proportionnelles à ces éléments & au parametre AB, ſont d'autant plus petites que BE=AB, qu'elles s'en éloignent davantage. Cependant la troiſieme proportionnelle ne peut devenir infiniment petite ou égale à zéro, que lorſque l'élément *m*M du complément ſera infiniment grand par rapport à *b*B: or alors nous aurons *m*M. *b*B :: $\overline{MA}^2$. $\overline{AB}^2$, par la propriété de la parabole: donc $\overline{MA}^2$ ſera infiniment grand par rapport à $\overline{AB}^2$, & par conſéquent MA ſera auſſi infiniment grand par rapport à AB. Ainſi la courbe ne rencontrera la droite AX qu'à l'infini.

En troiſieme lieu, à cauſe de CG. AB :: AB. G*u*, nous avons CG×G*u*=$\overline{AB}^2$; & à cauſe de FH. AB :: AB. H*i*, nous avons FH×H*i*=CG×G*u*: donc G*u*. H*i* :: FH. CG. Mais par la propriété de la parabole on a FH. CG :: $\overline{AH}^2$. $\overline{AG}^2$: donc G*u*. H*i* :: $\overline{AH}^2$. $\overline{AG}^2$; c'eſt-à-dire, les ordonnées à l'aſymptote AX, ſont entre elles réciproquement comme les quarrés de leurs abſciſſes. Or les abſciſſes étant entre elles comme les nombres naturels 0. 1. 2. 3. &c; leurs quarrés ont pour expoſant 2: donc dans l'eſpace indéfini BA*du*E, la ſuite des éléments ordonnés à AX a pour expoſant —2 (28); & par conſéquent cette ſuite eſt à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes AB, c'eſt-à-dire au quarré ABED, comme 1 eſt à —2+1, ou comme 1 eſt à —1. Ainſi

l'eſpace indéfini BA*du*E eſt pour ainſi dire plus qu'infini par rapport au quarré ABED, puiſque ſon rapport à ce quarré eſt comme 1 à —1, lequel eſt plus grand que le rapport de 1 à 0, qui eſt infini.

Maintenant ſi je mene des ordonnées T*s*, P*x*, &c, à l'autre aſymptote A*d*, & que de leurs extrémités *s*, *x*, j'en mene d'autres *s*S, M*x*, à l'aſymptote AX; j'aurai S*s*=A*t*, M*x*=AP, &c, à cauſe des paralleles; & T*s*=A*s*, P*x*=AM, &c. Or S*s*, M*x*, &c, ſont réciproques aux quarrés de AS, AM, &c: donc les quarrés des ordonnées T*s*, P*x*, &c, à l'aſymptote A*d*, ſont auſſi réciproques à leurs abſciſſes; & par conſéquent leurs racines, c'eſt-à-dire les ordonnées T*s*, P*x*, &c, ſont entre elles réciproquement comme les racines quarrées des abſciſſes. Or les abſciſſes étant comme les nombres 0. 1. 2. 3. &c, leurs racines quarrées ont pour expoſant $\frac{1}{2}$: donc dans l'eſpace indéfini DAX*s*E, la ſuite des éléments ordonnés à AD a pour expoſant $-\frac{1}{2}$; & par conſéquent cette ſuite eſt à ſon dernier terme DE multiplié par le nombre des termes AD, c'eſt-à-dire au quarré ABED, comme 1 eſt à $-\frac{1}{2}+1$, ou comme 1 eſt à $\frac{1}{2}$, ou enfin comme 2 eſt à 1. Ainſi l'eſpace indéfini DAX*s*E eſt double du quarré ABED, & par conſéquent cet eſpace eſt fini.

54. COROLLAIRE. *La courbe que nous venons de décrire eſt une hyperbole équilatere du troiſieme degré; & ſa propriété eſt que ſi l'on mene une ordonnée quelconque i*N *à l'aſymptote A*d, *le produit du quarré de cette ordonnée par ſon abſciſſe AN eſt toujours égal au cube de AB.*

Car à cauſe que les ordonnées H*i*, BE, &c, à l'aſymptote AX, ſont réciproques aux quarrés de leurs abſciſſes, nous avons H*i*. BE :: $\overline{\text{BA}}$. $\overline{\text{AH}}$: donc H*i*×$\overline{\text{AH}}$=BA×BE=$\overline{\text{AB}}$. Or H*i*=AN, & *i*N=AH, à cauſe des paralleles: donc AN×$\overline{i\text{N}}$=$\overline{\text{AB}}$.

Au contraire, ſi l'on mene une ordonnée quelconque H*i* à l'aſymptote AX, le produit de cette ordonnée par le quarré de ſon abſciſſe AH, eſt toujours égal au cube de AB, ainſi qu'on vient de voir.

55. REMARQUE. Si au lieu d'un complément de parabole quarrée, on prenoit un complément de premiere parabole cubique; & qu'après avoir pris des troiſiemes proportionnelles à chacun de ſes éléments & à ſon parametre, on achevât le reſte comme ci-deſſus, *la courbe qu'on décriroit par ce moyen ſeroit une hyperbole du qua-*

trieme degré, dont on découvriroit aiſément les propriétés de même que de la précédente.

On auroit les *hyperboles des degrés ſupérieurs*, c'eſt-à-dire du cinquieme degré, du ſixieme, &c, en employant des compléments de premiere parabole du quatrieme degré, du cinquieme degré; & ainſi de ſuite.

SECOND TRAITÉ.

LA MÉCHANIQUE,

OU LA THÉORIE DU MOUVEMENT.

56. LA Méchanique eſt la *ſcience du Mouvement:* elle comprend cinq parties, les Loix du mouvement, la Statique, l'Hydroſtatique, l'Airométrie, & l'Hydraulique (*).

57. On dit qu'*un corps eſt en mouvement*, lorſqu'il eſt tranſporté d'un lieu à un autre; & qu'*il eſt en repos*, lorſqu'il ne change point de place.

58. La *Maſſe d'un corps* eſt la quantité de matiere qui le compoſe; & *ſon volume* eſt ſon extenſion en longueur, largeur, & profondeur.

59. La *Force mouvante d'un corps* eſt ce qui donne le mouvement à ce corps.

60. La *Viteſſe d'un corps* eſt un effet de la force motrice, par lequel le corps parcourt un certain eſpace en un temps déterminé: de façon que ſi deux corps A, B, dans un même temps, ou dans des temps égaux, parcourent des eſpaces égaux, leurs viteſſes ſont

(*) M. l'Abbé Deidier ne donnoit à ce ſecond Chapitre ou Traité de ſon troiſieme Livre, que le titre de *Méchanique:* l'autre titre de *Théorie du mouvement*, qu'on a ajouté au premier dans cette nouvelle édition, paroît mieux répondre, comme on le voit ici, à l'idée de l'Auteur, & aux différentes branches ou diviſions de cette idée.

On ſuppoſe que les perſonnes qui liront ce Traité, ont déja quelques connoiſſances ſur la Phyſique: celles qui n'en auroient pas de ſuffiſantes, pourront ſe les donner aiſément & en fort peu de temps, dans un ouvrage nouveau, intitulé: *Théorie des Etres ſenſibles*, ou *Cours complet de Phyſique ſpéculative, expérimentale, ſyſtématique, & géométrique, miſe à la portée de tout le monde.* Le ſecond Traité de cet Ouvrage, ou la Théorie du Mouvement, dont on a emprunté ou imité ici le titre, eſt regardé par les connoiſſeurs comme un chef-d'œuvre de clarté, de conciſion, de ſolidité, dans lequel ſe trouvent reſſerrés dans le plus bel ordre & préſentés avec la plus ſenſible lumiere, les germes & les développements néceſſaires de tous les grands principes de la Méchanique & de la Phyſique, qu'on voit enſuite ſe déployer plus richement, & s'appliquer comme d'eux-mêmes aux grands phénomenes de la Nature, dans la Théorie de la Terre, de l'Eau, de l'Air, de la Lumiere, du Ciel ou des Globes céleſtes.

égales ; & s'ils parcourent des eſpaces inégaux, leurs vîteſſes ſont inégales : la plus grande eſt celle qui fait parcourir un plus grand eſpace ; la moindre eſt celle qui fait parcourir un moindre eſpace.

61. La *Direction du mouvement d'un corps* eſt la ligne droite le long de laquelle on conçoit que ce corps ſe meut.

AXIOMES.

62. *Rien ne ſe fait dans la Nature ſans quelque raiſon.* Si aujourd'hui une choſe eſt d'une façon, & demain d'une autre, il y a certainement une raiſon de changement.

63. *Les effets ſont proportionnels à leurs cauſes.* Si une cauſe produit un tel effet, il faut une cauſe double ou triple pour produire un effet double ou triple.

64. *Tout corps eſt indifférent au mouvement ou au repos.* Il eſt incapable de choix & de volonté, & par conſéquent il ne peut ſe mettre lui-même dans un état différent.

De là il ſuit que ſi un corps paſſe du mouvement au repos, du repos au mouvement, ou d'une direction de mouvement à une autre, il y a néceſſairement quelque cauſe externe qui produit ces effets.

65. *Si un corps A double ou triple, &c, d'un autre corps B, parcourt un eſpace égal à celui que B parcourt dans un même temps ; la force qui donne le mouvement au corps A, eſt double, ou triple, &c, de la force motrice de B.* Suppoſons A double de B : je le coupe en deux parties égales entre elles & au corps B : ainſi il faudra deux forces égales à la force motrice de B, pour faire parcourir à ces deux parties un eſpace égal à celui que B parcourt : or la force qui meut le corps A tout entier, fait le même effet ; donc, &c.

66. *Si un corps A, égal à un autre corps B, parcourt un eſpace double, triple, &c, de celui que B parcourt dans le même temps ; la force motrice de A eſt double ou triple, &c, de la force motrice de B.* A cauſe de l'égalité des corps A, B ; la force de A fait le même effet que ſi la force de B faiſoit parcourir à B un eſpace double, triple, &c, de celui que B parcourt : or en ce cas la force de B ſeroit double ou triple de ce qu'elle eſt ; puiſque l'effet ſeroit double ou triple, &c : donc, &c.

DÉFINITIONS.

67. On nomme *quantité de mouvement* d'un corps, le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe. Car comme il faut plus de force lorſque la maſſe

masse & la vîtesse sont plus grandes; il est clair que pour estimer la quantité de mouvement, il faut avoir égard à ces deux choses. La quantité de mouvement sert à estimer la force motrice dont elle est l'effet, & à laquelle elle est par conséquent proportionnelle.

Soient, par exemple, la masse du corps A = 1, celle du corps B = 2, la vîtesse de A = 1 celle de B = 3. La quantité de mouvement de A sera donc 1, & celle de B sera 6: & par conséquent les forces de ces deux corps seront aussi comme 1 à 6; puisque ce seront ces forces qui auront produit ces quantités de mouvement, & que les causes sont proportionnelles à leurs effets. Ceci se confirme encore par ce raisonnement: si les vîtesses des corps A, B, étoient égales; la force du corps B seroit double de la force du corps A; à cause de la masse de B double de celle de A (65). Or pour donner à B une vîtesse triple de celle qu'il auroit dans cette supposition, il faut une force triple: donc cette force doit être sextuple de celle de A; car le triple du double est le sextuple. Ainsi les forces de A & B doivent être comme 1 à 6: mais 1 est le produit de la masse 1 du corps A par sa vîtesse 1; & 6 est le produit de la masse 2 du corps B par sa vîtesse 3: donc les forces des deux corps sont entre elles comme les produits des masses par les vîtesses, ou comme les quantités de mouvement.

68. Le mouvement d'un corps se fait ou en *ligne droite*, ou en *ligne courbe*, en comprenant sous le nom de lignes courbes celles qui changent de temps en temps de direction, telle qu'est, par exemple, le circuit d'un polygone; & l'un & l'autre de ces mouvements est, ou uniforme, ou accéléré, ou retardé.

69. Le *mouvement uniforme* est celui par lequel un corps parcourt des espaces égaux dans des temps égaux.

70. Le *mouvement accéléré* est celui par lequel un corps parcourt dans des temps égaux des espaces qui vont en augmentant; & à ce mouvement répond le *mouvement retardé*, par lequel un corps parcourt dans des temps égaux des espaces qui vont en diminuant.

71. Le mouvement ne peut s'accélérer que lorsqu'un corps reçoit d'un instant à l'autre de nouveaux accroissements de vîtesse: soit que ces accroissements viennent de la part de la premiere force motrice, ou de la part d'autres forces qui le poussent dans son chemin. Ainsi on pourroit se former une infinité d'hypotheses d'accélération: par exemple, on pourroit concevoir que les accroissements des vîtesses seroient comme les temps, ou comme les quarrés des temps, ou comme leurs cubes, &c, ou comme quelques-unes de

leurs racines, &c. Mais pour ne pas nous arrêter à des ſpéculations inutiles à notre ſujet, nous ne traiterons ici que du mouvement qu'on nomme uniformément *accéléré*, par lequel un corps reçoit, dans des temps égaux, des accroiſſements égaux de vîteſſe. Ce mouvement eſt celui des corps qui, par leur propre peſanteur, tendent vers le centre de la Terre.

72. Le mouvement ſe diſtingue encore en mouvement ſimple & en mouvement compoſé. Le *mouvement ſimple* eſt celui qui eſt cauſé par une ſeule & unique force; & le mouvement compoſé eſt celui qui eſt produit par deux ou pluſieurs forces qui ont des directions différentes : ſoit que ces forces ſoient uniformes ou accélérées, ou les unes uniformes & les autres accélérées.

LOIX DU MOUVEMEMT UNIFORME.

PROPOSITION I.

73. *Dans le mouvement uniforme d'un corps, les eſpaces parcourus ſont entre eux comme les temps employés à les parcourir.*

Démonstration. Puiſque dans le mouvement uniforme les eſpaces parcourus dans des temps égaux ſont égaux, il eſt clair que ſi le corps A, dans un temps quelconque, par exemple dans une minute, parcourt un eſpace quelconque, il doit, dans un temps double ou triple, &c, du premier, parcourir un eſpace double ou triple de l'eſpace parcouru dans le premier; & que, par conſéquent, le ſecond eſpace parcouru doit être au premier, comme le ſecond temps eſt au premier temps.

74. Pour abréger les démonſtrations des Propoſitions ſuivantes dans leſquelles nous conſidérons deux corps A, B, en mouvement; nous nommerons V la vîteſſe du premier, T le temps de ſon mouvement, E l'eſpace qu'il parcourt, M ſa maſſe, & Q ſa quantité de mouvement : de même nous nommerons *u* la vîteſſe du ſecond corps, *t* le temps de ſon mouvement, *e* l'eſpace qu'il parcourt, *m* ſa maſſe, & *q* ſa quantité de mouvement.

PROPOSITION II.

75. *Dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus par deux corps A, B, ſont en raiſon compoſée des vîteſſes & des temps; c'eſt-à-dire, les eſpaces parcourus ſont entre eux comme les produits des vîteſſes par les temps.*

Démonstration. Suppoſons d'abord que les vîteſſes & les temps

ſoient égaux ; les eſpaces parcourus E, *e*, ſeront par conſéquent égaux : car on ne voit point de raiſon pour laquelle l'un des deux corps parcourroit un plus grand eſpace que l'autre.

Suppoſons en ſecond lieu que les temps étant égaux, la vîteſſe V de A ſoit double de la vîteſſe *u* de B : il eſt clair qu'alors l'eſpace parcouru par A ſera double de l'eſpace parcouru par B ; car une vîteſſe double d'une autre fait parcourir en un même temps un eſpace double de l'eſpace que l'autre vîteſſe fait parcourir.

Enfin, ſuppoſons non ſeulement que la vîteſſe V de A ſoit double de la vîteſſe *u* de B, mais encore que le temps T du mouvement de A ſoit triple du temps *t* du mouvement de B. Il eſt encore viſible que le corps A, dans le temps T, parcourra un eſpace triple de celui qu'il parcourroit dans le temps *t* (73) : or A, dans le temps *t*, parcourroit un eſpace double de celui que B parcourroit dans le même temps, à cauſe de ſa vîteſſe double : donc A, dans le temps T, doit parcourir un eſpace ſextuple de celui que B parcourroit dans le temps *t*.

Ainſi les eſpaces parcourus doivent être entre eux comme 6 à 1. Mais 6 eſt le produit de la vîteſſe V = 2 du corps A par ſon temps T = 3 ; & 1 eſt le produit de la vîteſſe *u* = 1 du corps B par ſon temps *t* = 1 : donc nous avons E. *e* :: 6. 1 :: TV. *tu*.

76. De cette Propoſition on peut déduire aiſément grand nombre de Corollaires, ainſi qu'on va voir.

77. COROLLAIRE I. E. *e* :: TV. *tu* : donc ſi l'on ſuppoſe T = *t*, on aura E. *e* :: V. *u* : c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus par deux corps A, B, dans des temps égaux, ſont entre eux comme les vîteſſes de ces corps.*

78. COROLLAIRE II. E. *e* :: TV. *tu* : donc ſi l'on ſuppoſe V = *u* ; on aura E. *e* :: T. *t* : c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus par deux corps qui ont des vîteſſes égales, ſont entre eux comme les temps employés à les parcourir.*

79. COROLLAIRE III. E. *e* :: TV. *tu* : donc ſi l'on ſuppoſe V = *u*, & T = *t* ; on aura E = *e* ; ce qui eſt évident.

80. COROLLAIRE IV. E. *e* :: TV. *tu* : donc E*tu* = *e*TV, & partant V. *u* :: E*t*. *e*T ; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les vîteſſes* V, u, *de deux corps ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces* E, e, *& de la raiſon inverſe* t, T, *des temps* : car la raiſon compoſée de ces deux raiſons eſt E*t*, *e*T.

81. COROLLAIRE V. Puiſque V. u :: Et. e T; donc en diviſant la ſeconde raiſon par T & par t, on aura V. u :: $\frac{E}{T}$. $\frac{e}{t}$; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les vîteſſes de deux corps ſont entre elles, comme les eſpaces diviſés par les temps.*

Et de même ſi dans V. u :: Et. eT, on diviſe la derniere raiſon par e, & enſuite par E; on aura V. u :: $\frac{t}{e}$. $\frac{T}{E}$; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les vîteſſes de deux corps ſont entre elles réciproquement comme les temps diviſés par les eſpaces.*

82. COROLLAIRE VI. E. e :: TV. tu: donc Etu = eTV, & partant T. t:: Eu. eV; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les temps du mouvement de deux corps ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe E, e, des eſpaces, & de la raiſon inverſe des vîteſſes V, u.*

83. COROLLAIRE VII. Puiſque T. t :: Eu. eV; donc en diviſant la derniere raiſon par u & par V, on aura T. t :: $\frac{E}{V}$. $\frac{e}{u}$; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme, les temps du mouvement de deux corps ſont entre eux comme les eſpaces diviſés par les vîteſſes.*

De même, ſi dans T. t :: Eu. eV, on diviſe la derniere raiſon par E & par e, on aura T. t :: $\frac{u}{e}$. $\frac{V}{E}$; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les temps ſont entre eux réciproquement comme les vîteſſes diviſées par les eſpaces.*

PROPOSITION III.

84. *Dans le mouvement uniforme les quantités de mouvement Q, q, de deux corps A, B, ſont en raiſon compoſée de la raiſon des maſſes M, m, & des vîteſſes V, u.*

DÉMONSTRATION. La quantité de mouvement, ſelon ſa définition (67), eſt le produit de la maſſe par la vîteſſe: donc les quantités de mouvement des corps A, B, ſont entre elles comme MV, mu. Mais cette raiſon eſt compoſée des deux M, m, & V, u: donc &c.

85. COROLLAIRE I. Q. q :: MV. mu: donc ſi l'on ſuppoſe Q = q, on aura MV = mu, & partant M. m :: u. V; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, ſi les quantités de mouvement ſont égales, les maſſes ſont entres elles réciproquement comme les vîteſſes.*

D'où il ſuit que ſi, outre Q=*q*, on ſuppoſe M=*m*, on aura V=*u*: de même ſi on ſuppoſe Q=*q*, & V=*u*, on aura M=*m*.

86. COROLLAIRE II. Q. *q* :: MV. *mu*: donc Q*mu*=*q*MV, & par conſéquent V. *u* :: Q*m*. *q*M; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les vîteſſes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantités de mouvement Q, q, & de la raiſon inverſe* m, *M, des maſſes.*

87. COROLLAIRE III. Q. *q* :: MV. *mu*: donc Q*mu*=*q*MV, & partant M. *m* :: Q*u*. *q*V; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les maſſes M*, m, *ſont entre elles en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantités de mouvement Q, q, & de la raiſon inverſe* u, *V, des vîteſſes.*

88. COROLLAIRE IV. Nous avons trouvé ci-deſſus V. *u* :: E*t*. *e*T (80): ſi l'on multiplie donc les termes de cette proportion par ceux de la proportion Q. *q* :: MV. *mu*: nous aurons QV. *qu* :: MV*Et*. *mue*T, ou QV. MV*Et* :: *qu*. *mue*T; d'où l'on tirera grand nombre d'autres Corollaires, ainſi qu'on va voir.

89. COROLLAIRE V. QV. MV*Et* :: *qu*. *mue*T: donc, en diviſant la premiere raiſon par V, & la ſeconde par *u*, on aura Q. M*Et* :: *q*. *me*T, ou Q. *q* :: M*Et*. *me*T; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les quantités de mouvement ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe M*, m, *des maſſes, de la raiſon directe E*, e, *des eſpaces, & de la raiſon inverſe* t, *T, des temps.*

90. COROLLAIRE VI. Puiſque Q. *q* :: M*Et*. *me*T; donc Q*me*T =*q*M*Et*, & partant E. *e* :: Q*m*T. *q*M*t*: c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les eſpaces parcourus ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des quantités de mouvement Q*, q, *de la raiſon directe des temps T*, t, *& de la raiſon inverſe* m, *M, des maſſes.*

91. COROLLAIRE VII. Q. *q* :: M*Et*. *me*T: donc Q*me*T=*q*M*Et*, & par conſéquent M. *m* :: Q*e*T. *q*E*t*; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les maſſes ſont entre elles en raiſon compoſée de la raiſon directe Q*, q, *des quantités de mouvement, de la raiſon directe T*, t, *des temps, & de la raiſon inverſe* e, *E, des eſpaces.*

92. COROLLAIRE VIII. $Q.q :: ME.t.meT$: donc $QmeT = qMEt$, & partant $T.t :: qME.Qme$; c'eſt-à-dire, *dans le mouvement uniforme de deux corps, les temps ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes M*, m, *de la raiſon directe des eſpaces E*, e, *& de la raiſon inverſe* q, *Q, des quantités de mouvement.*

93. COROLLAIRE IX. Si dans les analogies des Corollaires précédents on ſuppoſe quelques grandeurs égales entre elles, on en tirera encore d'autres conſéquences : par exemple, ſi dans $Q.q :: MEt.meT$, on ſuppoſe $Q = q$, on aura $MEt = meT$; donc,

I°. $T.t :: ME.me$; c'eſt-à-dire, *les quantités de mouvement étant égales, les temps ſont entre eux en raiſon compoſée des raiſons directes des maſſes & des eſpaces.*

II°. $E.e :: mT.Mt$; c'eſt-à-dire, *les quantités de mouvement étant égales, les eſpaces ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des temps & de la raiſon inverſe des maſſes.*

III°. $M.m :: eT.Et$; c'eſt-à-dire, *les quantités de mouvement étant égales, les maſſes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des temps & de la raiſon inverſe des eſpaces ;* & ainſi des autres.

LOIX DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ.

94. Le *mouvement uniformément accéléré*, comme nous avons dit, eſt celui dont la vîteſſe reçoit dans des temps égaux des accroiſſements égaux ; c'eſt-à-dire que ſi dans le premier inſtant le corps a un degré vîteſſe, dans le ſecond il en a deux, dans le troiſieme il en a trois, & ainſi de ſuite.

95. On a éprouvé que la peſanteur des corps eſt toujours la même dans tous les lieux où on a pu faire des expériences, ſoit au-deſſus de la ſurface de la Terre, ſoit au-deſſous ; & que les corps peſants tendent vers le centre de la Terre avec un mouvement qui s'accélere : or c'eſt ſur ces expériences qu'eſt fondée la doctrine du mouvement accéléré, dont Galilée eſt l'inventeur.

PROPOSITION IV.

96. *Dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus dans des temps égaux infiniment petits & ſucceſſifs les uns aux autres, ſont entre eux comme les nombres* 1. 2. 3. 4. 5. *&c.*

DÉMONSTRATION. I°. Pendant le *premier inſtant*, la force motrice donnant au corps un premier degré de vîteſſe, lui fait par-

courir un petit eſpace qu'on peut regarder comme étant uniformément parcouru, à cauſe de la durée infiniment petite de ce premier inſtant. Ainſi ſi l'on ſuppoſoit que la force motrice ne donnât point une nouvelle impreſſion au corps dans le ſecond inſtant, ce corps ne laiſſeroit pas de continuer à ſe mouvoir, en vertu de la premiere vîteſſe reçue, à moins que quelque obſtacle ne s'oppoſât à lui; & il parcourroit pendant le *ſecond inſtant*, un eſpace égal à celui qu'il auroit parcouru pendant le premier, puiſqu'il auroit le même degré de vîteſſe. Mais comme la force motrice lui donne dans ce ſecond inſtant un ſecond degré de vîteſſe égal au premier, au lieu d'un eſpace il en parcourt deux, égaux chacun au premier.

II°. De même, ſi l'on ſuppoſoit encore que la force motrice, au ſecond inſtant, n'agît plus ſur le corps; néanmoins ce corps, en vertu des deux degrés de vîteſſe reçus dans les deux premiers inſtants, parcourroit pendant le *troiſieme inſtant*, un eſpace égal à celui qu'il auroit parcouru dans le ſecond, c'eſt-à-dire un eſpace double de l'eſpace parcouru dans le premier. Mais comme la force motrice lui donne encore un nouveau degré de vîteſſe égal au premier, au lieu de deux eſpaces il en parcourt trois, égaux chacun à l'eſpace parcouru dans le premier inſtant.

III°. Par un ſemblable raiſonnement il eſt aiſé de voir qu'au *quatrieme inſtant* le corps doit parcourir un eſpace quadruple du premier, au cinquieme un eſpace quintuple, &c; & que par conſéquent les eſpaces parcourus dans des inſtants infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, doivent être comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.

97. La vîteſſe du corps à la fin d'un inſtant quelconque ſe nomme *vîteſſe acquiſe*: ainſi la vîteſſe acquiſe du troiſieme inſtant eſt 3, celle du quatrieme eſt 4, &c.

98. REMARQUE. Soit la hauteur AB d'un triangle ABM (*Fig.* 23), diviſée en une infinité de parties égales; & des points de diviſion ſoient menés les éléments CD, EF, &c.

Si l'on conçoit que la hauteur AB repréſente le temps ou la durée du mouvement d'un corps qui ſe meut avec une vîteſſe uniformément accélérée, les petites parties de cette ligne repréſenteront les inſtants infiniment petits égaux & ſucceſſifs; & les éléments CD, EF, &c, repréſenteront les eſpaces parcourus pendant ces inſtants, de même que les vîteſſes acquiſes à la fin de ces inſtants: de façon que les eſpaces parcourus pendant chacun de ces inſtants, ſont entre eux comme les vîteſſes acquiſes à la fin de chacun de ces inſtants; avec cette différence cependant, que chaque eſpace

eſt parcouru tout entier dans l'inſtant auquel il appartient, au lieu que chaque vîteſſe acquiſe n'a qu'une partie qui ait été produite dans l'inſtant auquel elle appartient. Je m'explique : l'eſpace EF, parcouru dans le ſecond inſtant, eſt parcouru tout entier dans ce ſecond inſtant. Au contraire la vîteſſe EF, acquiſe à la fin du ſecond inſtant, n'eſt pas produite toute entiere dans ce ſecond inſtant : mais l'une de ſes parties EN eſt la même que la vîteſſe CD acquiſe à la fin du premier inſtant ; & l'autre partie NF eſt produite dans le ſecond. Ainſi la vîteſſe acquiſe à la fin d'un inſtant quelconque, eſt la ſomme de toutes les vîteſſes inſtantanées de tous les inſtants depuis le commencement du mouvement : au lieu que l'eſpace d'un inſtant eſt parcouru tout entier dans un inſtant.

Par exemple, la vîteſſe SR, acquiſe à la fin du quatrieme inſtant, n'eſt autre choſe que la vîteſſe CD acquiſe à la fin du premier, plus la vîteſſe NF acquiſe du premier au ſecond, plus la vîteſſe IH acquiſe du ſecond au troiſieme, plus la vîteſſe QR acquiſe du troiſieme au quatrieme ; tandis que l'eſpace SR eſt parcouru tout entier dans le quatrieme inſtant : ce qui met une grande différence entre les eſpaces parcourus dans les inſtants infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, & les vîteſſes acquiſes à la fin de ces inſtants.

PROPOSITION V.

99. Dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus dans des temps égaux, ſucceſſifs & ſenſibles, c'eſt-à-dire qui ne ſont pas infiniment petits, ſont entre eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. *&c.* (Fig. 24).

DÉMONSTRATION. I°. Concevons que la hauteur AB du triangle ABM repréſente le temps, ou la durée du mouvement d'un corps dont la vîteſſe eſt uniformément accélérée. Si cette hauteur étoit diviſée en parties égales & infiniment petites, & que des points de diviſion on menât les éléments du triangle paralleles à la baſe, les parties infiniment petites de AB repréſenteroient les inſtants infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, dont le temps AB eſt compoſé ; & les éléments du triangle repréſenteroient les eſpaces parcourus dans ces inſtants.

II°. Maintenant concevons que AB ſoit diviſé en quatre parties égales AC, CE, EG, GB : ces parties repréſenteront des parties égales du temps AB, leſquelles ne ſeront pas infiniment petites. Or l'eſpace parcouru pendant le temps ſenſible AC, n'étant autre choſe que la ſomme des eſpaces parcourus pendant les inſtants infiniment petits qui compoſent le temps AC, ſera par conſéquent

la

la ſomme des éléments du triangle ACD ; c'eſt-à-dire, cet eſpace ſera repréſenté par le triangle ACD. Par la même raiſon, l'eſpace parcouru pendant le temps AE, compoſé des deux premiers AC, GE, ſera repréſenté par le triangle AEF : l'eſpace parcouru pendant le temps AG compoſé des trois premiers AC, CE, EG, ſera repréſenté par le triangle AGH : enfin l'eſpace parcouru pendant le temps compoſé des quatre AC, CE, EG, GB, ſera repréſenté par le triangle ABM.

Or les quatre triangles ACD, AEF, AGH, ABM, étant ſemblables, ſont entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs AC, AE, AG, AB, leſquelles ſont comme les nombres 1. 2. 3. 4 : donc ces triangles ſont entre eux comme les quarrés 1. 4. 9. 16. Ainſi les eſpaces parcourus dans le premier temps, dans les deux premiers, dans les trois premiers, & dans les quatre premiers, ſont entre eux comme ces nombres 1. 4. 9. 16.

Mais ſi de l'eſpace 4, parcouru dans les deux premiers temps, on retranche l'eſpace 1 parcouru dans le premier temps ; le reſte 3 ſera l'eſpace parcouru dans le ſecond temps. De même ſi de l'eſpace 9 parcouru dans les trois premiers temps, on retranche l'eſpace 4 parcouru dans les deux premiers ; le reſte 5 ſera l'eſpace parcouru dans le troiſieme temps. Enfin ſi de l'eſpace 16 parcouru dans les quatre premiers temps, on retranche l'eſpace 9 parcouru dans les trois premiers ; le reſte 7 ſera l'eſpace parcouru dans le quatrieme temps, & ainſi de ſuite. Or les eſpaces 1. 3. 5. 7. &c, ſont la ſuite des nombres impairs : donc, &c.

100. COROLLAIRE. *Les eſpaces parcourus à la fin du premier temps, des deux premiers, des trois premiers, des quatre premiers, &c, ſont entre eux comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin de ces temps.*

Par la démonſtration précédente, les eſpaces parcourus à la fin du premier temps, des deux premiers, des trois premiers, &c, ſont entre eux comme les quarrés de ces temps. Or les vîteſſes acquiſes à la fin de ces mêmes temps ſont entre elles comme les temps : car la vîteſſe acquiſe à la fin du premier temps étant 1, celle qui eſt acquiſe à la fin du ſecond, c'eſt-à-dire à la fin des deux premiers, eſt 2, celle qui eſt acquiſe à la fin des trois premiers eſt 3, &c ; à cauſe que la vîteſſe reçoit des accroiſſements égaux dans des temps égaux : donc les eſpaces parcourus à la fin des temps, en comptant toujours les temps depuis l'origine du mouvement,

ſont entre eux comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin des mêmes temps.

PROPOSITION VI.

101. *Les corps peſants deſcendent vers le centre de la Terre, avec un mouvement uniformément accéléré.*

Démonstration. Par l'expérience, les corps peſants deſcendent vers le centre de la Terre avec un mouvement qui s'accélere (95); & cette accélération ne peut venir que de leur peſanteur qui les pouſſe à chaque inſtant : car ſi leur peſanteur ne leur donnoit qu'une premiere impreſſion, leur mouvement ſeroit uniforme. Or la peſanteur eſt la même par-tout (95) : donc à chaque inſtant elle donne une nouvelle impreſſion au corps, égale à la premiere ; & par conſéquent les degrés de vîteſſe que le corps reçoit à chaque inſtant ſont égaux entre eux. Mais quand les accroiſſements de vîteſſe ſont égaux dans des temps égaux, le mouvement eſt uniformément accéléré : donc les corps graves deſcendent vers le centre de la Terre avec un mouvement uniformément accéléré.

102. Donc ſi l'on diviſe le temps de la deſcente d'un corps en parties ſenſibles, par exemple en ſecondes, les eſpaces parcourus dans la premiere ſeconde, dans les deux premieres, dans les trois premieres, &c, ſeront comme les quarrés 1, 4, 9, &c, de ces temps, ou comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin de ces temps.

103. Remarque. Tout ceci ne ne doit s'entendre que des corps qui ne ſont pas à une trop grande diſtance de la ſurface de la Terre : car comme on ne peut pas faire des expériences à des diſtances ſi grandes, nous ne pouvons pas ſavoir non plus ſi cette *loi d'accélération* eſt la même par-tout (*).

(*) On ſait aujourd'hui que *cette loi d'accélération eſt variable*, & qu'elle ſuit la raiſon inverſe des quarrés des diſtances du centre de la Terre. Mais cette découverte, commencée dans le ſiecle paſſé, & conſommée vers le milieu du ſiecle préſent, ne change rien à la théorie de Galilée que développe ici M. l'Abbé Deidier, & qui ſuppoſe que l'accélération des Graves ne s'effectue que dans des diſtances peu conſidérables, telles que ſeroient des hauteurs d'environ deux cents pieds, priſes au-deſſus ou au-deſſous de la ſurface de la Terre. Ces hauteurs n'étant que comme une infiniment petite partie de la grandeur du rayon terreſtre, diviſé en pieds, il eſt clair que l'augmentation ou la diminution de la *loi variable* de peſanteur ou d'accélération ne peut pas

PROPOSITION VII.

104. *Si un corps grave deſcend vers le centre de la Terre pendant un temps déterminé ; l'eſpace parcouru à la fin de ce temps n'eſt que la moitié de l'eſpace qu'il auroit parcouru dans le même temps s'il s'étoit mu d'un mouvement uniforme, & avec une vîteſſe égale à celle qu'il a acquiſe à la fin de ce temps* (Fig. 24).

DÉMONSTRATION. Concevons que la hauteur AB du triangle ABM. repréſente le temps pendant lequel le corps eſt deſcendu. Si l'on diviſe cette hauteur en une infinité de parties égales, qui repréſenteront les inſtants infiniment petits dont le temps AB eſt compoſé ; les éléments du triangle menés des points de diviſion repréſenteront les eſpaces parcourus dans ces inſtants ; & la baſe BM repréſentera l'eſpace parcouru dans le dernier inſtant, de même que la vîteſſe acquiſe à la fin de cet inſtant. Or ſi le corps s'étoit mu pendant le temps AB avec une vîteſſe uniforme égale à BM, c'eſt-à-dire qui dans un inſtant lui auroit fait parcourir un eſpace égal à BM ; ce corps, dans chacun des inſtants du temps AB, auroit parcouru un eſpace égal à BM : & par conſéquent l'eſpace total parcouru dans le temps AB, auroit été BM pris autant de fois qu'il y a d'inſtants dans AB ou BM multiplié par AB ; c'eſt-à-dire, l'eſpace total parcouru par le mouvement uniforme auroit été repréſenté par le rectangle ABM*m*. Mais le triangle ABM,

---

y produire un effet ſenſible en plus ou en moins de vîteſſe ; comme il eſt aiſé de s'en convaincre, ſi l'on veut, en comparant le quarré du rayon terreſtre ſimple, avec le quarré du même rayon augmenté ou diminué de deux cents pieds, par exemple. Car,

Il eſt prouvé par l'expérience, que les corps, dans leur chûte libre, ou dans le vuide, parcourent à Paris ou à Londres quinze pieds de France, plus environ un dixieme de pied, pendant la *premiere ſeconde* de leur chûte. Il conſte par les plus modernes & les plus exactes dimenſions du globe terreſtre, que le *rayon de la Terre*, ſous Paris ou ſous Londres, eſt d'environ 19619910 pieds de France. On pourra donc faire la proportion ſuivante, relative à la loi variable de peſanteur : l'eſpace parcouru par un corps qui tombe librement pendant une ſeconde de temps, de la ſurface vers le centre de la Terre, eſt à l'eſpace inconnu que parcourroit le même corps en tombant librement de deux cents pieds plus haut pendant une ſeconde de temps, comme le quarré de $19619910+200$ pieds, eſt au quarré de 19619910 pieds ; ou ſimplement en chiffres, $15+\frac{1}{19} . x :: 19620110 \times 19620110. 19619910 \times 19619910.$ On trouvera, après le calcul, que la différence d'accélération à ces deux hauteurs différentes eſt infiniment petite, & inaſſignable en parties ſenſibles d'un pied, d'un pouce, ou d'une ligne.

qui repréſente l'eſpace total parcouru par le mouvement uniformément accéléré, n'eſt que la moitié du rectangle ABM*m*: donc, &c.

105. PROBLÊME I. *Connoiſſant l'eſpace parcouru d'un mouvement accéléré pendant un temps ; connoître celui que le corps doit parcourir dans un autre temps, en ſuppoſant que les deux temps doivent commencer tous les deux à l'origine du mouvement.*

SOLUTION. Suppoſons que le corps dans une minute ait parcouru trois pieds, & qu'on demande combien il en auroit parcouru ſi le mouvement avoit duré trois minutes. Je fais les quarrés 1, 9, des temps une minute, trois minutes ; & je dis par Regle de Trois : 1 eſt à 9, comme l'eſpace trois pieds eſt à un quatrieme terme 27, qui eſt l'eſpace que le corps auroit parcouru dans trois minutes. Car les eſpaces 3 & 27, parcourus dans les temps une minute & trois minutes, ſont entre eux comme les quarrés de ces temps (99).

106. PROBLÊME II. *Connoiſſant l'eſpace parcouru d'un mouvement uniformément accéléré dans un certain temps ; connoître celui qui devroit être parcouru dans un autre temps, en ſuppoſant que ce ſecond temps ne doit commencer qu'à la fin du premier temps.*

SOLUTION. Suppoſons que le corps dans une minute parcoure trois pieds, & qu'on demande combien il en doit parcourir dans les deux minutes ſuivantes. J'ajoute au ſecond temps le premier temps 1, ce qui fait trois : ainſi j'ai deux temps 1 & 3, qui commencent à l'origine du mouvement. Faiſant donc les quarrés 1 & 9 de ces temps, je dis, par Regle de Trois : le quarré 1 du premier temps eſt au quarré 9 du ſecond, comme l'eſpace trois pieds parcouru dans le premier, eſt à un quatrieme terme 27 qui eſt l'eſpace parcouru dans le ſecond. Retranchant donc de cet eſpace 27, l'eſpace 3 parcouru dans le premier temps une minute ; le reſte 24 eſt l'eſpace parcouru dans les deux minutes ſuivantes.

107. PROBLÊME III. *Connoiſſant le temps pendant lequel un corps a parcouru d'un mouvement uniformément accéléré un certain eſpace ; connoître le temps pendant lequel il parcourroit un autre eſpace déterminé, en ſuppoſant que les deux temps doivent commencer tous les deux à l'origine du mouvement.*

SOLUTION. Suppoſons que le corps ait parcouru huit pieds dans deux minutes, & qu'on demande dans combien de temps il en parcourra 50. Je fais le quarré 4 du premier temps deux minutes, & je dis, par Regle de Trois : l'eſpace huit pieds parcouru dans le premier temps deux minutes, eſt à l'eſpace 50 qui doit être par-

couru dans le ſecond; comme le quarré 4 du premier temps, eſt à un quatrieme terme 25, qui eſt le quarré du ſecond temps. Tirant donc la racine quarrée 5 de ce quarré, je dis que le corps parcourroit 50 pieds dans 5 minutes, à compter depuis l'origine du mouvement.

108. PROBLÊME IV. *Connoiſſant le temps pendant lequel un corps a parcouru un eſpace déterminé; connoître le temps pendant lequel il parcourroit un autre eſpace déterminé, en ſupoſant que ce ſecond temps ne doit commencer qu'à la fin du premier.*

SOLUTION. Suppoſons que le corps ait parcouru huit pieds dans deux minutes, & qu'on demande combien il lui faudroit de temps pour parcourir 42 pieds ſi ſon mouvement continuoit. J'ajoute 8 pieds à 42, ce qui fait 50: ainſi 50 pieds ſont l'eſpace que le corps parcourroit pendant le temps qu'on demande, joint aux deux premieres minutes; & ces deux eſpaces 8 pieds & 50 pieds ſeroient parcourus l'un & l'autre depuis l'origine du mouvement.

C'eſt pourquoi faiſant le quarré 4 du premier temps deux minutes, je dis, par Regle de Trois: 8 pieds parcourus dans le premier temps deux minutes, ſont à 50 pieds que le corps parcourroit dans le temps qu'on demande joint au premier temps 2 minutes; comme le quarré 4 du premier temps, eſt à un quatrieme terme 25 qui eſt le quarré de la ſomme du temps demandé & du premier temps. Tirant donc la racine quarrée 5, cette racine ſera la ſomme du temps demandé & du premier. Or puiſque dans 5 minutes le corps parcourroit 50 pieds, & que dans les deux premieres il en parcourt 8, il doit parcourir les 42 autres dans les trois minutes ſuivantes: ainſi il faudroit que le corps continuât à ſe mouvoir encore pendant trois minutes.

109. PROBLÊME. V. *Connoiſſant l'eſpace parcouru pendant un certain temps; connoître les eſpaces parcourus dans toutes les parties de ce temps.*

SOLUTION. Suppoſons que le corps ait parcouru 50 pieds dans 5 minutes. Je nomme x l'eſpace parcouru dans la premiere minute, & faiſant les quarrés 25 & 1 des temps 5 minutes & une minute, je dis par Regle de Trois: le quarré 25 du temps 5 minutes, eſt au quarré 1 du temps une minute; comme l'eſpace 50 parcouru dans le temps 5, eſt à un quatrieme terme 2 qui ſera l'eſpace x parcouru dans la premiere.

Or les eſpaces parcourus dans la premiere minute, dans la ſeconde, dans la troiſieme, dans la quatrieme, &c, ſont x, $3x$,

$5x, 7x$, &c, (99): mettant donc 2 au lieu de x, nous aurons 2, 6, 10, 14, &c, 18, pour les eſpaces parcourus pendant chacune des 5 minutes ; & en effet, ces 5 eſpaces ſont l'eſpace total parcouru dans les 5 minutes.

110. PROBLÊME VI. *Connoiſſant le temps total du mouvement, & l'eſpace parcouru pendant une partie de ce temps, laquelle n'a pas commencé à l'origine du mouvement ; trouver l'eſpace parcouru dans toutes les parties du temps.*

SOLUTION. Suppoſons que la durée du mouvement ait été 5 minutes ; & que pendant les deux dernieres le corps ait parcouru 32 pieds. Je nomme x l'eſpace parcouru dans la premiere minute : donc l'eſpace parcouru dans la ſeconde ſera $3x$, celui qui aura été parcouru dans la troiſieme ſera $5x$, celui de la quatrieme ſera $7x$, & celui de la cinquieme $9x$. Par conſéquent l'eſpace parcouru dans les deux dernieres, c'eſt-à-dire pendant la quatrieme & la cinquieme, ſera $7x + 9x = 16x$; & nous aurons $16x = 32$: donc $x = 2$. Ainſi l'eſpace parcouru dans la premiere minute ſera 2 pieds ; & mettant cette valeur de x dans $3x$, $5x$, $7x$, & $9x$; nous aurons 6, 10, 14, & 18, pour les eſpaces parcourus dans la ſeconde minute, dans la troiſieme, la quatrieme, & la cinquieme.

LOIX DU MOUVEMENT RETARDÉ.

PROPOSITION VIII.

111. *Dans le mouvement uniformément retardé, les eſpaces qu'un corps parcourt dans des temps infiniment petits égaux & ſucceſſifs, ſont entre eux comme les nombres* 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c, *pris en rétrogradant.*

DÉMONSTRATION. Le *mouvement uniformément retardé* eſt celui où le corps ſouffre à chaque inſtant des diminutions égales de vîteſſe. Cela poſé,

Nous avons démontré ci-deſſus que lorſqu'un corps ſe meut d'un mouvement uniformément accéléré, c'eſt-à-dire lorſqu'il reçoit à chaque inſtant des degrés égaux de vîteſſe, les eſpaces qu'il parcourt dans des temps infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, augmentent toujours de la même quantité, & ſont par conſéquent comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c, pris directement : donc quand le corps ſe meut d'un mouvement uniformément retardé, c'eſt-à-dire lorſqu'il perd à chaque inſtant des degrés égaux de vîteſſe, les eſpaces parcourus dans des inſtants infiniment petits, égaux &

ſucceſſifs, doivent diminuer toujours de la même quantité ; & par conſéquent ces eſpaces doivent être comme les nombres 1. 2. 3. 4. 5. 6, pris en rétrogradant.

112. COROLLAIRE. Donc ſi la hauteur BA du triangle ABM (*Fig.* 23) repréſente la durée du mouvement uniformément retardé d'un corps, les parties infiniment petites & égales de cette hauteur repréſenteront les inſtants infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, qui compoſent le temps total du mouvement ; & les éléments de ce triangle, à commencer depuis la baſe BM, repréſenteront les eſpaces parcourus dans des inſtants infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, & les vîteſſes reſtantes à la fin de ces temps.

Par exemple, ſuppoſons que le corps commence à ſe mouvoir avec une vîteſſe égale à BM, c'eſt-à-dire avec une vîteſſe qui dans un petit inſtant lui feroit parcourir un eſpace égal à BM ; l'eſpace qui ſe trouvera parcouru à la fin du premier inſtant, ſera repréſenté par l'élément du triangle qui vient après BM, & qui eſt moindre que BM, à cauſe que la vîteſſe à la fin de cet inſtant eſt moindre. De même l'eſpace qui ſera parcouru à la fin du ſecond inſtant, ſera repréſenté par le troiſieme élément du triangle, & ainſi de ſuite.

PROPOSITION IX.

113. *Dans le mouvement uniformément retardé, les eſpaces qu'un corps parcourt dans des temps égaux, ſucceſſifs, mais ſenſibles, ſont entre eux comme les nombres impairs* 1, 3, 5, 7, *&c, pris en rétrogradant* (Fig. 24).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que la baſe BM du triangle ABM repréſente la vîteſſe avec laquelle le corps commence à ſe mouvoir, c'eſt-à-dire une vîteſſe qui dans un temps infiniment petit lui feroit parcourir un eſpace égal à BM ; & que la hauteur AB de ce triangle repréſente la durée du mouvement que nous ſuppoſerons de 4 minutes.

Je diviſe cette hauteur en quatre parties égales qui par conſéquent repréſenteront chacune une minute. Ainſi l'eſpace parcouru dans la premiere minute ſera repréſenté par le trapézoïde GHMB : car eſpace n'eſt autre choſe que la ſomme des eſpaces parcourus pendant les temps infiniment petits, égaux & ſucceſſifs, qui compoſent la premiere minute, c'eſt-à-dire la ſomme des éléments du trapézoïde GHBM. Par la même raiſon, l'eſpace parcouru dans la ſeconde minute GE ſera repréſenté par le trapézoïde EFHG ; l'eſpace parcouru pendant la troiſieme minute ſera repréſenté par

le trapézoïde CDFE; & l'eſpace parcouru pendant la quatrieme minute ſera le triangle ACD.

Or les triangles ABM, AGH, AEF, ACD, étant entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs AB, AG, AE, AC, ſont par conſéquent entre eux comme les nombres 16, 9, 4, 1 : donc ſi du premier triangle ABM=16, je retranche le ſecond triangle AGH =9; le reſte 7 ſera le trapézoïde GBHM. De même ſi du ſecond triangle AGH=9, je retranche le troiſieme AEF=4; le reſte 5 ſera le trapézoïde EFGH. Enfin, ſi du troiſieme triangle AEF =4, je retranche le dernier ACD=1; le reſte 3 ſera le trapézoïde CDFE. Donc les trois trapézoïdes & le dernier triangle ACD, ſeront entre eux comme 7, 5, 3, 1; & par conſéquent les eſpaces parcourus pendant chacune des 4 minutes ſeront entre eux comme ces mêmes nombres, c'eſt-à-dire comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c, pris en rétrogradant.

PROPOSITION X.

114. *Si un corps peſant eſt pouſſé de bas en haut par une force quelconque, ſon mouvement eſt uniformément retardé.*

Démonstration. Tandis que le corps monte par l'impreſſion de la force motrice, ſa peſanteur lui donne à chaque inſtant des impreſſions contraires qui lui font perdre des degrés égaux de vîteſſe: or quand un corps en mouvement perd des degrés égaux de vîteſſe, ſon mouvement eſt uniformément retardé; donc, &c.

PROPOSITION XI.

115. *Si un corps peſant qui eſt deſcendu pendant un certain temps vers le centre de la Terre, eſt repouſſé de bas en haut avec une vîteſſe égale à celle qu'il a acquiſe à la fin de ce temps; ce corps, dans un ſecond temps égal au premier, remonte à une hauteur égale à celle dont il eſt deſcendu, & parcourt le même eſpace* (Fig. 24).

Démonstration. I°. Suppoſons que dans 4 minutes repréſentées par les quatre parties égales AC, CE, EG, GB, de la hauteur AB du triangle ABM, le corps parcoure en deſcendant un eſpace repréſenté par le triangle ABM; l'eſpace parcouru dans la premiere minute ſera donc repréſenté par le triangle ACD; celui qui eſt parcouru dans la ſeconde, par le trapézoïde CDFE; celui qui eſt parcouru dans la troiſieme, par le trapézoïde EFHG; & celui qui eſt parcouru dans la quatrieme, par le trapézoïde GHMB. Or ſi la peſanteur ceſſoit d'agir à la fin de la premiere minute

minute AC ; le corps, en vertu de ſa vîteſſe acquiſe CD, à la fin de cet inſtant, parcourroit un eſpace repréſenté par le parallélogramme CDNE ; car dans cette ſuppoſition ſa vîteſſe CD étant uniforme, lui feroit parcourir dans chacun des inſtants infiniment petits, qui compoſent la ſeconde minute CE, un eſpace égal à CD. Donc l'eſpace que la peſanteur fait parcourir dans la ſeconde minute, indépendamment de la vîteſſe acquiſe à la fin de la premiere, eſt le petit triangle DNF, égal au triangle ACD, parcouru dans la premiere minute.

De même ſi la peſanteur ceſſoit d'agir à la fin de la ſeconde minute, le corps, en vertu de ſa vîteſſe acquiſe EF à la fin de cette minute, parcourroit dans la troiſieme minute le parallélogramme EFRG ; & par conſéquent l'eſpace que la peſanteur fait parcourir dans cette troiſieme minute, indépendamment de la vîteſſe acquiſe, eſt le triangle FRH égal au triangle ACD parcouru dans la premiere minute. Par la même raiſon l'eſpace que la peſanteur fait parcourir dans la quatrieme minute, indépendamment de la vîteſſe acquiſe à la fin de la troiſieme, eſt le triangle HPM égal au triangle ACD. De façon que les eſpaces que la peſanteur fait parcourir dans chacune des quatre minutes, indépendamment des vîteſſes acquiſes à la fin de ces minutes, ſont tous égaux entre eux.

II°. Maintenant ſuppoſons qu'une force repouſſe le corps de bas en haut avec une vîteſſe égale à la vîteſſe acquiſe BM à la fin des 4 minutes. Ce corps, s'il ne trouvoit point d'obſtacles, parcourroit dans la premiere minute GB le parallélogramme GSMB : car dans cette ſuppoſition ſa vîteſſe BM, étant uniforme, lui feroit parcourir dans chacun des inſtants infiniment petits qui compoſent la minute GB un eſpace égal à BM. Mais comme la peſanteur qui s'oppoſe à ſon paſſage, lui fait perdre pendant cette minute un degré de vîteſſe égal à celui qu'elle lui donneroit s'il deſcendoit ; cette peſanteur l'empêche de parcourir un petit triangle HSM égal au triangle HPM ou ACD. Ainſi le corps ne doit parcourir dans cette minute que le trapézoïde GHMB qu'il a parcouru pendant la quatrieme minute lorſqu'il deſcendoit.

De même ſi à la fin de la premiere minute GB la peſanteur ceſſoit d'agir, le corps, en vertu de ſa vîteſſe reſtante GH, parcourroit le parallélogramme GHTE, pendant la ſeconde minute GE. Mais comme la peſanteur l'empêche de parcourir le petit triangle TEH égal au triangle ADC, il ne parcourt que le trapézoïde. Par la même raiſon, il parcourt dans la troiſieme minute CE, le trapézoïde EFDC ; & dans la quatrieme CA, le triangle ACD.

Or les trois trapézoïdes BMHG, GHFE, EFDC, joints au triangle ADC, compoſent le triangle total ABM, c'eſt-à-dire l'eſpace parcouru en deſcendant pendant quatre minutes : donc le le corps parcourt en remontant pendant 4 minutes, le même eſpace qu'il avoit parcouru en deſcendant pendant quatre minutes.

PROPOSITION XII.

116. *Si deux ou pluſieurs corps peſants, inégaux entre eux, deſcendent vers le centre de la Terre; les eſpaces qu'ils parcourent dans un même temps ſont égaux entre eux.*

Démonstration. Suppoſons qu'un corps A ait une maſſe double de celle d'un autre corps B, & que l'un & l'autre deſcendent vers le centre de la Terre pendant une minute. Je conçois que A ſoit diviſé en deux parties C, D, égales entre elles, & par conſéquent égales chacune à la maſſe du corps B : donc la partie C, en deſcendant pendant une minute, décrit un eſpace égal à celui que B parcourt; car les maſſes C & B étant égales, il n'y a pas de raiſon de dire que la peſanteur de l'une ſoit plus grande que la peſanteur de l'autre. De même, la partie D décrira pendant une minute, un eſpace égal à celui que B décrit; & par conſéquent C & D deſcendant enſemble, décriront encore le même eſpace. Mais D & C pris enſemble compoſent le corps A : donc A doit parcourir dans une minute le même eſpace que B.

117. Remarque. Je ſuppoſe ici que les corps deſcendent dans un milieu qui ne leur fait point de réſiſtance : c'eſt pourquoi ſi l'expérience eſt quelquefois contraire à ce que je viens de dire, cela vient de la réſiſtance de l'air.

Forces Vives, Forces Mortes.

Remarque. La doctrine du mouvement uniformément accéléré ou retardé, a fait tomber l'un des plus grands Génies de notre ſiecle, je veux dire M. Leibnitz, dans une erreur aſſez ſenſible qui ne laiſſe pas d'avoir encore de célebres partiſans. M. Leibnitz diſtingue dans le mouvement uniformément accéléré ou retardé deux ſortes de force, l'une qu'il appelle *force morte*, & l'autre *force vive*. La force morte eſt celle qui pouſſe un corps ſans pouvoir vaincre l'obſtacle qui s'oppoſe à ſon mouvement : telle eſt la peſanteur, lorſqu'elle pouſſe un corps qui ſe trouve arrêté invinciblement par un plan horizontal. La force vive eſt celle qui meut actuellement le corps. Selon cet illuſtre Auteur, les forces mortes

ſont entre elles comme les produits des maſſes par les vîteſſes qu'elles tendent à donner au corps; & les forces vives ſont comme les produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes : or voici ſur quoi il fonde cette prétention (*Fig.* 25).

Suppoſons que deux corps A, B, deſcendent vers le centre de la Terre, l'un pendant deux minutes AC, CD; & l'autre pendant trois minutes BE, EF, FG. Les eſpaces parcourus par ces corps ſeront repréſentés par les triangles ſemblables ADH, BGL, qui ſont entre eux comme les quarrés des temps AD, BG, pendant leſquels leur mouvement aura duré; & les vîteſſes acquiſes à la fin de ces temps ſeront repréſentées par les baſes DH, GL, de ces triangles, leſquelles ſont entre elles comme leur hauteur. Maintenant ſuppoſons que ces corps, après avoir parcouru leurs eſpaces, ſoient repouſſés en haut avec leurs vîteſſes acquiſes : ils parcourront dans des temps égaux aux premiers, les mêmes eſpaces en remontant, qu'ils auront parcourus en deſcendant; & à la fin de ces eſpaces, les forces qui les feront remonter ſeront détruites, & la peſanteur recommencera à faire deſcendre ces corps vers le centre de la Terre. Donc, conclut M. Leibnitz, puiſque ces forces ſe conſomment à faire parcourir au corps ces eſpaces, il faut qu'elles ſoient entre elles comme les maſſes multipliées par les eſpaces : mais les eſpaces ſont comme les quarrés des vîteſſes; donc les forces ſont ici comme les maſſes multipliées par les quarrés des vîteſſes. Pour faire voir la fauſſeté de ce raiſonnement,

En premier lieu, je dis que *les forces de ces deux corps ne ſont point détruites à cauſe des eſpaces qu'ils ont parcourus, mais à cauſe des obſtacles qu'ils ont rencontrés, c'eſt-à-dire, des impreſſions contraires de la peſanteur.*

En effet, concevons que lorſque ces corps ſont repouſſés en haut avec leurs vîteſſes acquiſes DH, GL, la peſanteur ceſſe d'agir ſur eux; il eſt clair que le premier, en vertu de ſa vîteſſe DH, qui dans cette ſuppoſition ſera uniforme, parcourra dans la premiere minute DC, en remontant, le parallélogramme DCMH; & que le ſecond, en vertu de ſa vîteſſe GL, parcourra dans la premiere minute GF, le parallélogramme GFPL : que les forces de ces deux corps ſeront entre elles comme les produits des maſſes par leurs vîteſſes DH, GL; à cauſe que les eſpaces parcourus dans des temps égaux, ou les parallélogrammes DCMH, GFPL, ayant les hauteurs égales, ſeront entre eux comme leurs baſes DH, GL : & qu'enfin ces forces n'auront rien perdu pour avoir fait parcourir ces eſpaces; puiſque dans un ſecond temps égal au premier, dans un

troiſieme, dans un quatrieme, & ainſi de ſuite à l'infini, elles feroient parcourir aux corps des eſpaces égaux aux premiers, ſi nul obſtacle étranger ne s'oppoſoit à leur mouvement.

En ſecond lieu, je dis que *ſi les deux corps A, B, en remontant, parcourent les eſpaces ADH, BGL, qui ſont entre eux comme les quarrés de leurs vîteſſes; cela ne provient pas de la nature de leurs forces, mais uniquement de la nature des obſtacles qu'ils rencontrent, leſquels ne ſont pas proportionnels aux vîteſſes.*

Car la peſanteur du corps A, s'oppoſant à ſon mouvement pendant la premiere minute D C, l'empêche de parcourir le petit eſpace HMN, égal à l'eſpace NZH, qu'elle lui a fait parcourir pendant la ſeconde minute lorſqu'il deſcendoit, indépendamment de la vîteſſe acquiſe à la fin de la premiere : de même la peſanteur du corps B s'oppoſant à ſon mouvement pendant la premiere minute GF, l'empêche de parcourir le petit eſpace QPL: & en conſéquence de ces deux eſpaces HMN, QPL, non parcourus, chacun des corps perd un degré de vîteſſe.

Or un degré de vîteſſe à l'égard de la vîteſſe 2 du premier corps, eſt plus grand qu'un degré de vîteſſe à l'égard de la vîteſſe 3 du ſecond; & par conſéquent les obſtacles que ces deux corps ont rencontrés dans le même temps, ne ſont pas proportionnels à leurs vîteſſes. Il eſt aiſé de voir que dans la ſeconde minute la peſanteur empêchant le corps A de parcourir le petit eſpace ARN, & le ſecond de parcourir le petit eſpace TSQ, ôte à chacun de ces corps encore un degré de vîteſſe qui n'eſt pas proportionnel à leurs vîteſſes reſtantes : car 1 eſt plus grand par rapport à la vîteſſe reſtante 1 du premier corps, que par rapport à la vîteſſe reſtante 2 du ſecond : donc, &c.

En troiſieme lieu, je dis que *les forces des deux corps A, B, ſont entre elles comme les maſſes multipliées par les vîteſſes, & non pas comme les maſſes multipliées par les quarrés des vîteſſes.*

Car les forces ſont entre elles comme les obſtacles qui les détruiſent. Une force, par exemple, capable de faire parcourir à un corps deux pieds dans une minute, ſelon une certaine direction, ne peut être détruite que par une autre force qui dans la même minute feroit parcourir à ce corps deux pieds dans une direction oppoſée, ou par un obſtacle équivalent. Examinons donc quels ſont les obſtacles que nos deux corps rencontrent. Le premier A pendant la premiere minute trouve un obſtacle qui l'empêche de parcourir le petit eſpace NMH, ou qui lui feroit parcourir le même

eſpace dans une direction oppoſée ; & pendant la ſeconde minute, il rencontre un obſtacle qui l'empêche de parcourir le petit eſpace ARN, ou qui le lui feroit parcourir dans un ſens oppoſé : & ce ſont ces deux obſtacles égaux qui détruiſent la force de A. De même le corps B trouve dans la premiere minute un obſtacle qui l'empêche de parcourir l'eſpace QPL ; dans la ſeconde un obſtacle qui l'empêche de parcourir l'eſpace TSQ ; & dans la troiſieme un obſtacle qui l'empêche de parcourir l'eſpace BXT : & ce ſont ces trois obſtacles qui détruiſent ſa force.

Or chacun des deux obſtacles qui détruiſent la force de A, eſt égal à chacun des trois obſtacles qui détruiſent la force de B : donc les obſtacles qui détruiſent la force de A, ſont à ceux qui détruiſent la force de B, comme 2 à 3, ou comme la vîteſſe de A eſt à la vîteſſe de B ; & par conſéquent la force de A eſt à celle de B, comme la maſſe A multipliée par ſa vîteſſe 2 eſt à la maſſe B multipliée par ſa vîteſſe 3.

MOUVEMENT COMPOSÉ DE PLUSIEURS FORCES UNIFORMES.

117. Si un corps A (*Fig.* 26) eſt pouſſé par deux forces égales avec des directions oppoſées CA, DA ; ce corps doit reſter en repos : car il n'y a pas de raiſon pour dire que l'une des deux forces doit l'emporter ſur l'autre. Mais ſi l'une des deux forces, par exemple la force C, eſt plus grande que la force D ; la force C perdra une partie égale à la force D, & elle mouvra le corps avec le reſte de ſa force : ce qui eſt évident.

118. Si un corps A (*Fig.* 27) eſt pouſſé par deux forces avec des directions AB, AC, qui ne ſoient pas oppoſées ; ces deux forces ne perdront rien, & feront chacune leur effet. Car ces directions n'étant pas oppoſées, rien n'empêche le corps de prendre une direction moyenne qui ſe trouve compoſée des deux. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que la premiere puiſſe faire parcourir au corps l'eſpace AC, dans le même temps que l'autre force peut lui faire parcourir l'eſpace AB ; il eſt clair que ſi l'on fait le parallélogramme ABCH des deux eſpaces AC, AB, & que le corps ſe trouve en H dans le même temps que chacune des forces lui auroit fait parcourir ſon eſpace ; ce corps aura obéi aux deux directions à la fois : car il ſe trouvera éloigné de la ligne AC de l'eſpace CH = AB ; & de la ligne AB, de l'eſpace BH = AC ; & aucun obſtacle ne ſe ſera oppoſé à ce mouvement.

PROPOSITION XIII.

119. *Si un corps A eſt pouſſé par deux forces dont l'une lui feroit parcourir ſelon la direction AC un eſpace AC, dans le même temps que l'autre lui feroit parcourir l'eſpace AB ſelon la direction AB ; je dis que ſi l'on fait le parallélogramme ABHC des deux eſpaces, le corps A parcourra la diagonale BH, dans le même temps que chacune des forces lui feroit parcourir ſon eſpace* (Fig. 28).

Démonstration. Je nomme x la force qui feroit parcourir AC, & z celle qui feroit parcourir AB. Je conçois que les eſpaces AC & AB ſoient diviſés en un même nombre de parties égales, qui par conſéquent ſont proportionnelles entre elles ; & que le temps de la durée du mouvement ſelon AC, ou ſelon AB, ſoit auſſi diviſé en un même nombre d'inſtants égaux. Ainſi les parties AM, MN, &c, de l'eſpace AC, repréſenteront les eſpaces qui devroient être parcourus ſelon la direction AC pendant ces inſtants égaux ; & les parties AQ, QR, &c, de l'eſpace AB, repréſenteront les eſpaces qui devroient être parcourus ſelon AB. Cela poſé,

I°. Le corps A ne pouvant parcourir dans le premier inſtant le petit eſpace AM, que la force x lui feroit parcourir ſi elle agiſſoit ſeule, ni le petit eſpace AQ que z lui feroit parcourir ſi l'autre n'agiſſoit pas conjointement avec elle ; il faut que ce corps ſe trouve en un point tel qu'il ſe ſoit éloigné de AM d'une grandeur égale à l'eſpace AQ, & de AQ d'une grandeur égale à l'eſpace AM. Faiſant donc le parallélogramme AQTM des eſpaces AQ, AM ; le corps A doit ſe trouver en T à la fin du premier inſtant. Or les parallélogrammes AQTM, ABHC, étant ſemblables, à cauſe des côtés AM, AC, proportionnels aux côtés AQ, AB ; ſi l'on mene les diagonales AT, AH, ces diagonales tomberont l'une ſur l'autre : par conſéquent l'extrémité T de la diagonale AT tombera ſur un point T de la diagonale AH, & le corps ſe trouvera ſur cette diagonale à la fin du premier inſtant.

II°. De même le corps A ne pouvant parcourir pendant les deux premiers inſtants, les eſpaces AN, AR, que les forces x, z, lui feroient parcourir ſi elles agiſſoient ſeules ; il faut qu'il ſe trouve à l'angle V du parallélogramme ARVN des eſpaces AN, AR : or les parallélogrammes ARVN, ABHC, ſont ſemblables, à cauſe des côtés AN, AC, proportionnels aux côtés AR, AB : donc leurs diagonales AV, AH, doivent tomber l'une ſur l'autre ; & partant le corps A qui eſt en V, doit être ſur la diagonale AH.

III°. On prouvera de la même maniere, que dans tous les autres inſtants, le corps A doit être ſur la diagonale AH, & ſe trouver en H dans le même temps qu'il ſe trouveroit en C ou en B, s'il étoit pouſſé par les deux forces ſéparément.

120. Les forces x, z, qui, priſes à part, feroient parcourir au corps A les eſpaces AC, AB, ſe nomment *forces compoſantes* du mouvement compoſé ; & ces forces ſont *équivalentes* à une troiſieme force, laquelle agiſſant toute ſeule, feroit parcourir au corps A la diagonale AH, dans le même temps qu'elles la font parcourir.

121. Comme il n'eſt point de ligne droite AB (*Fig.* 29) autour de laquelle on ne puiſſe décrire une infinité de parallélogrammes AMBC, ANBD, &c ; il n'eſt point auſſi de force ſimple, capable de faire parcourir dans un certain temps la diagonale, qu'on ne puiſſe regarder comme équivalente à une infinité de forces priſes deux à deux qui feroient parcourir les côtés de leurs parallélogrammes dans le même temps qu'elle feroit parcourir la diagonale. Par exemple, la force qui feroit parcourir la diagonale AB, eſt équivalente aux deux forces qui, priſes ſéparément, feroient parcourir dans le même temps les côtés AM, AC, du parallélogramme AMBC : elle eſt auſſi équivalente aux deux qui feroient parcourir dans le même temps les côtés AN, AD, du parallélogramme ANBD, &c.

122. Si l'on connoît la force compoſée AB, & les angles que les directions compoſantes font avec elle ; on pourra toujours connoître les forces compoſantes : car il eſt facile de décrire autour de la diagonale AB avec les angles donnés, le parallélogramme AMBC dont les côtés AM, AC, exprimeront les forces compoſantes, c'eſt-à-dire les eſpaces qu'elles feroient parcourir ſelon leurs directions dans le même temps que la compoſée feroit parcourir la diagonale AB.

De même ſi l'on connoît les eſpaces AM, AC, que les forces compoſantes feroient parcourir, & la diagonale AB ; on pourra connoître les forces compoſantes en faiſant ſur AB avec AC & CB = AM, le triangle ACB, & achevant enſuite le parallélogramme AMBC dont les côtés AM, AC, exprimeront les forces compoſantes. Mais ſi l'on ne connoît ni les angles des directions des forces compoſantes, ni les eſpaces qu'elles feroient parcourir ; on ne peut pas connoître préciſément quelles ſont le forces compoſantes de AB, puiſqu'il peut s'en trouver une infinité (121).

123. La force compoſée de deux forces compoſantes eſt d'autant plus grande, que l'angle que les directions font entre elles

eſt plus aigu. Car ſuppoſons que les deux compoſantes ſoient exprimées par les droites AB, AC (*Fig.* 30), dont le parallélogramme eſt ACDB ; la force compoſée ſera exprimée par AD. Or ſi je fais faire aux deux forces AB, AC, un angle plus aigu *cAb* ; il eſt viſible qu'en achevant le parallélogramme *Acdb*, l'angle *Abd* ſera plus grand que l'angle ABD ; & partant la baſe *Ad* du triangle *Abd* ſera plus grande que la baſe AD du triangle ABD. Mais *Ad* étant la diagonale du parallélogramme *Acdb*, eſt la force compoſée des deux *Ac*, *Ab*, ſous l'angle *cAb* : donc cette force eſt plus grande que la force AD, compoſée des mêmes forces ſous l'angle CAB.

PROPOSITION XIV.

124. *La force compoſée AH, eſt à l'une des forces compoſantes AB, comme le ſinus de l'angle BAC formé par les directions AB, CA, des deux forces compoſantes, eſt au ſinus de l'angle CAH formé par la direction de l'autre force AC avec la direction AH de la compoſée : & les deux forces compoſantes ſont entre elles réciproquement comme le ſinus des angles formés par leurs directions avec la direction de la compoſée* (Fig. 28).

Démonstration. I°. Puiſque la force x & la force χ feroient parcourir, l'une l'eſpace AC, & l'autre l'eſpace AB, dans le même temps que la compoſée fait parcourir l'eſpace AH ; les vîteſſes que ces trois forces donneroient au corps A, ſeroient donc entre elles comme les eſpaces AC, AB, AH. Par conſéquent les forces ſont entre elles comme les quantités de mouvement AxAC, AxAB, & AxAH, c'eſt-à-dire, comme les vîteſſes AC, AB, AH, ou comme les trois côtés AC, CH, AH, du triangle AHC, à cauſe de AB=CH. Or les trois côtés de ce triangle ſont entre eux comme les ſinus des angles auxquels ils ſont oppoſés : donc les forces ſont entre elles comme ces ſinus ; & par conſéquent la force AH eſt à la force CH ou AB, comme le ſinus de l'angle ACH eſt au ſinus de l'angle CAH. Mais le ſinus de l'angle ACH eſt égal au ſinus de l'angle CAB complément à deux droits de l'angle ACH : donc la force AH eſt à la force CH ou AB ; comme le ſinus de l'angle CAB, fait par les directions des compoſantes, eſt au ſinus de l'angle CAH fait par la direction AC de l'autre force avec la direction AH de la compoſée.

II°. De même le côté AC eſt au côté CH ou AB, comme le ſinus de l'angle AHC eſt au ſinus de l'angle CAH : donc la force AC eſt à la force HC, comme le ſinus de l'angle AHC eſt au ſinus de l'angle CAH. Mais l'angle AHC eſt égal à ſon alterne BAH : donc

donc la force AC eſt à la force CH ou AB; comme le ſinus de l'angle BAH, eſt au ſinus de l'angle CAH; c'eſt-à-dire, ces deux forces ſont entre elles réciproquement comme les ſinus des angles que leurs directions font avec la direction de la compoſée.

125. PROBLÊME. *Un corps étant pouſſé par pluſieurs forces exprimées par les droites AB, AC, AD; trouver la force qui doit en réſulter, & ſa direction* (Fig. 31).

SOLUTION. Je fais le parallélogramme ABEC des forces AB, AC; & la diagonale AE repréſente la force équivalente aux deux AB, AC. Ainſi mettant la force AE au lieu des deux AB, AC; je fais le parallélogramme AEFD des forces AE, AD; & la force AF, étant équivalente aux deux AE, AD, eſt par conſéquent équivalente aux trois forces AB, AC, AD: d'où il ſuit que le corps A pouſſé par les trois forces AB, AC, AD, doit parcourir ſelon la direction AF, l'eſpace AF dans le même temps que les trois autres forces priſes ſéparément lui feroient parcourir les eſpaces AB, AC, AD.

MOUVEMENT COMPOSÉ D'UNE FORCE UNIFORME ET D'UNE FORCE UNIFORMÉMENT ACCÉLERÉE: CORPS PROJETTÉS; JET DES BOMBES.

126. DÉFINITIONS. Un corps eſt *projetté perpendiculairement*, lorſqu'on le pouſſe avec une direction perpendiculaire à l'horizon: il eſt *projetté horizontalement*, lorſque ſa direction eſt parallele à l'horizon: enfin, il eſt *projetté obliquement*, lorſqu'on le pouſſe avec une direction oblique à l'horizon; & alors l'angle fait par la direction avec l'horizon, ſe nomme *angle de direction.*

127. *Si un corps eſt projetté perpendiculairement, ſon mouvement eſt toujours perpendiculaire à l'horizon.* Car, tandis que ce corps ſuit ſa premiere direction de bas en haut; la peſanteur qui ne l'abandonne jamais, fait périr inſenſiblement ſa force, & le repouſſe enſuite de haut en bas vers le centre de la Terre, c'eſt-à-dire encore perpendiculairement à l'horizon: donc le corps doit toujours être dans la verticale.

Il ſuit de là que ſi on tiroit une bombe avec une direction verticale, elle retomberoit préciſément dans le mortier, à moins que l'agitation de l'air, à travers lequel elle paſſeroit, ne la détournât de ſa direction.

PROPOSITION XV.

128. *Si un corps A eſt projetté ſelon une direction AC, horizontale, ou inclinée à l'horizon, l'eſpace qu'il décrit eſt une courbe parabolique APMN* (Fig. 32 & 33).

Démonstration. I°. Je prends ſur la direction AC de la force qui projette le corps, pluſieurs parties égales AD, DE, &c; & comme cette force, que je nomme x, eſt uniforme, les parties AD, DE, &c, ſont les eſpaces que le corps parcourroit dans des temps égaux, ſelon la direction AC: par conſéquent les eſpaces AD, AE, AF, &c, ſeroient ceux que le corps parcourroit ſelon cette direction dans le premier temps, dans les deux premiers, dans les trois premiers, & ainſi de ſuite. Or pendant le mouvement ſelon la direction AC, la peſanteur n'abandonnant jamais le corps, le fait deſcendre vers le centre de la Terre ſelon la direction verticale AL: c'eſt pourquoi, ſi nous ſuppoſons que dans le temps que la force x feroit parcourir au corps A l'eſpace AD, la peſanteur le feroit deſcendre d'une quantité égale à AG; la même peſanteur, pendant les deux premiers temps, fera deſcendre le corps A d'une quantité AH, quadruple de AG; & pendant les trois premiers, elle le fera deſcendre d'une quantité AL neuf fois plus grande que AG, &c; à cauſe que les eſpaces que la peſanteur fait parcourir pendant un premier temps, pendant les deux premiers, pendant les trois premiers, &c, ſont entre eux comme les quarrés de ces temps, ou comme les nombre 1, 4, 9, 16, &c.

II°. Maintenant, puiſque le corps A, pouſſé par la force x, devroit parcourir dans le premier temps l'eſpace AD, & que pendant le même temps la peſanteur doit lui faire parcourir AG; ſi nous faiſons le parallélogramme AGPD de ces deux eſpaces, le corps A doit être au point P à la fin de ce temps; car ce n'eſt qu'en ce point où il ſe trouvera éloigné de AG, d'un eſpace GP égal à AD; & de AD, d'un eſpace DP égal à AG. De même, puiſque le corps A, pouſſé par x, devroit avoir parcouru l'eſpace AE à la fin des 2 premiers temps, & qu'en conſéquence de ſa peſanteur il devroit avoir parcouru l'eſpace AH à la fin des mêmes temps; ſi nous faiſons le parallélogramme AHME, le corps doit ſe trouver au point M; & par la même raiſon, à la fin des trois premiers temps, il doit ſe trouver à l'angle N du parallélogramme ALNF, & ainſi de ſuite: donc la courbe qui paſſera par les points A, P, M, N, &c, ſera la trace ou le chemin du corps A pendant ce

mouvement ; & il ne s'agit plus que de faire voir que cette courbe eſt une parabole : ce que je fais ainſi.

III°. Par la conſtruction, les droites GP, HM, LN, ſont paralleles, & égales chacune à chacune aux eſpaces AD, AE, AF, &c, ou aux temps pendant leſquels ces eſpaces ſeroient parcourus ſelon la direction AC. Or les hauteurs AG, AH, AL, &c, ſont entre elles comme les quarrés de ces temps : donc ces hauteurs ſont comme les quarrés des droites GP, HM, LM, &c ; c'eſt-à-dire que dans la courbe APMN, les abſciſſes AG, AH, AL, ſont entre elles comme les quarrés des ordonnées GP, HM, LN, &c ; & par conſéquent cette courbe eſt une parabole.

129. REMARQUE. Si la force x, au lieu de pouſſer le corps ſelon la direction AC, le pouſſoit ſelon la direction A*c* oppoſée à AC, le corps décriroit une autre courbe parabolique A*n*, qui ſeroit la continuation de la précédente AN.

Car diviſant la direction A*c* aux points *d*, *e*, *f*, en parties égales entre elles, & aux parties AD, DE, EF, &c, de la direction oppoſée ; on prouveroit, comme ci-deſſus, qu'à la fin du premier temps, le corps devroit ſe trouver à l'angle *p* du parallélogramme AG*pd* : qu'à la fin des deux premiers temps, il devroit ſe trouver à l'angle *m* du parallélogramme AH*me*, & ainſi des autres. C'eſt pourquoi la courbe qui paſſeroit par les points A*pmn*, ſeroit la trace ou le chemin du corps pendant ſon mouvement ; & l'on prouveroit, comme ci-devant, que cette courbe ſeroit une parabole.

Or par la conſtruction, les droites *p*G, *m*H, *n*L, ſeroient égales chacune à chacune aux droites GP, HM, LN, &c, dont elles ſont les prolongements : donc les droites *p*P, *m*M, *n*N, ſeroient les doubles ordonnées du diametre AL, & par conſéquent A*n* ſeroit la continuation de la courbe AN.

130. La ligne AC ou A*c*, ſelon la direction de laquelle une force pouſſe un corps, eſt donc tangente de la courbe AN ou A*n* que le corps décrit pendant ſon mouvement : car cette ligne eſt parallele aux ordonnées GP, HM, &c, au diametre AL qui paſſe par le point A de cette ligne.

PROPOSITION XVI.

131. *Soit une parabole AB* (Fig. 34), *décrite par le mouvement d'un corps projetté ſelon la direction horizontale AR par une force uniforme que je nomme* x. *Si d'un point quelconque B pris hors du ſommet de la parabole, on mene une ordonnée BC à l'axe AC, un*

diametre BR qui coupe la tangente AR au ſommet, & une tangente BT qui coupe AR en L :

Je dis que ſi le même corps eſt projetté de B en T ſelon la direction BT par une autre force uniforme que je nommerai z, & qui ſoit à la force x, comme la tangente BT eſt à la tangente AR ; ce corps décrira pendant ſon mouvement la parabole BA dans le même temps qu'il a employé à la décrire, lorſqu'il étoit pouſſé par la force x.

Démonstration. Il faut ſe rappeller ici que les deux triangles RLB, TLA, faits par les deux tangentes AR, BT, l'un avec l'axe, & l'autre avec le diametre, ſont parfaitement ſemblables & égaux, ainſi qu'il a été démontré dans le ſecond Livre en parlant des ſections coniques, & que par conſéquent ces deux tangentes ſe coupent mutuellement en deux parties égales au point L. Cela poſé,

I°. Je diviſe la tangente AR en parties égales, par exemple, en 6 ; & ces parties égales AD, DH, &c, repréſenteront les eſpaces que le corps, pouſſé par la force *x*, parcourroit ſelon la direction AR dans des temps égaux : & par conſéquent les droites AD, AH, AL, &c, ſeront les eſpaces que ce corps parcourroit ſelon cette même direction dans le premier temps, dans les deux premiers, dans les trois premiers, &c. Abaiſſant donc des points de diviſion des lignes verticales DF, HI, LM, &c, juſqu'à ce qu'elles coupent la courbe aux points F, I, M, &c ; ces lignes marqueront les quantités dont la peſanteur aura abaiſſé le corps vers le centre de la Terre pendant le premier temps, pendant les 2 premiers, pendant les 3 premiers, &c : & partant, ces lignes ou abaiſſements ſeront entre eux comme les quarrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, de ces temps.

II°. Je diviſe l'autre tangente BT auſſi en ſix parties égales : & comme la force *x* eſt à la force *z*, comme AR eſt à BT ; c'eſt-à-dire que la force *x* feroit parcourir AR dans le même temps que la force *z* feroit parcourir BT ; il eſt clair que les ſix parties égales de la tangente repréſentent les eſpaces égaux que le corps parcourroit ſelon la direction BT, pendant ſix temps égaux chacun à chacun aux ſix temps que le même corps emploieroit à parcourir ſelon la direction AR les ſix eſpaces égaux de AR ; & qu'ainſi les droites BS, BQ, BL, &c, repréſentent les eſpaces que le corps parcourroit ſelon la direction AT pendant le premier temps, pendant les deux premiers, pendant les trois premiers, &c.

III°. Or comme la peſanteur à la fin du premier temps ſelon la direction BT, ne peut pas avoir abaiſſé le corps d'une quantité plus

grande qu'elle ne l'auroit abaiſſé à la fin du premier temps ſelon la direction AR ; ni l'avoir abaiſſé à la fin des deux premiers temps ſelon la direction BT, plus qu'elle ne l'auroit abaiſſé à la fin des deux premiers temps ſelon la direction AR, & ainſi de ſuite, à cauſe que la peſanteur d'un corps, étant toujours la même, agit toujours de la même façon ; il s'enſuit que ſi par les points de diviſion S, Q, L, Z, Y, T, de la tangente BT, on mene des verticales SV, QO, &c, égales chacune à chacune aux verticales DF, HI, &c, menées par les points de diviſion de la tangente RA ; ces verticales SV, QO, &c, marqueront les quantités dont la peſanteur aura abaiſſé le corps pouſſé ſelon la direction BT à la fin du premier temps, à la fin des deux premiers, à la fin des trois premiers, &c : & il faut obſerver que les verticales SV, QO, &c, menées des points de la tangente BT, ſont dans la direction des verticales menées des points de la tangente TR. Car dans le triangle rectangle RLB, le côté RL étant diviſé aux points P, N, en même raiſon que le côté BL aux points S, Q ; les droites PS, NQ, menées par ces points, ſont paralleles à la verticale RB ; & par conſéquent elles ſont verticales auſſi : d'où il ſuit que les verticales, menées des points P, N, &c, paſſent par les points S, Q, &c, où paſſent les verticales menées par les points S, Q, &c : & on dira la même choſe à l'égard de l'autre triangle TLA.

IV°. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir que les extrémités F, I, M, O, &c, des verticales DF, HI, &c, menées des points de la tangente AR, ſont auſſi les extrémités des verticales YF, ZI, &c, menées des points de la tangente BT ; & que par conſéquent le corps pouſſé par la force χ, paſſe par les mêmes points par leſquels il paſſeroit s'il étoit pouſſé par x, & cela dans les mêmes temps, ce que je démontre ainſi :

Dans le triangle LTA, la ligne YD étant parallele à la baſe TA ; nous avons TA. YD :: LT. LY :: 3. 2. Or à cauſe que TA eſt la quantité dont la peſanteur doit avoir abaiſſé le corps pouſſé ſelon la direction BT à la fin du ſixieme temps ; nous avons TA $=36$: donc 36. YD :: 3. 2, & par conſéquent YD $=24$; & ajoutant à YD, la droite DF, qui eſt la quantité dont la peſanteur, à la fin du premier temps, doit abaiſſer le corps pouſſé ſelon la direction DA, nous aurons YD $+$ DF $=$ YF $=24+1=25$. Or 25 eſt la quantité dont la peſanteur, à la fin des cinq premiers temps, doit avoir abaiſſé le corps pouſſé ſelon la direction BT : donc YF eſt égal à cette quantité ; & par conſéquent le corps pouſſé ſelon la direction BT, doit ſe trouver à la fin du cinquieme temps au point

F, où il ſe trouveroit à la fin du premier temps, s'il étoit pouſſé ſelon la direction AR.

De même dans le triangle LTA, nous avons TA. ZH :: LT. LZ :: 3. 1. Or TA=36 : donc 36. ZH :: 3. 1 ; & partant ZH =12 : & ajoutant à ZH, la droite HI, égale à 4, à cauſe qu'elle eſt la quantité dont la peſanteur auroit abaiſſé le corps à la fin du ſecond temps ſelon la direction AR ; nous aurons ZH+HI=ZI =16. Or 16 eſt la quantité dont la peſanteur doit avoir abaiſſé le corps à la fin des quatre premiers temps ſelon la direction BT : donc le corps pouſſé ſelon la direction BT, doit ſe trouver à la fin du cinquieme temps au point I, où il ſe trouveroit à la fin du ſecond temps, s'il étoit pouſſé ſelon la direction AR : ainſi des autres.

132. COROLLAIRE I. *Si après le ſixieme temps, le corps pouſſé ſelon la direction BT continuoit à ſe mouvoir, il décriroit de l'autre côté de A une autre demi-parabole* Ab, *qui ſeroit la continuation de la demi-parabole AB, & la ligne AC ſeroit l'axe de la parabole entiere AB*b (Fig. 34).

DÉMONSTRATION. Je prolonge BT en *t*, faiſant T*t*=TB ; je diviſe T*t* en ſix parties égales entre elles, & aux ſix parties de TB. Ainſi le corps pouſſé ſelon la direction BT par la force *z*, ſe trouveroit en *y* à la fin du ſeptieme temps, en *z* à la fin du huitieme, & ainſi de ſuite. Mais comme la peſanteur agit toujours ſur lui, il doit ſe trouver à la fin de ces temps en des points *f*, *i*, *m*, *o*, *v*, *b*, tels que les verticales *yf*, *zm*, &c, ſoient entre elles comme les quarrés de ces temps, c'eſt-à-dire comme les quarrés 49, 64, &c.

Je prolonge la direction AR du côté oppoſé en *r* ; & il eſt aiſé de voir que A*r* ſe trouve diviſé en ſix parties égales chacune à chacune aux ſix diviſions de AR par les verticales *yf*, *zm*, *tb*. Cela poſé,

Dans les triangles L*yd*, LTA, nous avons TA. *yd* :: LT. L*y* :: 3. 4 : or TA=36 ; donc 36. *yd* :: 3. 4 : & partant *yd*=48. Or *yf* =*yd*+*df*=49 : donc *df*=1. Par un ſemblable raiſonnement on trouvera *hi*=4, *lm*=9, &c : & partant *lm*=LM, *no*=NO, &c. Menant donc les lignes F*f*, I*i*, M*m*, &c ; ces lignes ſeront paralleles entre elles & à la direction RA : d'où il ſuit que la ligne AC, perpendiculaire ſur RA, leur ſera perpendiculaire, & les coupera toutes en deux également ; à cauſe du point A également éloigné de D & de *d*, de H & de *h*, &c ; & par conſéquent AC ſera l'axe de la parabole entiere BA*b*.

133. COROLLAIRE II. *Le corps pouſſé par la force z, ſelon la*

direction BT, décrit les deux demi-paraboles BA, Ab, dans deux temps égaux.

DÉMONSTRATION. Car BT, étant égal à T*t* par la conſtruction, la force uniforme ϰ feroit parcourir au corps les eſpaces BT, T*t*, dans deux temps égaux : mais à la fin du premier temps le corps, au lieu d'être en T, ſe trouve en A, & a décrit la demi-parabole BA ; & à la fin du ſecond temps, au lieu d'être en *t*, il ſe trouve en *b*, & il a décrit, pendant ce ſecond temps, la demi-parabole A*b* : donc ces deux demi-paraboles ſont décrites dans des temps égaux (*Fig.* 34).

134. DÉFINITION. Un corps étant projetté ſelon un direction BT*t* inclinée à l'horizon ; ſi du point B de projection on mene une ligne horizontale B*b* qui coupe en un autre point *b* la parabole BA*b* que le corps décrit dans ſon mouvement, cette ligne ſe nomme *Amplitude de la parabole*, & l'axe AC ſe nomme *la plus grande hauteur du jet :* ainſi l'axe AC coupe l'amplitude en deux parties égales.

PROPOSITION XVII.

135. *Une parabole A B étant donnée, trouver ſon parametre* (Fig. 35).

SOLUTION. J'ai donné pluſieurs façons de réſoudre ce problême en parlant des Sections coniques dans le ſecond Livre : mais en voici une autre qui nous ſera d'une grande utilité pour le jet des bombes.

D'un point quelconque B pris ſur la parabole hors du ſommet A, je mene l'ordonnée BC à l'axe AC, un diametre BD qui coupe en D la tangente AD menée du ſommet A, & une tangente BT qui coupe la même tangente AD en R. Du point R je mene la droite RC à l'extrémité C de l'abſciſſe AC, & j'éleve en R la droite RE perpendiculaire ſur RC, & qui coupe en E l'axe prolongé. Cela fait, je dis que la droite AE, compriſe entre le ſommet A de la parabole & la droite RE, eſt le quart du parametre demandé ; ce que je démontre ainſi :

A cauſe que les deux tangentes AD, BT, ſe coupent entre l'axe & le diametre BD ; nous avons DR = RA. Or DA = BC, à cauſe des paralleles AC, DB, & DA, BC : donc RA = $\frac{1}{2}$ BC, & par conſéquent $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2$. Mais en nommant *p* le parametre demandé, nous avons par la propriété de la parabole, $\overline{BC}^2 = CA \times p$: donc $\overline{RA}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = CA \times \frac{1}{4}p$. Or le triangle ERC, étant rec-

tangle par la conſtruction, eſt diviſé par la perpendiculaire RA menée du ſommet R ſur ſon hypothénuſe, en deux triangles ſemblables ERA, ARC; & partant EA. AR :: AR. AC : donc $\overline{RA}^2 = AC \times EA$. Mais nous venons de trouver $\overline{RA}^2 = AC \times \frac{1}{4}p$: donc $AC \times \frac{1}{4}p = AC \times EA$, & par conſéquent $EA = \frac{1}{4}P$.

136. Corollaires. Il ſuit de là (*Fig.* 35):

I°. Que ſi après avoir mené d'un point quelconque B l'ordonnée BC à l'axe AC, un diametre BD qui coupe en D la droite AD tangente au ſommet A, & la tangente BT qui coupe la même tangente AD en R, l'on prend ſur l'axe prolongé la partie AE égale au quart du parametre de l'axe, & que des points E, C, on mene au point R les droites ER, CR; l'angle ERC ſera droit. Car à cauſe de $RA = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}BC$, on aura toujours $\overline{AR}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2 = \frac{1}{4}p \times CA$. Mais par la ſuppoſition, $EA = \frac{1}{4}p$: donc $AR = EA \times CA$: donc dans le triangle ERC, la perpendiculaire RA ſera moyenne proportionnelle entre les ſegments EA, CA, de la baſe; & par conſéquent ce triangle ſera rectangle en R.

II°. Que les lignes RC, BR, ſeront égales : car les triangles rectangles RDB, RAC, ſont parfaitement égaux & ſemblables, à cauſe de $DR = RA$, & de $DB = AC$: ce qui donne $BR = RC$.

III°. Que ſi on prolonge le diametre BD en H, juſqu'à ce qu'on ait $BH = CE$; & que du point H, on mene la droite HR; le triangle HBR ſera égal & ſemblable au triangle ERC. Car dans les triangles ſemblables & égaux DBR, ACR, l'angle DBR eſt égal à l'angle ACR. Or dans les triangles HBR, EAC, les côtés HB, BR, ſont égaux chacun à chacun aux côtés EC, CR : donc, à cauſe de l'angle compris HBR, égal à l'angle compris ECR, le troiſieme côté HR eſt égal au troiſieme côté RE; & partant le triangle HRB eſt égal & ſemblable au triangle rectangle ERC.

IV°. Que ſi ſur BH pris pour diametre on décrit un demi-cercle HRB, ce demi-cercle coupera la tangente DA en deux également : ce qui eſt évident, puiſque le triangle HRB eſt rectangle.

V°. Que la droite DR, compriſe dans le demi-cercle HRB, eſt le quart de l'amplitude B*b* de la parabole BA*b* qui ſeroit décrite par un corps projetté ſelon direction BT : car DR eſt égal à $\frac{1}{2}$ BC, & partant égal à $\frac{1}{4}$ B*b*.

PROPOSITION

PROPOSITION XVIII.

137. *Si un corps projetté ſelon une direction horizontale AD décrit une parabole AB ; la vîteſſe avec laquelle il eſt pouſſé, eſt égale à la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en tombant d'une hauteur EA, égale au quart de ſon parametre* (Fig. 35).

DÉMONSTRATION. Je cherche par la Propoſition précédente, la droite EA égale au quart du parametre, en menant d'un point B pris ſur la courbe une ordonnée BC à l'axe, un diametre BD, une tangente BT, &c. Cela poſé :

La vîteſſe que le corps auroit acquiſe en tombant de la hauteur EA, eſt à celle qu'il a acquiſe en s'abaiſſant de la hauteur DB ou AC; comme la racine quarrée de EA, eſt à la racine quarrée de AC. Car dans le mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus étant comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin de ces eſpaces, ces vîteſſes ſont entre elles comme les racines quarrées des eſpaces. Or à cauſe des triangles rectangles ſemblables EAR, RAC, nous avons EA. AR :: AR. AC : donc $\overline{EA}$. $\overline{AR}$ :: EA. AC, & par conſéquent EA. AR :: $\sqrt{EA}$. $\sqrt{AC}$.

Donc la vîteſſe que le corps auroit acquiſe en tombant de la hauteur EA, eſt à celle qu'il a acquiſe en s'abaiſſant de la hauteur AC, comme EA eſt à AR ; & les temps employés à parcourir ces hauteurs, ſont auſſi comme EA eſt à AR, c'eſt-à-dire comme les vîteſſes acquiſes. Or le corps avec une vîteſſe uniforme égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur EA, parcourroit, dans un temps égal à EA, un eſpace double de EA (104) : donc avec la même vîteſſe uniforme il doit parcourir un eſpace AD double de AR, dans un temps égal à AR, c'eſt-à-dire dans un temps égal à celui que la peſanteur a employé à l'abaiſſer de la hauteur AC ou DB. Car dans le mouvement uniforme, les eſpaces parcourus par un corps ſont entre eux comme les temps : mais par la ſuppoſition la force horizontale qui a projetté le corps lui auroit fait parcourir AD dans un temps égal à celui pendant lequel la peſanteur l'a abaiſſé de la hauteur AC : donc la vîteſſe que cette force horizontale donne au corps, eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé de la hauteur EA, égale au quart de ſon parametre.

PROPOSITION XIX.

138. *Si un corps A, projetté ſelon une direction BT oblique à l'horizon, décrit une parabole BAb ; la vîteſſe avec laquelle il eſt*

pouſſé, eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé d'une hauteur egale au quart du parametre du diametre BD, mené par le point B de projection (Fig. 35).

Démonstration. Du point B je mene le diametre BD, & l'ordonnée BC à l'axe AC: du ſommet, je mene la tangente AD, qui coupe la direction BT au point R: de ce point R, je mene la droite RC à l'extrémité C de l'abſciſſe AC; & élevant en R la droite RE perpendiculaire ſur RC, j'ai EA égal au quart du parametre de l'axe (135), & EC égal au quart du parametre du diametre BD. Car le parametre du diametre BD eſt égal au parametre de l'axe, plus quatre fois l'abſciſſe AC, ainſi qu'il a été dit dans les Sections coniques, Livre ſecond: & par conſéquent ſon quart eſt égal à AC+AE=EC. Ainſi il s'agit de faire voir que la force qui pouſſe le corps ſelon la direction BT, donne à ce corps une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur EC; ce que je fais ainſi:

Si le corps pouſſé par une force x, avec la direction horizontale AR, décrivoit la demi-parabole AB, dans un temps égal à celui qu'il emploie à la décrire lorſqu'il eſt pouſſé par la force z avec la direction oblique BT; la force x ſeroit à la force z, comme la tangente AD eſt à la tangente BT. Car nous avons fait voir (131) que deux forces qui ſeroient entre elles comme ces tangentes feroient parcourir la même demi-parabole AB dans des temps égaux: donc nous aurions $x. z :: AD. BT :: AR. BR :: AR. CR$ (136). Mais les triangles ſemblables ARC, ERC, donnent AR. CR :: ER. EC: donc $x. z :: ER. EC$. Or à cauſe des triangles ſemblables EAR, ECR, nous avons EA. ER :: ER. EC: ce qui donne $\overline{ER}. \overline{EC} :: EA. EC$; & $ER. EC :: \sqrt{EA}. \sqrt{EC}$. Ainſi $x. z :: \sqrt{EA}. \sqrt{EC}$; c'eſt-à-dire, comme la vîteſſe que le corps acquerroit en tombant de la hauteur EA, eſt à la vîteſſe qu'il acquerroit en tombant de la hauteur EC.

Mais les forces uniformes x, z, étant entre elles comme les quantités de mouvement, ou comme les produits des maſſes par les vîteſſes, ſont par conſéquent entre elles comme leurs vîteſſes, à cauſe que la maſſe eſt ici la même. Donc la vîteſſe que x donneroit au corps, eſt à celle que z lui donne, comme $\sqrt{EA}$ eſt à $\sqrt{EC}$. Or, $\sqrt{EA}$ eſt la vîteſſe que x donneroit au corps (137): donc $\sqrt{EC}$ eſt la vîteſſe que z lui donne.

139. Problême I. *Connoiſſant l'angle d'inclinaiſon TBC ſous lequel un corps eſt projetté, & l'amplitude* Bb *de la parabole qu'il*

décrit ; connoître la plus grande hauteur du jet, & décrire la parabole (Fig. 35).

Solution. Je coupe l'amplitude B*b* en deux parties égales en C : j'éleve au point C la droite CT perpendiculaire ſur B*b* ; & je la prolonge juſqu'à ce qu'elle coupe la direction BT en T. Je coupe la droite TC en deux également en A ; & la droite AC, moitié de TC, eſt la plus grande hauteur du jet, c'eſt-à-dire l'axe de la parabole compris entre le ſommet & l'amplitude B*b*.

Cherchant donc une troiſieme proportionnelle à l'axe AC, & à l'ordonnée ou demi-amplitude BC ; cette troiſieme proportionnelle ſera le parametre, & par conſéquent il ſera aiſé de décrire la parabole demandée. Tout cela eſt évident : car, 1°. l'axe ou la plus grande hauteur du jet doit couper perpendiculairement & en deux également l'amplitude B*b* (134), ainſi que nous avons fait : 2°. la direction BT doit être tangente en B de la parabole que le corps décrit (132) : ce qui arrive en effet ici ; puiſque la droite TC ayant été coupée en deux également en A, la droite BT eſt néceſſairement tangente en B : donc la parabole BA*b* eſt la parabole que décrit le corps projetté ſelon la direction BT.

140. Problême II. *Connoiſſant la parabole AHC, que décrit un corps projetté ſous un angle d'inclinaiſon DAC, par une force quelconque ; connoître la parabole qu'il décriroit s'il étoit projetté par la même force ſous un autre angle d'inclinaiſon EAC* (Fig. 36).

Solution. I°. Je cherche par le Problême précédent la plus grande hauteur du jet, ou l'axe SH : du ſommet H, je mene la tangente HL qui coupe le diametre AL en L, & la direction ou tangente AD au point T. Je cherche le quart du parametre de l'axe (135) ; & prolongeant AL, je fais LB égal au quart de ce parametre. Ainſi AB étant égal à l'abſciſſe SH, plus le quart du parametre de l'axe, eſt par conſéquent égal au quart du parametre du diametre AL. C'eſt pourquoi décrivant ſur AB pris pour diametre, un demi-cercle BMA ; ce demi-cercle paſſe par le point T où les tangentes AL, HT, ſe coupent (136).

II°. Du point M, où la direction EA coupe le cercle, je mene NR parallele à LH ou AC : je fais la partie extérieure MR égale à la partie intérieure NM : du point R, j'abaiſſe RP perpendiculaire ſur AC ; & prenant RP pour l'axe d'une parabole, & AP pour l'une de ſes ordonnées, je décris la parabole ARX, qui ſera la parabole que doit décrire le corps lorſqu'il ſera projetté avec la direction EA

par la même force qui l'a projetté avec la direction DA : ce que je démontre ainſi :

Du point M, je mene la droite MP ; & élevant en M la droite MZ, perpendiculaire ſur MP, la droite ZR ſera le quart du parametre de l'axe RP, & ZP le quart du parametre du diametre AB qui paſſe par le point A. Or, à cauſe de NM=MR par la conſtruction, & des paralleles égales NA, RP ; les triangles rectangles NMA, MRP, ſont parfaitement égaux : donc ſi je mene la droite BM, laquelle ſera perpendiculaire ſur AM, à cauſe que l'angle AMN à la circonférence embraſſe le diametre ; les triangles rectangles AMB, PMZ, ſeront ſemblables & égaux, à cauſe de AM=MP, & de l'angle aigu MAN égal à l'angle aigu MPR : donc BA=ZP.

Ainſi ſi le corps pouſſé avec la direction AM décrivoit la parabole ARX, la force qui le pouſſeroit, lui donneroit une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur ZP ou BA (138) : or, quand le corps, pouſſé ſelon la direction AD, a décrit la parabole AHC, la force qui le pouſſoit lui a donné une vîteſſe égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la même hauteur BA, qui eſt auſſi le quart du parametre AL à l'égard de cette parabole : donc la vîteſſe que le corps auroit reçue ſous la direction AM, s'il avoit parcouru la parabole ARX, eſt égale à celle qu'il a reçue ſous la direction AD. Or les forces qui donnent ces vîteſſes étant entre elles comme leurs quantités de mouvement, ou comme les produits des maſſes par les vîteſſes, ſont par conſéquent entre elles comme les vîteſſes, à cauſe que la maſſe eſt ici la même : donc le corps qui décrit la parabole AHC, eſt pouſſé avec la même force qu'il ſeroit pouſſé s'il décrivoit la parabole ARX.

141. REMARQUE. Comme toutes les directions obliques ſur AX avec leſquelles la même force peut projetter le corps, coupent néceſſairement le demi-cercle BMA ; il s'enſuit que par le moyen de ce demi-cercle, on peut trouver toutes les paraboles que le corps, pouſſé par cette force, peut décrire ſous différentes inclinaiſons : de là les Corollaires ſuivants.

142. COROLLAIRE I. *Dans toutes les paraboles qu'un corps, pouſſé par une même force, peut décrire, les parametres des axes ſont tous inégaux.* Car le quart du parametre de l'axe de la parabole AHC étant LB, le quart du parametre de l'axe de la parabole ARX eſt NB ; & par conſéquent ces deux quarts étant inégaux, les parametres le ſont auſſi (*Fig.* 36).

143. COROLLAIRE II. *Dans toutes les paraboles qu'un corps, pouſſé par une même force, peut décrire ſous différentes inclinaiſons, les amplitudes des paraboles ſont entre elles comme le ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon.*

DÉMONSTRATION. La droite LT eſt le quart de l'amplitude AC de la parabole AHC (136); & par la même raiſon, la droite NM eſt le quart de l'amplitude de la parabole ARX: & comme les amplitudes ſont dans la même raiſon que leurs quarts, il ne s'agit que de faire voir que les droites LT, NM, ſont les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon LAC, EAC: ce que je fais ainſi:

Du centre O du demi-cercle BMA, je mene les rayons OT, OM, aux points T, M, où les directions LA, MA, coupent le demi-cercle. L'angle au centre TOA eſt double de l'angle d'inclinaiſon TAC, qui eſt l'angle du ſegment TA: de même l'angle au centre MOA eſt double de l'angle d'inclinaiſon MAC, qui eſt l'angle du ſegment MA. Or, LT eſt le ſinus de l'angle TOA; & MN eſt le ſinus de l'angle MOA: donc les amplitudes CA, XA, qui ſont entre elles comme leurs quarts LT, NM, ſont auſſi entre elles comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon LAC, EAC.

144. COROLLAIRE III. *Dans toutes les paraboles qu'un corps, pouſſé par une même force, peut décrire ſous différentes inclinaiſons, les plus grandes hauteurs des jets ſont entre elles comme les ſinus verſes des angles doubles des angles d'inclinaiſon* (Fig. 36).

DÉMONSTRATION. I°. Dans la parabole AHC, la plus grande hauteur HS eſt égale à AL; & dans la parabole ARX, la plus grande hauteur RP eſt égale à AN. Or AL eſt le ſinus verſe de l'angle TOA, double de l'angle d'inclinaiſon TAC; & AN eſt le ſinus verſe de l'angle MOA, double de l'angle d'inclinaiſon MAC: donc les plus grandes hauteurs HS, RP, de ces deux paraboles ſont entre elles comme les ſinus verſes des angles doubles des angles d'inclinaiſon.

II°. On peut dire auſſi que *les plus grandes hauteurs des jets HS, RP, &c, ſont entre elles comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon.*

Car, à cauſe des triangles rectangles ſemblables NAM, BAM, nous avons NA. AM :: AM. AB: donc $\overline{AM}^2 = NA \times AB$. De même ſi du point T, nous menions une droite au point B, nous aurions deux autres triangles rectangles ſemblables LAT, BAT, qui donne-

roient LA. AT :: AT. AB ; & partant, $\overline{AT}^2 = LA \times AB$: donc $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$ :: LA×AB. NA×AB ; & diviſant les termes de la derniere raiſon, nous aurions $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$ :: AL. AN. Or, la moitié de la corde AT eſt le ſinus de la moitié de l'angle TOA, c'eſt-à-dire le ſinus de l'angle d'inclinaiſon TAC ; & la moitié de la corde AM eſt le ſinus de la moitié de l'angle MOA, c'eſt-à-dire le ſinus de l'angle d'inclinaiſon MAC. Or ces ſinus ou demi-cordes étant entre eux comme les cordes, leurs quarrés ſont auſſi comme les quarrés des cordes : donc puiſque nous avons AL. AN :: $\overline{AT}^2$. $\overline{AM}^2$, nous aurons auſſi AL eſt à AN, comme le quarré du ſinus de l'angle d'inclinaiſon TAC, eſt au quarré du ſinus de l'angle d'inclinaiſon MAC. Mais AL=HS, & AN=RP : donc les plus grandes hauteurs HS, RP, ſont entre elles comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon.

145. COROLLAIRE IV. *Dans toutes les paraboles qu'un corps, pouſſé par une même force, peut décrire ſous différentes directions, les eſpaces que ce corps parcourroit ſur ſes directions, ſi la peſanteur ne l'abaiſſoit pas, ſont entre eux comme les ſinus des angles d'inclinaiſon* (Fig. 36).

DÉMONSTRATION. De l'extrémité C de l'amplitude AC, j'éleve ſur AC la perpendiculaire CV, juſqu'à ce qu'elle coupe la direction AV en V ; & la droite AV marque l'eſpace que le corps auroit parcouru ſur ſa direction AV dans un temps égal à celui qu'il a employé à parcourir la parabole AHC, par les principes ci-deſſus (128, 131). Par la même raiſon, élevant à l'extrémité X de l'amplitude AX, la perpendiculaire XY qui coupe la direction AY ; la droite AY marque l'eſpace que le corps parcourroit ſur cette direction dans un temps égal à celui qu'il emploieroit à parcourir la parabole ARX. Des points T, M, où les directions AV, AY, coupent le demi-cercle BMTA ; j'abaiſſe ſur l'horizontale AX les perpendiculaires TG, MK : & à cauſe des triangles ſemblables ATG, AVC ; j'ai AG. AC :: AT. AV. Mais AG eſt le quart de AC : donc $AT = \frac{1}{4} AV$. De même, à cauſe des triangles ſemblables AMK, AYX ; j'ai AK. AX :: AM. AY. Mais $AK = \frac{1}{4} AX$: donc $AM = \frac{1}{4} AY$.

Ainſi les cordes AT, AM, du demi-cercle, ſont les quarts des directions totales AV, AY ; & par conſéquent ces directions ſont entre elles comme les cordes AT, AM, ou comme les moitiés de ces cordes. Mais les moitiés des cordes ſont les ſinus des angles

d'inclinaiſon, comme on a vu (144) : donc les eſpaces AV, AY, que le corps parcourroit ſur ſes directions, ſi la peſanteur ne l'abaiſſoit pas, ſont entre eux comme les ſinus des angles d'inclinaiſon.

146. COROLLAIRE V. *Dans toutes les paraboles qu'un corps projetté par une même force peut décrire, ſous différentes directions ; les temps pendant leſquels ces paraboles ſont décrites, ſont entre eux comme les ſinus des angles d'inclinaiſon.*

DÉMONSTRATION. Puiſque le corps auroit parcouru la droite AV, ſur la direction AV, dans un temps égal à celui qu'il a employé à décrire la parabole AHC ; la verticale VC eſt la hauteur dont la peſanteur a abaiſſé ce corps dans le même temps : & par la même raiſon, la verticale YX eſt la hauteur dont la peſanteur abaiſſeroit le corps lorſqu'il décriroit la parabole ARX. Or, à cauſe des triangles ſemblables ATG, AVC, nous avons AG. AC :: TG. VC : donc à cauſe de $AG = \frac{1}{4} AC$, nous avons $TG = \frac{1}{4} VC$. De même, dans les triangles ſemblables AMK, AYX, nous avons AK. AX :: MK. YX : donc à cauſe de $AK = \frac{1}{4} AX$, nous avons $MK = \frac{1}{4} YX$; & par conſéquent VC. YX :: TG. MK. Mais TG = AL, & MK = AN : donc VC. YX :: AL. AN ; c'eſt-à-dire, les verticales VC, YX, ſont entre elles comme les ſinus verſes AL, AN, des angles doubles des angles d'inclinaiſon. Mais ces ſinus ſont entre eux comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon (144) : donc les verticales VC, YX, ſont entre elles comme les quarrés des ſinus des angles d'inclinaiſon, ou comme $\frac{1}{4}\overline{AT}^2 . \frac{1}{4}\overline{AM}^2$ (145). Or le temps que la peſanteur emploie à abaiſſer le corps d'une quantité égale à VC, eſt au temps qu'elle emploieroit à l'abaiſſer d'une quantité égale à YX, comme la racine quarrée de VC eſt à la racine quarrée de YX : donc ces temps ſont entre eux comme les racines quarrées de $\frac{1}{4}\overline{AT}^2, \frac{1}{4}\overline{AM}^2$, c'eſt-à-dire comme $\frac{1}{2}$ AT. $\frac{1}{2}$ AM ; ou comme le ſinus des angles d'inclinaiſon (145). Il ſuit de là que les temps employés à parcourir les paraboles AHC, ARX, &c, ſont entre eux comme les moitiés des cordes AT, AM, &c, ou comme les huitiemes des directions totales, & par conſéquent comme ces directions.

147. COROLLAIRE VI. *De toutes les paraboles que peut décrire un corps pouſſé par une même force avec différentes directions ; celle qui a une plus grande amplitude, eſt celle qui eſt décrite ſous un angle de 45 degrés ; & celles qui ſont décrites ſous des*

angles également éloignés de 45 degrés, ſont égales (Fig. 37).

DÉMONSTRATION. I°. Quand le corps eſt projetté ſous un angle de 45 degrés; la perpendiculaire MO abaiſſée ſur le diametre BA du point M où la direction AM coupe le cercle, eſt le quart de l'amplitude de la parabole, & en même temps le ſinus de l'angle de 90 degrés double de l'angle d'inclinaiſon MAC. Or, le ſinus de 90 degrés eſt le plus grand de tous les ſinus : donc puiſque les amplitudes ſont comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon ; l'amplitude ſous 45 degrés eſt plus grande que l'amplitude ſous un autre angle quelconque, puiſque le ſinus du double de cet angle ſera toujours moindre que le rayon ou le ſinus de 90 degrés.

II°. Maintenant prenons les angles TAC, VAC, également éloignés de 45 degrés; par exemple, l'un de 15 degrés, & l'autre de 75. Le double du premier ſera de 30 degrés, & le double du ſecond de 150 ; & par conſéquent celui-ci étant le complément à deux angles droits de l'angle de 30 degrés, ſon ſinus VH ſera égal au ſinus TL de l'angle de 30 degrés. Or les ſinus VH, LT, ſont les quarts des amplitudes ſous les angles VAC, TAC : donc les amplitudes ſous les angles également éloignés de 45 degrés, ſont égales.

148. COROLLAIRE VII. *La force qui projette le corps demeurant la même, l'amplitude ſous 45 degrés eſt double de l'amplitude ſous 15 degrés.*

DÉMONSTRATION. L'angle double de 45 degrés étant de 90, ſon ſinus eſt égal au rayon. De même l'angle double de 15 degrés eſt de 30 degrés, & le ſinus de 30 degrés eſt la moitié de la corde qui ſoutient l'arc de 60 degrés double de 30 degrés; & par conſéquent le ſinus de 30 degrés eſt la moitié du rayon. Or l'amplitude ſous 45 eſt à l'amplitude ſous 15, comme le ſinus de 90 degrés eſt au ſinus de 30 : donc ces amplitudes ſont entre elles comme le rayon eſt à la moitié du rayon, ou comme 2 eſt à 1.

149. COROLLAIRE VIII. *La plus grande amplitude AX d'une force eſt double du quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de projection* (Fig. 37).

DÉMONSTRATION. La plus grande amplitude étant ſous l'angle de 45 degrés MAX, ſi je prolonge la direction AM juſqu'à ce qu'elle coupe l'axe prolongé en P; le triangle AZP ſera rectangle & iſoſcele : & partant AZ=ZP=2ZN. Or le rayon AO eſt alors égal à ZN : donc AB=2AO=2ZN ; & par conſéquent AB=ZP

=AZ. Mais AZ eſt la moitié de l'amplitude : donc AB, ou le quart du parametre du diametre qui paſſe par A, eſt égal à la moitié de l'amplitude : donc l'amplitude entiere AX eſt égale à deux quarts ou à la moitié de ce parametre ; & par conſéquent elle eſt double du quart de ce parametre.

150. PROBLÊME III. *Compoſer une table qui contienne toutes les amplitudes des différentes paraboles que peut décrire une bombe projettée avec une même force de poudre, ou avec une même charge d'une même poudre.*

SOLUTION. Il faut faire une épreuve, c'eſt-à-dire tirer une bombe avec la charge donnée ſous un angle pris à volonté ; meſurer enſuite exactement l'amplitude, ou la diſtance du mortier à l'endroit où la bombe eſt tombée. Après quoi, ſi on veut trouver l'amplitude ſous un autre angle, on cherchera dans la table des ſinus, le ſinus double de celui ſous lequel on a fait l'épreuve, & le ſinus double de celui ſous lequel on cherche l'amplitude : puis l'on dira par regle de trois : comme le ſinus double de l'angle ſous lequel on a tiré, eſt au ſinus double de celui ſous lequel on cherche l'amplitude ; ainſi l'amplitude de la parabole décrite ſous le premier angle, eſt à un quatrieme terme qui ſera l'amplitude de la parabole qui ſeroit décrite dans le ſecond angle : & faiſant la même choſe à l'égard de tous les autres angles ſous leſquels on peut tirer la même bombe avec la même charge, on aura toutes les amplitudes demandées. Cela fait, on écrira dans une colonne tous les degrés ſous leſquels on peut tirer, c'eſt-à-dire depuis 1 juſqu'à 90, & à côté de ces degrés les amplitudes correſpondantes, & la table ſera faite. Ce qui eſt évident, puiſque les amplitudes ſont entre elles comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon.

151. REMARQUE. Cette table étant ainſi compoſée, on peut par ſon moyen & ſans le ſecours des ſinus trouver les amplitudes des différentes paraboles que pourroit décrire la même bombe avec une autre charge. Par exemple, ſuppoſons que la bombe pouſſée avec la premiere charge que je nomme a ait eu ſous un angle $= b$ une amplitude $= m$, & ſous un angle $= c$ une amplitude $= n$; & qu'on demande quelles amplitudes elle auroit ſous les mêmes angles, ſi elle étoit tirée avec une autre charge $= f$.

On tirera la bombe avec la charge f ſous un angle $= b$; & meſurant exactement ſa portée ou amplitude, l'on dira par regle de trois : l'amplitude m de la force a ſous l'angle b, eſt à l'amplitude n de la même force ſous l'angle c ; comme l'amplitude trouvée de la

force *f* ſous l'angle *b*, eſt à un quatrieme terme, qui ſera l'amplitude que la même force *f* donneroit ſous l'angle *c*. Ce qui eſt encore évident, puiſque les angles des amplitudes de la force *a* & celles des amplitudes de la force *f* ſont les mêmes, & que les amplitudes de l'une & de l'autre force ſont comme les ſinus des angles doubles des angles *b* & *c*.

152. PROBLÊME IV. *Compoſer une table pour trouver tout d'un coup quels ſont les angles qui conviennent à toutes les amplitudes poſſibles d'une même force.*

SOLUTION. Il faut tirer une bombe avec la charge donnée ſous un angle de 45 degrés ou de 15. Si on tire ſous 45 degrés, la diſtance du mortier à l'endroit où la bombe tombera ſera la plus grande amplitude (147); & ſi on tire ſous 15 degrés, on n'aura qu'à doubler cette diſtance pour avoir la plus grande amplitude (148). Après quoi ſi on veut tirer pour avoir une amplitude moindre que la plus grande, on dira par regle de trois : la plus grande amplitude eſt à celle qu'on demande, comme le ſinus de l'angle double de 45 degrés, c'eſt-à-dire, le rayon, à un quatrieme terme qui ſera le ſinus de l'angle double de celui ſous lequel il faudroit tirer pour avoir l'amplitude demandée. Cherchant donc dans les Tables des Sinus à quel angle appartient ce ſinus, la moitié de cet angle ſera celui qui donneroit l'amplitude demandée, & ainſi des autres. Ayant donc trouvé les degrés qui conviennent à toutes les amplitudes qui ſont au-deſſous de la plus grande, on écrira dans une colonne toutes les amplitudes, à commencer depuis la moindre juſqu'à la plus grande ; & vis-à-vis de chacune on écrira dans une autre colonne les degrés qu'on aura trouvé leur convenir.

REMARQUE. Si l'on faiſoit le coup d'épreuve ſous un angle différent de celui de 45 degrés, ou de celui de 15, il faudroit, pour avoir la plus grande amplitude, faire un calcul tel que nous l'avons dit ci-deſſus (150) : au lieu qu'en tirant ſous 45 ou ſous 15, la plus grande amplitude ſe trouve plus aiſément ; & c'eſt pourquoi j'ai dit qu'il falloit faire le coup d'épreuve ſous l'un ou l'autre de ces deux angles.

153. PROBLÊME V. *Trouver l'angle d'inclinaiſon d'un mortier ou d'un canon* (Fig. 37 & 40).

SOLUTION. Pour trouver l'angle d'inclinaiſon d'un mortier ou d'un canon, ſoit dans le coup d'épreuve dont on vient de parler, ſoit dans un ſiege où il faut atteindre à un but marqué, on ſe ſert d'un quart de cercle adapté à la bouche à feu. En général, on

nomme *quart de cercle*, dans l'artillerie, tout inſtrument propre à faire connoître le degré d'inclinaiſon d'une bouche à feu, c'eſt-à-dire ici, d'un mortier ou d'un canon : ſoit que cet inſtrument réponde réellement à un quart de cercle ou à un arc de 90 degrés ; ſoit qu'il n'ait que la moitié de cet arc, & qu'il ne renferme qu'un arc de 45 degrés. Celui dont on fait le plus d'uſage, eſt un arc de 90 degrés, repréſenté par les figures indiquées dans le problême. Cet inſtrument GDEFK eſt compoſé de deux regles ou rayons ED, EF ; d'un limbe DKF, diviſé en 90 degrés ; d'une regle DG, perpendiculaire au rayon ED, & parallele à l'autre rayon EF ; d'un fil EK, qui ſe trouve attaché au ſommet E de l'angle droit, & qui eſt tendu par un plomb K.

I°. Pour *trouver l'inclinaiſon de l'axe d'un mortier*, par le moyen de cet inſtrument ; on place la regle DG, ou ſur la coupe du mortier, perpendiculairement à l'axe *d e* ; ou ſur la plate-bande du mortier, parallèlement à l'axe *de*. Dans l'une & dans l'autre poſition, on connoît que le plan du quart de cercle eſt vertical ou perpendiculaire à l'horizon, quand le fil à plomb EK ne fait que raſer le limbe DKF, ſans s'en écarter & ſans s'y infléchir.

Dans le premier cas, c'eſt-à-dire, quand la regle DG eſt placée ſur la coupe du mortier (*Fig.* 37) ; l'inclinaiſon du mortier eſt meſurée par l'angle FEK, intercepté entre le fil à plomb & le rayon EF parallele à la regle DG, puiſque cette inclinaiſon FEK eſt le complément de l'angle KED que l'axe *d e* du mortier ou ſa parallele DE fait avec la verticale EK. Quand l'axe *de* du mortier eſt horizontal ; la verticale EK ſe confond avec la regle EF, & l'angle eſt droit. Quand l'axe *d e* du mortier forme avec la ligne horizontale un angle de 15 degrés au-deſſus de l'horizon, l'angle DEK eſt de 75 degrés ; & l'angle KEF, complément du précédent, eſt un angle de 15 degrés qui meſure l'inclinaiſon du mortier ; & ainſi du reſte.

Dans le ſecond cas, c'eſt-à-dire, quand la regle DG eſt placée ſur la plate-bande du mortier (*Fig.* 40) ; l'inclinaiſon du mortier eſt meſurée par l'angle DEK, intercepté entre le fil à plomb EK & le rayon ED perpendiculaire à la regle ; pour les mêmes raiſons qu'on vient d'expoſer dans le cas précédent. La plate-bande du mortier eſt parallele à l'axe *ge* du même mortier.

Dans l'un & dans l'autre cas, l'inclinaiſon du mortier ſera de 45 degrés au-deſſus de l'horizon, quand l'angle DEK ſera de 45 degrés : cette inclinaiſon ſera de 15 degrés, quand l'angle DEK ſera de 15

degrés dans la figure 40, & de 75 degrés dans la figure 37 : & ainſi du reſte.

II°. Pour *trouver l'inclinaiſon de l'axe d'un canon*, on ſe ſert de l'inſtrument que nous allons décrire (*Fig.* 40. II°.)

Soit une regle de fer EG, qui ſoit fixée perpendiculairement par une de ſes extrémités G, à un plateau circulaire de fer *manGm*; & qui porte à ſon autre extrémité E, un ſecteur de cercle EDFE, dont le limbe DF eſt diviſé en degrés & en demi-degrés. Le plateau circulaire, de même diametre que le canon, s'inſinue dans la bouche du canon, en telle ſorte que ſa ſurface eſt perpendiculaire à l'axe *ax*, & parallele à la coupe *mn* du canon.

Le rayon EK du ſecteur eſt auſſi perpendiculaire à l'axe, & parallele à la coupe du canon : à l'extrémité de ce rayon EK commence la diviſion du limbe du ſecteur de K en F, & de K vers D : à l'extrémité E de ce rayon, eſt attaché un fil à plomb EF. Ce fil eſt perpendiculaire à l'axe du canon, quand la piece a une poſition exactement horizontale : mais quand le canon s'incline au-deſſus ou au-deſſous de l'horizon; le fil à plomb, en s'écartant de K vers D, ou de K vers F, marque le degré d'inclinaiſon que prend l'axe *ax* de la piece. Cet inſtrument, qui n'eſt d'aucun uſage pour la guerre, eſt uniquement employé dans certaines expériences qui exigent de la préciſion, ſoit pour examiner les regles de théorie & de pratique généralement reçues, ſoit pour eſſayer ſi on ne pourroit pas leur en ſubſtituer de plus exactes & de plus parfaites.

III°. On a mis en problême phyſique dans ces derniers temps, *ſi une piece de canon plus légere recule moins qu'une autre piece de même calibre & plus peſante, tout étant égal d'ailleurs*; & on a brûlé bien de la poudre à Metz, à Strasbourg, & ailleurs, pour décider, d'après l'expérience, une queſtion qui devoit être toute décidée, d'après la plus ſimple théorie du mouvement connue de tout le monde. Car c'eſt demander, ce me ſemble, ſi un même reſſort qui ſe débande avec une même force motrice, tantôt contre un corps moins maſſif & plus facile à mouvoir, tantôt contre un autre corps plus maſſif & moins facile à mouvoir, doit porter plus loin le corps qui réſiſte plus à ſon action, que celui qui lui réſiſte moins. L'expérience eſt néceſſaire pour conſtater la théorie, quand la théorie eſt encore incertaine & douteuſe : mais quand les principes & les fondements de la théorie ſont inconteſtablement établis, les expériences ne ſont plus néceſſaires pour en conſtater les conſéquences.

Ce problême ſur l'angle d'inclinaiſon d'une bouche à feu n'eſt point de M. l'Abbé Deidier : mais comme on l'a jugé abſolument néceſſaire à cette partie de ſon Ouvrage, on a cru pouvoir & devoir l'y placer, en en prévenant le Public.

154. REMARQUE. M. Blondel, après avoir rapporté dans le premier Livre de ſon *Art de jetter des Bombes*, ce qu'on avoit dit avant lui ſur ce ſujet, nous fait obſerver que la plupart des Auteurs qui ont écrit ſur l'Artillerie, ſe ſont trompés à l'égard des portées d'une même force convenables aux différents angles d'inclinaiſon, pour n'avoir pas bien connu les regles du mouvement de projection. Deſtitués de ce ſecours, ils ont cru pouvoir s'en dédommager en ſe jettant du côté des épreuves : mais ces épreuves n'étant pas guidées par cette fine théorie qui nous apprend à en écarter les circonſtances & les accidents étrangers, loin de leur être utiles, les ont jettés dans l'erreur, & leur ont fait imaginer des ſyſtêmes bien éloignés de la réalité. Ce qu'il y a de ſurprenant, c'eſt que M. de Saint-Remi, qui avoit lu la judicieuſe Critique que M. Blondel a faite des Tables des Bombardiers, nous en ait cependant rapporté quelques-unes dans ſes Mémoires d'Artillerie, telles qu'il les a trouvées dans l'Ouvrage de cet Auteur, & qu'il ait prétendu les juſtifier par la frivole raiſon que l'expérience, ſur-tout en fait de poudre, doit l'emporter ſur les plus ſavantes obſervations. Heureuſement les expériences mêmes ont détrompé les Bombardiers de nos jours ; & je ne crois pas qu'il s'en trouve beaucoup aujourd'hui qui, dans l'exercice de leur art, s'aviſent d'avoir recours à ce que leurs anciens Confreres avoient cru pouvoir ſtatuer là-deſſus. Au reſte, je n'ai garde de confondre avec les tables que les anciens Auteurs nous ont laiſſées dans leurs Ecrits, celles qui ſe trouvent dans le Bombardier François & dans la Théorie ſur le méchaniſme de l'Artillerie par M. Dulacq, Capitaine d'Artillerie du Roi de Sardaigne. Celles-ci ayant été faites ſur les principes de Galilée, qui ont été adoptés par tous les Savants, ſont exemptes de tout ſoupçon, & ne peuvent qu'être utiles ; ſuppoſé qu'il n'y ait point de fautes d'impreſſion, ni d'erreurs de calcul : ce qui arrive quelquefois aux ouvrages de cette nature.

Ce qui a fait que bien des gens ſe ſont ſcandaliſés des regles que la théorie nous enſeigne, c'eſt qu'ils ſe ſont apperçus qu'elles ſe trouvent ſouvent en défaut lorſqu'on fait des épreuves, & qu'ils ne ſe ſont pas apperçus en même temps que cela ne provenoit point du fond de ces regles, mais uniquement des circonſtances & de grand nombre d'accidents qui ſont inſéparables de la pratique.

Ces accidents ſont, 1°. la *réſiſtance & l'agitation de l'air:* par ſa réſiſtance, qui eſt plus ou moins grande ſelon qu'il eſt plus ou moins comprimé, il diminue plus ou moins les portées; & par ſon agitation, qui varie auſſi à tout moment, il en altere les directions. 2°. L'*hétérogénéité de la poudre:* les trois matieres qui la compoſent ne ſe mêlent pas uniformément, quelque ſoin qu'on puiſſe y prendre; les grains n'en ſont pas tous d'égale groſſeur; l'air compris dans ſes pores & dans ſes interſtices eſt tantôt plus ou moins comprimé, de même que l'air que nous reſpirons; les inflammations par conſéquent ne ſe font pas par-tout également, ni toujours avec la même promptitude, & les portées en ſouffrent de l'altération. 3°. La *différence de poids & de diametre dans les bombes*, quoique faites pour un même mortier. Le degré de chaleur n'étant pas toujours le même quand on coule la matiere, le grain en devient plus ou moins fin; & de là la peſanteur en devient plus ou moins grande. Toutes les parties de la matiere n'ont pas par-tout une égale denſité, ou du moins cela eſt très rare: ainſi le centre de gravité n'eſt pas le même que le centre de la figure. D'ailleurs les bombes ne partent que très difficilement ſelon la direction de l'ame de la piece, ſoit à cauſe que le feu n'étant pas porté directement dans le centre de la chambre, le fort de l'inflammation n'eſt pas toujours dans ce centre; ſoit parceque les bombes ayant du vent, ne peuvent pas toujours ſe mettre dans le mortier de façon que l'ame de la piece paſſe par leur centre de gravité: d'où il arrive que la bombe en partant frappe contre quelqu'un des côtés du mortier; ce qui lui fait changer la direction qu'on prétendoit lui donner. 4°. Enfin, les *négligences qu'on peut commettre en ne prenant pas exactement l'angle ſous lequel on veut tirer*, en n'aſſurant pas aſſez le coin de mire, en ne refoulant pas la poudre toujours également, & en n'obſervant pas ſi la piece penche d'un côté ou d'un autre. Tous ces accidents venant à ſe combiner entre eux de différentes façons, peuvent produire des variétés infinies dans les portées, auxquelles il n'eſt pas toujours également facile de remédier.

Si cela eſt, dira-t-on peut-être, *quel avantage pourra-t-on tirer de cette belle théorie que l'on nous vante tant?* La réponſe n'eſt pas difficile à faire. Un Officier qui joint la ſcience à l'expérience (car il faut l'un & l'autre pour n'être pas embarraſſé dans ſes opérations); un tel Officier, dis-je, après avoir fait ſon coup d'épreuve, ſait d'abord tout ce qui arriveroit ſi les accidents dont nous avons parlé ne dérangeoient rien: il part donc d'un point fixe, & c'eſt déja beaucoup dans une matiere où la pratique la plus conſommée ne

trouve que de l'incertitude. Or comme il ſait que l'air réſiſte, & que ſa réſiſtance eſt d'autant plus grande que les projections ſont de plus longue durée; il s'apperçoit que dans les projections qui ſont au-deſſous de l'angle de 45 degrés, celles qui approchent plus de cet angle doivent ſouffrir de plus grandes diminutions; & que lorſque les projections ſont également éloignées de 45 degrés, les portées de celles qui ſont au-deſſus doivent être un peu moins longues que celles qui ſont en deſſous. Cependant, à cauſe que nos projections ſe font avec beaucoup de rapidité, & que leur hauteur ni leur amplitude ne ſont pas bien grandes, il en infere que la différence des portées à celles que la théorie lui donne, doit toujours avoir des bornes aſſez reſſerrées; & par conſéquent il ſait encore à quoi s'en tenir, s'il ne ſe rencontroit que cette difficulté. Que ſi les dérangements deviennent plus conſidérables qu'il ne les a jugés, alors ſachant bien que cela ne peut provenir que des autres accidents qui n'ont rien de commun avec la réſiſtance de l'air, il tourne ſes ſoins à obſerver que la manœuvre ſe faſſe avec toute l'exactitude requiſe: & s'il ne parvient pas à la préciſion géométrique, du moins il s'en approche aſſez pour avoir l'effet qu'il ſouhaite; & c'eſt tout ce qu'on peut demander de lui, puiſqu'il s'agit, non pas de faire tomber une bombe ſur la pointe d'une aiguille, mais de la faire donner ſur un but qui eſt toujours d'une certaine étendue.

Laiſſons maintenant agir un Officier qui n'a que la pratique pour lui: un coup d'épreuve ne lui donnera certainement pas la connoiſſance des portées ſous les différents angles; il faudra donc qu'il en faſſe autant qu'il y a d'angles ſous leſquels on peut tirer, & qu'il brûle bien de la poudre inutilement. Mais quand ces épreuves ſeront faites, que pourra-t-il compter ſur elles? les portées qu'il aura trouvées ſeront-elles les véritables portées? Point du tout. Il faudroit pour cela qu'aucun accident ne les eût troublées, & c'eſt ce qui eſt impoſſible. Que s'il s'attache uniquement à atteindre ſon but, ſous combien d'angles ne faudra-t-il pas qu'il tire, & avec combien de différentes charges, avant qu'il y parvienne! Qui l'aſſurera que la charge avec laquelle il a tiré eſt la moins diſpendieuſe, & qu'on ne pourroit pas tirer avec moins de poudre & donner au but propoſé ſous un angle différent? Paſſons cependant par-deſſus cette conſidération, & voyons ce qu'il fera, ſi par haſard les coups ſuivants ne lui donnent plus la même portée. Il changera de nouveau ſon angle; il hauſſera & baiſſera le mortier; il augmentera la poudre, il la diminuera; il ſe donnera des ſoins fatigants; il ſe

tourmentera & tourmentera les autres, & preſque toujours ſans aucun fruit. Qu'on ſe déſabuſe donc : *la Science, & ſur-tout la Géométrie & la Phyſique, ſont ici plus néceſſaires que l'on ne penſe* ; & ſi quelques Auteurs ont prétendu qu'on ne pouvoit rien ſtatuer, c'eſt qu'ils n'ont pas voulu ſe donner la peine d'étudier des principes qui leur ont paru trop abſtraits ; & que n'ayant pu trouver la ſolution de leur difficulté dans leur aveugle pratique ſur laquelle ils ont fait trop de fonds, ils ſe ſont imaginés fauſſement que le haſard devoit être l'unique regle des projections.

155. PROBLÊME. VI. *Trouver le cercle qui renferme toutes les amplitudes d'une même force de poudre ſous différents angles, ſans être obligé de chercher la plus grande hauteur du coup d'épreuve, ni le parametre de l'axe de la parabole que ce coup d'épreuve a fait décrire à la bombe* (Fig. 38).

SOLUTION. Soit AB l'amplitude que le coup d'épreuve m'a donnée. J'éleve en A la droite indéfinie AS, perpendiculaire ſur AB : je fais au même point A un angle PAD égal à l'angle ſous lequel j'ai fait le coup d'épreuve : je coupe l'amplitude AB en quatre parties égales, & à l'extrémité E de ſon premier quart AE, j'éleve une perpendiculaire ER qui coupe la direction AP en R. Au point R, j'éleve ſur AR la perpendiculaire RS qui coupe l'indéfinie AS au point S ; & ſur AS, pris pour diametre, je décris le demi-cercle SRA, qui eſt le demi-cercle demandé, c'eſt-à-dire le demi-cercle par lequel je puis connoître toutes les amplitudes de la même charge ſous différents angles : ce que je prouve ainſi :

Du milieu D de l'amplitude, j'éleve la perpendiculaire DT qui coupe la direction AP en P : du point R je mene NH parallele à AD & la droite RD : ſur RD, j'éleve la perpendiculaire RT : enfin, prenant HD pour axe, & AD pour ordonnée, je décris la parabole AHB qui eſt la même que la bombe a décrite quand j'ai fait le coup d'épreuve. Car les triangles ſemblables RNA, PRH, ſont parfaitement égaux à cauſe de NR=RH ; & partant PH=NA=HD : ainſi la direction AP eſt tangente de cette parabole, comme cela doit être. Or on ne peut pas décrire deux paraboles différentes, qui aient la même amplitude AB & la même tangente AP, au même point : donc la parabole AHD eſt celle que la bombe a décrite.

Or, à cauſe de RT perpendiculaire ſur RD, la droite TH eſt le quart du parametre de l'axe (135) ; & TD eſt le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A : & à cauſe des triangles ſemblables

ſemblables & égaux SRA, TRD, nous avons SA=TD : donc SA eſt le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A.

Maintenant le demi-cercle BMA eſt préciſément le même que nous avons décrit ci-deſſus (140), puiſque ſon diametre AS eſt le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de la parabole décrite par le coup d'épreuve ſous l'angle PAD; & nous avons fait voir dans cet endroit, que ce cercle ſert à trouver les amplitudes de la même force de poudre ſous différents angles : donc, &c.

156. Il faut obſerver que ce demi-cercle comprend tous les quarts d'amplitude ſous différents angles : par exemple, lorſque la bombe tirée ſous l'angle DAC (*Fig.* 36), décrit la parabole AHC; la droite LT eſt le quart de l'amplitude AC : & lorſque la même bombe, ſous l'angle MAX, décrit la parabole ARX; la droite NM eſt le quart de ſon amplitude AZ; & ainſi des autres.

157. PROBLÊME. VII. *Trouver les différentes amplitudes d'une même force de poudre ſous différents angles, & les angles convenables à différentes amplitudes propoſées, ſans avoir beſoin de recourir aux Tables* (Fig. 39).

SOLUTION. I°. Je conſtruis ſur un papier une échelle que je diviſe en deux mille parties qui repréſenteront des toiſes : j'ai choiſi le nombre de deux mille, parcequ'il eſt la plus grande amplitude d'une bombe pouſſée ſous l'angle de 45 degrés avec la plus grande charge. Cette échelle étant faite, je fais un coup d'épreuve ſous un angle quelconque, & après avoir meſuré exactement ſa portée, je mene ſur un papier une ligne droite indéfinie AZ : je prends ſur l'échelle avec le compas une grandeur égale au quart de la portée que j'ai trouvée, & je la porte ſur AZ de A en B. Je fais en A un angle MAZ égal à l'angle ſous lequel j'ai fait le coup d'épreuve : j'éleve ſur les points A & B deux perpendiculaires AC, BR : du point R, où BR coupe la direction AM, j'éleve RC perpendiculaire ſur AR; & enfin, autour de AC, pris pour diametre, je décris le demi-cercle CRA, & ce demi-cercle eſt celui qui comprend tous les quarts d'amplitude ſous différents angles de la charge avec laquelle j'ai fait le coup d'épreuve (155).

II°. Maintenant ſi je veux ſavoir quelle ſera l'amplitude ſous un autre angle, je fais en A un angle SAZ égal à l'angle donné; & du point S, où le côté SA coupe le demi-cercle CRA, je mene la perpendiculaire ST ſur le diametre CA : puis prenant avec le compas la grandeur TA, je la porte ſur mon échelle; & trouvant

qu'elle vaut un certain nombre de toiſes, je quadruple ce nombre pour avoir l'amplitude convenable à l'angle SAZ.

III°. De même, ſi je veux ſavoir quel eſt l'angle convenable à une amplitude demandée, je prends ſur mon échelle une grandeur égale au quart de cette amplitude: je la porte ſur AZ, de A en T; & au point T j'éleve une perpendiculaire TS. Si cette perpendiculaire coupe le cercle en deux points V, S, je mene de ces deux points les droites VA, SA; ce qui me donne deux différents angles VAZ, SAZ, ſous leſquels je puis avoir l'amplitude demandée. Si TS touchoit le cercle ſans le couper, je n'aurois qu'un angle ſous lequel je pourrois tirer; & cet angle ſeroit celui de 45 degrés. Mais ſi TS ne coupoit point le cercle, l'amplitude demandée ſeroit plus grande qu'il ne faut pour pouvoir y atteindre avec la même charge.

IV°. Comme une échelle diviſée en deux mille parties dont chacune ſeroit un peu ſenſible devroit néceſſairement être fort longue, ce qui demanderoit un papier trop grand, on peut en faire une qui n'en contienne que le quart, c'eſt-à-dire cinq cents parties égales; & on s'en ſervira de la même façon, puiſqu'on n'a beſoin dans cette pratique que des quarts d'amplitude.

Que ſi une échelle de 500 parties ſenſibles étoit encore trop grande, on en feroit une autre qui n'en contiendroit que la moitié, c'eſt-à-dire 250 parties; & alors comme cette échelle repréſenteroit la huitieme partie de l'amplitude de la plus forte charge, il faudroit conſtruire un cercle qui ne contînt que la huitieme partie des amplitudes de la charge avec laquelle on auroit fait l'épreuve; ce qui ſe fait ainſi (*Fig.* 40):

Suppoſons qu'après avoir tiré ſous un angle RAZ, & avoir pris le quart AB de l'amplitude trouvée, je m'apperçoive que le demi-cercle CRA, qui contient tous les quarts d'amplitude de la même charge, demanderoit un papier trop grand: je prends la huitieme partie de cette amplitude, c'eſt-à-dire la moitié du quart AB; je le porte de A en H; j'éleve la perpendiculaire HS; & au point S j'éleve ſur AS la perpendiculaire ST: puis autour du diametre TA, je décris le demi-cercle TSA qui contiendra tous les huitiemes des amplitudes de la même charge. Car à cauſe des triangles ſemblables ASH, ARB, nous aurons AS. AR :: AH. AB; & par conſéquent AS = $\frac{1}{2}$ AR: & à cauſe des triangles ſemblables ASV, ARX, nous aurons VS. XR :: AS. AR; & partant VS = $\frac{1}{2}$ XR. Or dans le demi-cercle CRA, la droite RX eſt le ſinus de l'angle double de l'angle RAZ de projection (143); & dans le demi-cercle TSA, la droite VS eſt auſſi le ſinus de l'angle double du même

angle RAZ ou SAZ : donc le ſinus XR eſt double du ſinus VS.

Que ſi je veux tirer ſous un angle LAZ, je trouverai de même que dans le cercle CRA, le ſinus LP de l'angle double de l'angle LAZ, eſt auſſi double du ſinus MN de l'angle double du même angle LAZ ou NAZ. Car à cauſe des triangles ſemblables CRA, TSA, nous aurons CA. TA :: AR. AS ; & partant CA=2TA. Or les demi-cercles étant ſemblables, les ſinus PL, MN, correſpondants aux mêmes angles, ſont proportionnels à leur diametre ; & par conſéquent PL=2MN : puis donc que tous les ſinus du demi-cercle CRA ſont doubles de tous les ſinus correſpondants du demi-cercle TSA, & que les ſinus du demi-cercle CRA ſont les quarts d'amplitude de la charge avec laquelle l'épreuve a été faite ; il s'enſuit que les ſinus du demi-cercle TSA ſont les huitiemes des mêmes amplitudes.

V°. Pour me ſervir donc de ce demi-cercle qui contient les huitiemes des amplitudes ; ſuppoſons qu'on demande l'amplitude convenable à l'angle NAZ : je mene du point N où la direction NA coupe le demi-cercle TSA, la droite NM perpendiculaire ſur le diametre TA ; & prenant MN, je la porte ſur mon échelle : puis je multiplie la quantité de toiſes que je trouve qu'elle vaut par 8, & le produit eſt l'amplitude demandée.

Et ſi on me demande quel eſt l'angle qui convient à une certaine amplitude ; je prends ſur mon échelle une quantité égale à la huitieme partie de cette amplitude : je la porte de A en Q, & j'éleve la perpendiculaire QN. Si cette perpendiculaire coupe le demi-cercle TSA en deux points O, N ; je mene les droites OA, NA, qui me donnent deux angles ſous leſquels je puis tirer pour avoir l'amplitude demandée, &c.

Il eſt viſible que ſi le diametre TA n'étoit que le quart du diametre CA ; le demi-cercle TSA ne contiendroit que les moitiés des huitiemes, c'eſt-à-dire les ſeiziemes parties des amplitudes. Ainſi on pourroit ſe ſervir de ce cercle, ſi l'on trouvoit que le cercle précédent fût encore trop grand. Par exemple, ſi l'on vouloit l'amplitude convenable à l'angle NAZ, on prendroit avec le compas la grandeur MN que l'on porteroit ſur l'échelle pour avoir ſa valeur en toiſes. Mais comme dans la ſuppoſition que nous venons de faire, MN ne ſeroit que le ſeizieme de l'amplitude, on multiplieroit ſa valeur par 16, ou par 4 & le produit enſuite par 4 ; ce qui donneroit l'amplitude demandée : & ſi on demandoit l'angle convenable à une amplitude, on diviſeroit cette amplitude par 16 ;

ou par 4 & le quotient par 4; & portant ce dernier quotient de A en Q, le reſte s'acheveroit comme ci-deſſus.

VI°. On me dira peut-être qu'il n'eſt pas facile de faire une échelle diviſée exactement: c'eſt pourquoi, pour prévenir cet embarras, voici un inſtrument ſimple, portatif, & extrêmement commode, dont on pourra ſe ſervir. Cet inſtrument eſt compoſé de deux regles, ſemblables à celles d'un pied de Roi, qui ſe joignent de même par une charniere. Mais au lieu de donner 6 pouces de longueur à chacune de ces regles, je voudrois leur en donner 8, afin que les diviſions fuſſent plus ſenſibles. Ces deux regles étant miſes en ligne droite, on fera diviſer la longueur totale en 250 parties; ſavoir, les deux cents premieres de 20 en 20, les 50 autres de 10 en 10, & la derniere de celles-ci en 10 parties égales qui repréſenteront des toiſes, & l'échelle ſera faite: & ſa longueur totale ſera la huitieme partie de la plus grande amplitude avec la plus forte charge. Ainſi on pourra s'en ſervir, comme ci-deſſus, pour des cercles qui contiendront les huitiemes ou les ſeiziemes des amplitudes, &c.

J'ai beaucoup inſiſté ſur la pratique dont je viens de parler, non ſeulement parcequ'elle eſt extrêmement aiſée, mais encore à cauſe qu'elle diſpenſe d'avoir recours à des tables imprimées, qui ſont ſouvent ſujettes à des erreurs ou de calcul ou d'impreſſion.

158. PROBLÊME VIII. *Trouver l'angle ſous lequel il faut tirer avec une charge donnée pour atteindre un but ſitué au-deſſus ou au-deſſous du niveau de la batterie* (Fig. 41).

SOLUTION. I°. Il faut d'abord faire un coup d'épreuve ſous l'angle de quinze degrés, & meſurer exactement l'amplitude qu'il aura donnée: le double de cette amplitude ſera (148) l'amplitude de 45 degrés, c'eſt-à-dire la plus grande; & la moitié de la plus grande amplitude, ou de l'amplitude de 45 degrés, ſera le diametre du cercle qui renferme les amplitudes de toutes les projections de la charge de poudre donnée (149). Cela fait, il faut mener ſur un papier deux lignes AB, AC, perpendiculaires l'une ſur l'autre; & faire la verticale AC égale à l'amplitude de quinze degrés ou à la demi plus grande amplitude; & mener du point C, une ligne CZ indéfinie & parallele à l'horizontale.

II°. Maintenant, ſi le but ſur lequel on veut tirer eſt au-deſſus de l'horizon de la batterie, comme le point P, il faut meſurer par la Trigonométrie, ou autrement, ſa diſtance horizontale AB, & ſa

hauteur BP, & tranſporter ces meſures ſur le papier, par le moyen d'une échelle. Du point A pris pour centre, & avec un rayon égal au diametre AC, il faut décrire un arc CDS; & du point P pris pour centre, & avec un rayon égal à la diſtance PZ du but à la ligne CZ, on décrira un autre arc ZDS. Si les deux arcs ne ſe coupent point, il ſera impoſſible d'atteindre au but propoſé avec la charge donnée; & ſi les deux arcs ſe coupent en deux points D, S, il faut prendre ces points pour les foyers de deux paraboles AHP, ADP, qui auroient pour directrice la droite CZ; & ce ſeront les deux paraboles que la bombe peut décrire pour atteindre le but. Enfin, ſi les deux arcs ſe touchoient ſans ſe couper, on prendroit le point d'attouchement pour le foyer d'une parabole dont la directrice ſeroit la droite CZ; & cette parabole ſeroit alors l'unique que la bombe pourroit décrire pour frapper au but.

La raiſon de ceci eſt facile à deviner, ſi l'on fait attention que la perpendiculaire AC menée du point A ſur la directrice CZ de la parabole AHP, étant égale à la droite AR menée du point A au foyer R de cette parabole; il s'enſuit néceſſairement que cette parabole doit paſſer par le point A de projection: & comme la perpendiculaire PZ menée du point P ſur la même directrice, eſt égale la droite PR menée du même point P au foyer de cette parabole; il s'enſuit encore que cette parabole paſſera auſſi par le but P: (tout cela a été démontré dans les Sections Coniques); & on démontrera de la même façon que la parabole dont le foyer eſt le point S, & dont la directrice eſt CZ, doit auſſi paſſer par les points A, P.

III°. Pour trouver l'angle ſous lequel la bombe doit décrire la parabole AHP, il faut mener du point C au foyer D de cette parabole, la droite CD; couper cette droite en deux également au point M; & du point A, par le point M, mener la droite AMV, qui ſera tangente de la parabole, comme il a été démontré dans les Sections Coniques; & par conſéquent l'angle VAB ſera l'angle demandé. De même menant du point C au foyer S de l'autre parabole AVP, la droite CS; & la coupant en deux également en X, la droite XA ſera la tangente, & l'angle XAB ſera l'angle ſous lequel la bombe décrira la parabole ADP.

On trouveroit de la même façon les angles ſous leſquels la bombe peut atteindre un but ſitué au-deſſous de l'horizon de la batterie; ainſi que la Figure 42 le fait voir.

159. REMARQUE. Ce Problême a été réſolu de grand nombre d'autres façons différentes par la plupart des Auteurs qui ont écrit

Méchaniques. Mais comme la ſolution que je viens de donner, eſt de M. de la Hire, eſt la plus naturelle & en même temps commode, ſur-tout lorſqu'on ſe ſert d'une échelle ſur le , j'ai cru devoir la préférer aux autres dont l'uſage ſeroit plus ... r aſſant.

160. M. de la Hire, après avoir donné la conſtruction de ce Problême, nous apprend de quelle maniere on peut trouver l'angle ou les angles ſous leſquels la bombe peut atteindre le but, lorſqu'on veut agir par la Trigonométrie : mais pour mieux faire entendre ce qu'il dit, je crois qu'il eſt néceſſaire de faire attention aux principes ſuivants.

161. PRINCIPE I. *Si une ligne AB eſt coupée en deux également au point C, le produit de l'une de ſes parties BC par le quadruple de l'autre partie ... eſt égal au quarré de toute la ligne ... ſi la ... eſt diviſée en deux parties inégales ... de ſes parties BD par le quamoindre que le quarré de la ligne ... AB, d'une quantité ... le au quarré de la différence des ... parties BD, AD (...*

... MONSTRATION. I°. ... de BC=AC, le produit de BC par 4AC eſt égal au pr... AC par 4AC; & par conſéquent il eſt égal à $\overline{4AC}$, c'eſt-à-dire à quatre quarrés de la moitié AC de la ligne AB. Mais le quarré de la ligne AB eſt auſſi égal à quatre quarrés de ſa moitié AC : donc le produit de la partie BC par le quadruple de la partie AC, eſt égal au quarré de la ligne AB.

II°. Le produit de la partie inégale BD par le quadruple de l'autre partie inégale AD, eſt BD×4AD; & le quarré de la ligne AB, ou AD+DB, eſt $\overline{AD}$+2AD×DB+$\overline{DB}$: retranchant donc de ce quarré le produit BD×4AD ; le reſte eſt $\overline{AD}$—2AD×DB+$\overline{DB}$. Or, la racine quarrée de ce reſte eſt AD—DB : car AD—DB multiplié par lui-même, donne $\overline{AD}$—2AD×DB+$\overline{BD}$, & AD—BD eſt la différence des parties inégales DB, AD. Donc le quarré de la ligne AD+DB ſurpaſſe le produit BD×4AD, d'une quantité égale au quarré de la différence AD—DB des parties inégales. C. Q. F. D.

162. PRINCIPE II. *Lorſqu'une bombe peut atteindre un but P, qui n'eſt pas au niveau de la batterie, en parcourant deux différentes paraboles ; ſi du milieu O de la ligne AP tirée de la batterie au but, on mene une droite OV perpendiculaire ſur la directrice*

CZ, cette droite coupera les deux paraboles en deux points différents H, h (Fig. 44).

DÉMONSTRATION. Par la conſtruction du Problême, les cercles décrits avec les rayons AC, PZ, ſe coupent en deux points R, S, l'un en deſſus de la ligne AP, & l'autre en deſſous: & par conſéquent le foyer R de l'une des paraboles étant plus proche de la directrice CZ, que le foyer S de l'autre; l'axe QL de la premiere doit être plus grand que l'axe TI de la ſeconde. Or, la ligne AL étant ordonnée à l'axe QL, & la ligne AI ordonnée à l'axe TS; ſi du point A on mene une tangente à la parabole AQP, la ſoutangente YL ſera double de l'axe QL: & ſi du même point A on mene une tangente à la parabole ATP, la ſoutangente NI ſera double de l'axe TI; ainſi YL ſera plus grand que NI: & de là il eſt aiſé de conclure que dans le triangle rectangle YAL, l'angle YAL eſt plus grand que l'angle NAI du triangle rectangle NAI; & que par conſéquent AY doit couper la droite OV en un point V plus éloigné de O que le point *u* où la droite AN coupe la même droite OV.

Or, la droite OV étant parallele aux deux axes des deux paraboles, eſt diametre de l'une & de l'autre; & par conſéquent la droite AP qui ſe termine de part & d'autre aux deux paraboles, & qui eſt coupée en deux également en O, eſt une double ordonnée à ce diametre dans l'une & dans l'autre parabole: & comme elle eſt menée du point d'attouchement de la parabole AQT, la ſoutangente VO doit être double de l'abſciſſe HO. De même, à cauſe que AP eſt auſſi menée du point d'attouchement A de la parabole ATP, la ſoutangente *u*O doit être double de l'abſciſſe *h*O. Mais nous venons de voir que la ſoutangente VO eſt plus grande que la ſoutangente *u*O: donc l'abſciſſe HO eſt auſſi plus grande que l'abſciſſe *h*O; & par conſéquent la droite OV coupe les deux paraboles en deux points différents H, *h*.

163. PRINCIPE III. *Suppoſant toujours que du milieu du point O ſoit menée la droite OV perpendiculaire à la directrice; je dis que la partie HE de cette ligne, compriſe entre la directrice CZ & la parabole AQP, eſt le quart du parametre du diametre OH de cette parabole; & que la partie hE, compriſe entre la même directrice & l'autre parabole ATP, eſt le quart du parametre du diametre* h*O de cette parabole* (Fig. 44).

DÉMONSTRATION. Du point H je mene au foyer R de la parabole AQP la droite HR, laquelle, par la propriété de la parabole, eſt égale à HE. Or, HR eſt le quart du parametre du diametre HO: donc HE eſt auſſi le quart de ce parametre. De même, ſi du point *h*

je mene au foyer S de la parabole ATP la droite hS, cette droite hS ſera égale à hE, & auſſi au quart du parametre du diametre hO.

164. PRINCIPE IV. *Poſant encore les mêmes choſes, je dis que le quart HE du parametre du diametre HO de la parabole AQP eſt égal à l'abſciſſe hO de la parabole ATP; & que réciproquement le quart hE du parametre du diametre hO de la parabole ATP, eſt égal à l'abſciſſe HO de la parabole AQP.*

DÉMONSTRATION. Dans la parabole AQP, nous avons $\overline{AO}^2 = HO \times 4HE$; & dans la parabole ATP, nous avons $\overline{AO}^2 = hO \times 4hE$: donc $HO \times 4HE = hO \times 4hE$; & partant, $HO \times HE = hO \times hE$; c'eſt-à-dire, la ligne OE eſt diviſée en H en deux parties EH, HO, & en h en deux autres parties hO, hE, qui ſont réciproques aux deux EH, HO. Or, nous avons démontré dans la Géométrie (188), qu'une ligne droite OE ne peut être diviſée de cette façon, à moins que les deux parties EH, HO, ne ſoient égales chacune à chacune aux deux hO, hE: donc $EH = Oh$, & $HO = hE$.

165. PRINCIPE V. *Poſant encore les mêmes choſes, je dis que les tangentes AV, Au, coupent le diametre OV en deux points V, u, également éloignés de part & d'autre de la directrice* (Fig. 44).

DÉMONSTRATION. La ſoutangente VO étant double de l'abſciſſe OH, nous avons $OH = VH = EH + EV$: donc EV eſt la différence de la ligne OH à ligne EH. De même la ſoutangente uO étant double de l'abſciſſe Oh, nous avons $Oh = hu = Eh - Eu$; & par conſéquent Eu eſt la différence de la ligne Eh à la ligne hO. Mais la différence de la ligne OH à la ligne HE eſt égale à la différence de la ligne Eh à la ligne Oh: donc $EV = Eu$.

166. COROLLAIRE. Voyons maintenant de quelle façon M. de la Hire nous enſeigne de trouver les angles VAL, uAL, ſous leſquels la bombe peut atteindre le but (*Fig.* 44).

I°. La ligne AC eſt connue, puiſqu'elle eſt égale à la moitié de la plus grande amplitude de la charge de poudre donnée. On connoîtra par la Trigonométrie ou autrement, la diſtance horizontale AB du but à la batterie, ſa hauteur BP, & ſa diſtance PZ à la directrice CZ; à cauſe que BZ = CA, & par conſéquent PZ = CA — BP. Dans le trapézoïde ACZP, la droite OE coupe les côtés non paralleles chacun en deux également: ainſi OE eſt égal à la moitié de la ſomme des droites AC, ZP. De plus dans le triangle rectangle ABP, dont les trois côtés ſeront connus, on connoîtra l'angle PAB: ce qui donnera la valeur de l'angle PAC, complément

ment à un droit de l'angle PAB. Enfin, l'angle VOA, joint à l'angle VOP, vaut deux droits : & par conſéquent ſi de la valeur de deux droits, on ôte l'angle VOP égal à l'angle CAP ; le reſte ſera la valeur de l'angle VOA.

II°. Toutes ces choſes étant ainſi connues, il s'agit de connoître la quantité EV qu'il faut ajouter à la droite OE, pour avoir le côté OV du triangle OVA, ou qu'il faut retrancher de cette même ligne OE, pour avoir le côté O*u* du triangle O*u*A. Car les côtés AO, OV, du triangle AOV ſe trouvant alors connus, de même que l'angle compris AOV ; on trouvera aiſément l'angle VAO, lequel étant ajouté à l'angle PAB, donnera l'angle VAB, ſous lequel il faut tirer pour faire décrire à la bombe la parabole AQP. De même dans le triangle *u*AO, la connoiſſance des côtés AO, O*u*, & de l'angle compris, donnera la connoiſſance de l'angle *u*AO ; & celui-ci ajouté à l'angle PAB fera connoître l'angle *u*AB, ſous lequel la bombe doit décrire la parabole ATP.

III°. Or, nous ſavons que le quarré de AO eſt égal au rectangle OH×4HE ; & que ſi du quarré de OE on retranche le rectangle OH×4HE, le reſte eſt le quarré de la différence des lignes OH, HE, & par conſéquent le quarré de VE, ou de E*u*, qu'il faut ajouter ou retrancher de OE : donc ſi du quarré de OE on retranche le quarré de AO, le reſte ſera le quarré de VE ou E*u* ; & par conſéquent, tirant la racine quarrée de ce reſte, on aura la valeur de VE.

167. Remarque. Dans le cas où la bombe ne pourroit atteindre le but que par une ſeule parabole, les deux cercles décrits avec les rayons AC, PZ (*Fig.* 45), ſe toucheroient ſans ſe couper, & par conſéquent le point d'attouchement R ſeroit ſur la droite AP qui paſſe par les deux centres. Ainſi AP ſeroit égal à la ſomme des rayons AC, PZ ; & AO, moitié de AP, ſeroit égal à la moitié de cette ſomme, c'eſt-à-dire égal à OE, & le quarré de AO ſeroit égal au quarré de OE. Or, par la propriété de la parabole, on auroit $\overline{AO} = OH \times 4HE$: donc $OH \times 4HE = \overline{OE}$; & par conſéquent le point H diviſeroit la ligne OE en deux également. Car ſi les lignes OH, HE, n'étoient pas égales, on auroit OH×4HE, moindre que $\overline{OE}$ (161) : ce qui eſt contre la ſuppoſition. Ainſi dans ce cas la tangente AE couperoit la ligne OE au point E où elle coupe la directrice, & le triangle EOA ſeroit iſoſcele. C'eſt pourquoi l'angle EOA étant connu, les deux autres pris enſemble ſeroient égaux au complément à deux droits de l'angle EOA ; & la moitié de ce

complément ſeroit la valeur de l'angle EAO, après quoi l'on acheveroit le reſte aiſément.

Dans la pratique, après avoir cherché les angles PAB (*Fig.* 44), PAC, EOA, il faut prendre la moitié de la ſomme des droites AC, PZ, en faire le quarré, & retrancher de ce quarré le quarré de AO : s'il ne reſte rien, le triangle EAO (*Fig.* 45) eſt iſoſcele, & par conſéquent l'angle EAO ſe connoîtra aiſément ; & cet angle, ajouté à l'angle PAB, donnera l'angle EAB ſous lequel il faut tirer. Mais ſi après avoir retranché du quarré de EO, le quarré de AO, il reſte quelque choſe ; on tirera la racine quarrée du reſte, & cette racine quarrée ſera la quantité qu'il faudra ajouter à EO, ou lui retrancher, pour avoir les triangles VAO, *u*AO (*Fig.* 44) : & par le moyen de ces triangles on connoîtra les angles VAO, *u*AO, à chacun deſquels ajoutant l'angle PAB, on aura les angles VAB, *u*AB, ſous leſquels la bombe peut atteindre le but.

168. Tout ce que je viens de dire eſt fort ingénieux ; mais dans la pratique, j'aimerois mieux m'en tenir à chercher les choſes par le moyen d'une échelle, comme j'ai dit ci-deſſus ; ce qui eſt beaucoup moins embarraſſant. Que ſi on trouvoit qu'en prenant les meſures ſur l'échelle dont j'ai donné la conſtruction, les Figures 41 & 42 deviendroient trop grandes ; on les diminueroit en cette ſorte. Je prendrois le quart de AC ; aux deux extrémités de ce quart, j'éleverois deux perpendiculaires que je ferois égales chacune au quart de AB : ſur l'extrémité B du quart de AB, j'éleverois une perpendiculaire que je ferois égale au quart de BP : après quoi, avec le quart de AC, & le quart de PZ, je décrirois les deux cercles qui ſe couperoient, ou qui ſe toucheroient, ſelon qu'il y auroit deux paraboles, ou une ſeule ; & achevant le reſte comme ci-deſſus (158), je prendrois avec le rapporteur les angles VAO, *u*AO (*Fig.* 44), ou l'angle EAO (*Fig.* 45), ſelon qu'il y auroit deux paraboles ou une ſeule.

169. Remarque. Avant que de finir cette matiere, je rapporterai ici une autre méthode de mon invention, pour trouver aiſément la façon d'atteindre un but ſitué au-deſſus ou au-deſſous du niveau de la batterie. Cette méthode dépend du principe ſuivant.

170. Hypothese. *Si l'on coupe en quatre parties égales l'amplitude AC d'une parabole ABC, & que des points de diviſion on éleve des perpendiculaires MN, TB, SR, qui coupent la parabole aux points M, B, S ; je dis que les perpendiculaires MN, RS, qui ſont à gauche & à droite de la perpendiculaire TB, ſont égales entre elles ; & que la perpendiculaire TB ſurpaſſe chacune*

des deux autres d'une quantité égale à leurs tiers (Fig. 46).

Démonstration. I°. Puiſque AC eſt l'amplitude de la parabole, & que TB eſt perpendiculaire ſur le milieu de cette amplitude, il eſt clair que TB eſt l'axe. Menant donc du point S l'ordonnée SP, laquelle ſera parallele & égale à TR, nous aurons $\overline{SP}^2 = BP \times a$, en nommant le parametre $= a$, & par conſéquent $\overline{TR}^2 = BP \times a$. Or, nous aurons auſſi $\overline{CT}^2 = BT \times a$: donc $\overline{CT}^2 - \overline{TR}^2 = BT \times a - BP \times a = TP \times a$. Mais à cauſe des paralleles, nous avons TP = SR: donc $\overline{CT}^2 - \overline{TR}^2 = SR \times a$. Menant de même du point N une ordonnée à l'axe, nous trouverons, en faiſant les mêmes raiſonnements, $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = NM \times a$. Mais $\overline{AT}^2 - \overline{MT}^2 = \overline{CT}^2 - \overline{TR}^2$; à cauſe de AT = CT, & de MT = TR: donc $NM \times a = SR \times a$; & par conſéquent NM = SR.

II°. Nous venons de trouver $\overline{SP}^2 = BP \times a$, & $\overline{CT}^2 = TB \times a$: donc $\overline{SP}^2 . \overline{CT}^2 :: BP \times a . TB \times a :: BP . TB$. Or, $\overline{SP}^2 = \overline{TR}^2$, à cauſe de SP = TR; & comme TR n'eſt que la moitié de TC, le quarré de TR n'eſt que le quart du quart du quarré de CT: donc $\overline{TR}^2$ ou $\overline{SP}^2 = \frac{1}{4}\overline{TC}^2$; & par conſéquent $\frac{1}{4}\overline{CT}^2 . \overline{CT}^2 :: BP . TB$; ou $\frac{1}{4} . 1 :: BP . TB$; ou $1 . 4 :: BP . TB$; c'eſt-à-dire, BP eſt le quart de BT, ou le tiers de TP. Mais TP eſt égal à SR: donc l'excès de BP ſur SR, ou ſur ſon égale MN, eſt égal au tiers de SR. Ce qu'il falloit démontrer.

171. Problême. *Atteindre un but ſitué au-deſſus ou au-deſſous du niveau de la batterie par le moyen du principe précédent* (Fig. 47).

Solution. I°. Soit la batterie au point A, & le but P ſitué au-deſſus du niveau; je meſure par la Trigonométrie ou autrement, la diſtance horizontale AN du but à la batterie, & ſa hauteur NP au-deſſus du niveau. Je coupe AN en trois parties égales AR, RS, SN: j'ajoute à AN une partie NT, égale à $\frac{1}{3}$ AN. J'éleve en S la perpendiculaire SO, que je fais égale à $NP + \frac{1}{3}$ NP; & la parabole AOT qui aura pour hauteur ou pour axe la droite SO, & pour ordonnée la droite AS, moitié de AT, paſſera par le but P. Car l'amplitude AT étant diviſée en quatre parties égales; la perpendiculaire SO, menée du point de milieu S, ſurpaſſe chacune des perpendiculaires NP, RH, menées des deux autres points R, N, d'une quantité égale à leurs tiers: donc les points H, P, ſont à la parabole (170).

II°. Si le but P eſt au-deſſous du niveau AR de la batterie A (*Fig.* 48), je prends la diſtance horizontale & la profondeur RP. Je partage AR en trois parties égales AN, NT, TR; ſur l'extrémité N de la premiere partie AN, j'éleve la perpendiculaire BN, que je fais égale au tiers de la profondeur RP; & la parabole qui aura pour axe la droite BN, & pour ordonnée le tiers AN, paſſera par le point P: ce que je démontre ainſi:

Du point P je mene PH parallele & égal à AR: je diviſe PH en trois parties égales PO, OE, EH, qui ſeront égales chacune à chacune aux trois parties égales de AR: j'ajoute à PH la partie HS égale au tiers de PH. Des points H, E, O, j'éleve les perpendiculaires HA, EB, TO, & AH, chacune égale à RP: je fais EB égal à TO+$\frac{1}{3}$ TO. Ainſi la parabole qui aura pour axe la droite EB, & pour ordonnée la droite SE ou EP, paſſera par les points A, T (170). Or les arcs SA, TP, de cette parabole, ſont la continuation de la courbe parabolique ABT, dont l'axe BN eſt le tiers de NE ou RP, & l'ordonnée AN eſt le tiers de AR: donc la parabole ABT étant continuée du côté de P, doit paſſer par le point P.

La regle eſt donc, lorſque le but eſt *au deſſus de l'horizon* de la batterie, d'ajouter à la diſtance horizontale AN du but (*Fig.* 47), le tiers de cette diſtance; & à ſa hauteur NP, ſon tiers, pour avoir l'amplitude AT, & la hauteur SO de la parabole qui doit paſſer par le but P: & lorſque le but P eſt *au-deſſous de l'horizon* (Fig. 48), de prendre les deux tiers AT de la diſtance horizontale AR, & le tiers de la profondeur RP, pour avoir l'amplitude AT, & la hauteur BN, de la parabole qui paſſera par le but P.

L'angle ſous lequel on doit tirer dans l'un & l'autre cas (153), eſt facile à trouver: car on ſait que pour trouver la tangente, il n'y a qu'à prolonger l'axe SO (*Fig.* 49); faire OM=SO; mener la droite MA: & l'angle MAS ſera l'angle demandé.

Il ne reſte donc plus qu'à trouver la charge qu'il faut employer pour atteindre ce but, en tirant ſous l'angle trouvé; ce que nous tâcherons de découvrir, après avoir fait les remarques ſuivantes.

172. THÉORÊME I. *Si avec un même mortier, mais avec deux charges différentes, l'on tire une même bombe ſous un même angle, les deux amplitudes de ces deux charges ſeront entre elles comme les diametres des demi-cercles qui comprennent les projections de ces différentes charges* (Fig. 150).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le demi-cercle ABC comprenne les différentes amplitudes des projections faites avec la

premiere charge; & que le demi-cercle DEC comprenne les différentes amplitudes des projections faites avec la ſeconde charge. Suppoſons encore qu'on ait tiré avec ces deux charges, ſous le même angle ECP: les deux demi-cercles étant ſemblables entre eux, & l'angle BCP égal à l'angle ECP; la droite BH, ſinus de l'angle double de l'angle BCP, ſera au ſinus total, ou au rayon du demi-cercle ABC; comme la droite EV, ſinus de l'angle double du même angle BCF ou ECF, eſt au ſinus total, ou au rayon du demi-cercle DEA.

Or le ſinus HB du demi-cercle ABC eſt le quart de l'amplitude CR de la premiere charge de poudre; & le ſinus EA eſt le quart de l'amplitude CP de la ſeconde charge: donc l'amplitude CR eſt à l'amplitude CP, comme le rayon du demi-cercle ABC eſt au rayon du demi-cercle DEC; ou comme le diametre AC eſt au diametre DC.

173. COROLLAIRE. I°. Donc *les forces de deux charges différentes ſont entre elles comme les racines des amplitudes de ces deux charges ſous les mêmes angles.* Les forces des deux charges ſont entre elles comme les racines des diametres AC, DC: or ces diametres ſont comme les amplitudes CR, CP: donc les forces ſont auſſi comme les racines des amplitudes ſous les mêmes angles.

II°. Donc *avec deux différentes charges, & ſous un même angle, on ne peut pas avoir la même amplitude.* Car les forces étant différentes, les amplitudes, qui ſont comme les quarrés de ces forces, ſeront auſſi différentes.

174. THÉORÊME II. *Deux différentes charges ſous un même angle & dans un même mortier, ne ſeront pas toujours entre elles en même raiſon que leurs amplitudes.*

EXPLICATION. Par des expériences conſtantes, on a éprouvé que s'il arrive qu'après avoir tiré, par exemple, avec quatre onces, & enſuite avec huit ſous le même angle, les amplitudes ſoient entre elles comme quatre & huit; il arrivera, lorſqu'on voudra tirer avec trois & enſuite avec ſix, ou avec cinq & enſuite avec dix, que les amplitudes ne ſeront plus dans la raiſon de trois à ſix, ou de cinq à dix: non plus que ſi on vouloit tirer avec une livre, puis avec deux, ou avec deux, puis avec quatre, &c. De façon que le rapport des amplitudes, loin d'être toujours comme le rapport des charges, c'eſt-à-dire comme le rapport 1, 2, eſt quelquefois plus grand & quelquefois moindre; & qu'à meſure que les deux charges deviennent plus fortes, en conſervant toujours le rapport de

1 à 2, le rapport des amplitudes devient moindre, ſans garder aucun ordre fixe ſur lequel on puiſſe établir des regles certaines. Cela provient des différentes inflammations de la poudre, des différentes vîteſſes de ces inflammations, des poids différents des bombes, quoique faites pour le même mortier, & de grand nombre d'autres accidents dont il eſt inutile de faire le détail.

I°. Pour venir maintenant à déterminer la charge qui convient, lorſqu'on a trouvé, par le moyen du Problême précédent, la parabole qui doit paſſer par un but ſitué au-deſſus ou au-deſſous de l'horizon; ſuppoſons que j'ai trouvé que c'eſt la parabole AEH (*Fig.* 51).

Je coupe l'amplitude AH en quatre parties égales en P, T, V: ſur le point P j'éleve la perpendiculaire PM, qui coupe la tangente AS en M: j'éleve en M la droite BM, perpendiculaire ſur AM, & qui coupe en B la verticale AB; & décrivant ſur AB, pris pour diametre, le demi-cercle BMA, ce demi-cercle comprendra les différentes projections de la charge de poudre néceſſaire pour faire décrire à la bombe la parabole AEH ſous l'angle SAH.

Maintenant *ſi je connois le demi-cercle* qui comprend les différentes projections d'une charge de poudre connue, & que le diametre de ce demi-cercle ſe trouve égal au diametre AB; il eſt clair que cette charge de poudre connue ſera celle que je cherche pour atteindre au but P. Mais ſi ce diametre n'eſt pas égal au diametre AB, tel qu'eſt par exemple le diametre AC, moindre que AB; l'amplitude de la charge connue ſous l'angle SAH, ſera à l'amplitude de celle que je cherche ſous le même angle, comme le diametre AC eſt au diametre AB (172). C'eſt pourquoi ſi les charges étoient comme les amplitudes ſous les mêmes angles, une regle de trois ſuffiroit pour me faire trouver la charge que je cherche, en diſant: AC eſt à AB, comme la charge connue eſt à un quatrieme terme qui ſeroit la charge cherchée.

Or quoique cela ne ſoit pas, comme on a vu ci-deſſus, je cherche néanmoins ce quatrieme terme; & tirant avec cette charge ſous l'angle SAH, j'examine ſi l'amplitude eſt plus eſt grande que AH ou moindre. Si elle eſt plus grande, je diminue la charge de quelque choſe; & ſi elle eſt moindre, je l'augmente de quelque choſe: & par ce moyen, au bout de deux ou trois coups, je tire avec aſſez de préciſion pour pouvoir atteindre à mon but qui, comme on ſait, n'eſt jamais un point mathématique qui demande toute la préciſion de la Géométrie.

II°. Que *ſi je ne connois point le demi-cercle* d'aucune des charges connues ſous leſquelles on peut tirer, je fais un coup d'épreuve

avec l'une de ces charges ; & cherchant par le moyen de ſon amplitude le demi-cercle qui convient à toutes ſes projections, j'acheve le reſte comme auparavant.

On me dira ſans doute que cette méthode eſt tâtonneuſe, & cela eſt vrai : mais les autres, telles que celle de M. de la Hire qu'on a vue ci-deſſus, le ſont auſſi, à cauſe de la réſiſtance de l'air & des autres accidents qui alterent les portées ; & dès-lors je crois qu'il vaut mieux choiſir celle que l'on peut pratiquer plus aiſément. Il ne s'agit donc plus que de ſavoir s'il n'eſt pas plus aiſé de trouver l'angle ſous lequel on doit tirer en ſuivant ma méthode, qu'en ſuivant les autres ; & c'eſt ce que je laiſſe au jugement du Public.

175. Nous parlerons bientôt de la force avec laquelle une bombe frappe un corps qu'elle rencontre dans un point quelconque de la parabole qu'elle décrit, & de ſes différents enfoncements dans les terres, ſelon qu'elle parcourt différentes paraboles : mais auparavant il faut que nous traitions des loix du choc des corps.

Des Loix du Choc des Corps.

176. On diſtingue trois eſpeces de corps ſolides, qui ſont les ſeuls dont nous parlons ici ; les corps *mous*, les corps *durs*, & les corps *élaſtiques* ou *à reſſort*.

Un corps *mou* eſt celui qui venant à choquer un autre corps change de figure, ſans reprendre celle qu'il avoit auparavant.

Un corps *dur* eſt celui qui venant à choquer un autre corps ne change point de figure.

Enfin, un corps *élaſtique* ou *à reſſort*, eſt celui qui, par le choc, change d'abord de figure, & la reprend bientôt après.

La force que ce corps a de reprendre ſa figure, ſe nomme force *élaſtique*.

Comme nous ne connoiſſons point dans la Nature de corps qui ſoient parfaitement durs, ou qui ſoient privés de toute force élaſtique, nous nous bornerons ici à parler du choc des corps mous & de celui des corps élaſtiques : & quoiqu'il n'y ait guere de corps mous qui n'aient un peu d'élaſticité, c'eſt-à-dire qui, après le choc, ne reprennent un peu de leur premiere figure, cependant, à cauſe que leur force élaſtique eſt ordinairement imperceptible, & par conſéquent incapable d'un effet dont on puiſſe s'appercevoir, nous les conſidérerons comme n'ayant aucune élaſticité.

177. L'*action* d'un corps ſur un autre eſt la maniere dont ce corps agit ſur l'autre ; & la *réaction* eſt la maniere dont le corps

choqué ou preſſé agit ſur celui qui le choque ou qui le preſſe.

178. Tout corps qui agit ſur un autre, reçoit de cet autre corps une réaction qui eſt égale à ſon action. Qu'on preſſe une pierre avec le doigt, ce doigt ſera autant preſſé par la pierre que la pierre en eſt preſſée. Si un cheval tire un poids, il eſt attiré de la même façon que ce poids; c'eſt-à-dire, la force qu'il a d'aller en avant eſt diminuée d'une quantité égale à la quantité de force qu'il faut pour mouvoir ce corps; & de là on a tiré cet axiome ou principe: *La réaction eſt égale & contraire à l'action.*

PROPOSITION XX.

179. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps B qu'il ne peut ébranler, le mouvement du corps A ceſſe totalement après le choc.*

DÉMONSTRATION. Le corps A choque le corps B avec une force qui eſt le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe: or comme il tend toujours à conſerver ſon mouvement, & que le corps B ne lui cede pas, il choque ce corps avec toute ſa force, & B réagit de la même façon (178): donc les deux forces étant contraires ſe détruiſent; & comme l'on ſuppoſe que A n'a point de force élaſtique, laquelle le feroit rebrouſſer chemin pour lui faire reprendre la figure qu'il avoit avant le choc, le mouvement doit ceſſer totalement.

PROPOSITION XXI.

180. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps B qui eſt en repos, mais qu'il peut entraîner ou qui va moins vîte ſelon ſa direction; les deux corps, après le choc, ſeront en mouvement ſelon la direction de A.*

DÉMONSTRATION. Le corps A étant en mouvement, tend à ſe conſerver dans cet état; or A en choquant B peut lui donner une partie de ſa vîteſſe, de ſorte qu'il lui en reſte pour ſe mouvoir: donc il n'y a pas de raiſon pour pouvoir dire que A perdra totalement ſon mouvement. Or puiſque A ne communique qu'une partie de ſa force à B, le corps B, par ſa réaction, ne détruit dans A que cette partie; & par conſéquent il en reſte à A, pour ſe mouvoir ſelon ſa premiere direction.

181. COROLLAIRE. De là il ſuit que *le corps A ne doit donner à B qu'autant de force qu'il en faut pour aller enſemble avec la même vîteſſe.* Car dès-lors que A & B iront également vîte, B n'empêchera

n'empêchera point le mouvement de A ; & par conſéquent il n'y a pas de raiſon pour pouvoir dire que A dût communiquer à B un plus grand mouvement.

PROPOSITION XXII.

182. *Si deux corps A, B, non élaſtiques ſe choquent avec des forces égales & des directions contraires, ils demeurent en repos après le choc.*

DÉMONSTRATION. Les deux forces étant égales & contraires s'entredétruiſent ; & les deux corps n'ayant point de force élaſtique qui les oblige de rebrouſſer chemin pour faire prendre aux corps leur premiere figure, le mouvement ceſſe totalement.

PROPOSITION XXIII.

183. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps non élaſtique qui eſt en repos, mais qu'il peut entraîner avec lui, ou qui ſe meut moins vîte dans la même direction ; la quantité de mouvement avant le choc eſt égale à la quantité de mouvement après le choc.*

DÉMONSTRATION. I°. Suppoſons que B ſoit en repos avant le choc ; & nommons a la quantité de mouvement du corps A avant le choc ; & b la quantité de mouvement que le corps A donne au corps B : donc la quantité de mouvement de A après le choc ſera $a-b$; & celle de B ſera b ; & la ſomme de ces deux quantités ſera $a-b+b$, c'eſt-à-dire a : & par conſéquent elle ſera égale à la quantité de mouvement a qui étoit avant le choc.

II°. Suppoſons maintenant que A & B ſoient tous deux en mouvement avant le choc ; que la quantité de mouvement de A avant le choc ſoit a ; que celle de B ſoit b ; & que celle que A donne à B dans l'inſtant du choc ſoit c : donc après le choc la quantité de mouvement de A ſera $a-c$; & celle de B ſera $b+c$; & la ſomme de ces deux quantités ſera $a-c+b+c$, ou $a+b$. Or la quantité de mouvement avant le choc eſt auſſi $a+b$: donc les quantités de mouvement ſont égales avant & après le choc.

PROPOSITION XXIV.

184. *Si deux corps A, B, non élaſtiques ſe choquent avec des directions contraires & des forces inégales ; la différence des quan-*

tités de mouvement avant le choc eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement après le choc.

Démonstration. Suppoſons que la quantité de mouvement *a* de A avant le choc ſoit plus grande que la quantité de mouvement *b* du corps B. Le corps A en choquant B détruira la quantité de mouvement *b*, laquelle eſt contraire à ſa direction ; & produira de plus dans B une quantité de mouvement *c* ſelon ſa direction. Or B par ſa réaction détruira dans *a* une quantité égale à *b*, & une autre égale à *c* : ainſi la quantité de mouvement de A après le choc, ſera $a-b-c$; & celle de B ſera *c* ; & la ſomme de ces deux quantités ſera $a-b-c+c$, c'eſt-à-dire $a-b$. Or, avant le choc, la différence des quantités de mouvement étoit $a-b$: donc la différence des quantités de mouvement avant le choc, eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement après le choc.

185. Remarque. Les Cartéſiens prétendent que dans cette Propoſition, de même que dans la précédente, il y a une égale quantité de mouvement avant & après le choc ; mais c'eſt que dans le cas des directions contraires ils ne prennent pour quantité de mouvement que celle qui eſt ſelon la direction du corps qui a le plus de force, lorſqu'on en a retranché la quantité de mouvement oppoſée du corps qui a le moins de force ; c'eſt-à-dire qu'ils nomment quantité de mouvement avant le choc, ce que nous appellons différence des quantités de mouvement. Ainſi ils diſent la même choſe que nous, quoiqu'ils emploient des termes qui paroiſſent directement oppoſés aux nôtres.

PROPOSITION XXV.

186. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps B non élaſtique qui eſt en repos, & qu'il peut entraîner ; la vîteſſe commune après le choc eſt égale à la quantité de mouvement de A avant le choc, diviſée par la ſomme des maſſes des deux corps.*

Démonstration. Nommons M la maſſe de A, *m* la maſſe de B, & V la vîteſſe de A avant le choc : donc la quantité de mouvement de A avant le choc eſt MV. Or la ſomme des quantités de mouvement des deux corps après le choc eſt encore MV (183) ; & à cauſe que ces deux corps ont une vîteſſe commune après le choc (181), la ſomme des quantités de mouvement n'eſt autre choſe que la ſomme de leur maſſe multipliée par la vîteſſe commune : donc ſi l'on diviſe la ſomme MV de leurs quantités de mouvement par la

ſomme $M+m$ de leurs maſſes ; le quotient $\frac{MV}{M+m}$ ſera la vîteſſe commune après le choc.

187. COROLLAIRE. I°. Si $M=m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{MV}{2m}=\frac{V}{2}$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe commune après le choc ſera la moitié de la vîteſſe avant le choc.

II°. Si $m=2M$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{MV}{3M}=\frac{V}{3}$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe commune après le choc ſera le tiers de la vîteſſe avant le choc ; & ainſi des autres.

III°. Au contraire, ſi $M=2m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{2mV}{3m}=\frac{2V}{3}$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe commune après le choc ſera les $\frac{2}{3}$ de la vîteſſe avant le choc.

IV°. Si $M=3m$, on aura $\frac{MV}{M+m}=\frac{3mV}{4m}=\frac{3V}{4}$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe commune après le choc ſera les $\frac{3}{4}$ de la vîteſſe après le choc ; & ainſi des autres.

V°. D'où il ſuit que plus le corps A eſt grand par rapport à B, plus la vîteſſe après le choc eſt grande, quoique toujours moindre que la vîteſſe avant le choc ; & qu'au contraire plus B eſt grand par rapport à A, plus la vîteſſe après le choc diminue.

PROPOSITION XXVI.

188. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps B non élaſtique qui ſe meut moins vîte que lui avec la même direction ; la vîteſſe commune après le choc eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement avant le choc, diviſée par la ſomme des maſſes.*

DÉMONSTRATION. Nommant M la maſſe de A, V ſa vîteſſe, m la maſſe de B, & u ſa vîteſſe ; la quantité de mouvement de A avant le choc ſera MV, celle de B ſera mu, & la ſomme des deux ſera $MV+mu$. Or la quantité de mouvement après le choc ſera auſſi $MV+mu$ (183) ; & à cauſe de la vîteſſe commune après le choc (181), la ſomme des quantités de mouvement après le choc n'eſt autre choſe que la ſomme des maſſes multipliée par cette vîteſſe commune : donc ſi l'on diviſe la quantité des mouvements $MV+mu$ après le choc, par la ſomme des maſſes ; le quotient $\frac{MV+mu}{M+m}$ ſera la vîteſſe commune après le choc.

Si l'on ſuppoſe $M=2m$, & $V=2u$, on aura $\frac{MV+mu}{M+m}=\frac{2m\times 2u+mu}{3m}$ $=\frac{4mu+mu}{3m}=\frac{5mu}{3m}=\frac{5}{3}u$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe après le choc eſt égale à $\frac{5}{3}$ de la vîteſſe de B avant le choc: & par un ſemblable calcul, on trouvera toujours la vîteſſe après le choc, ſelon les différents rapports des maſſes & des vîteſſes avant le choc.

PROPOSITION XXVII.

189. *Si un corps A non élaſtique choque un autre corps B non élaſtique qui ſe meut dans une direction contraire à la ſienne, mais avec moins de quantité de mouvement; la vîteſſe commune, après le choc, ſera égale à la différence des quantités de mouvement avant le choc, diviſée par la ſomme des maſſes.*

Démonstration. Nommant toujours les mêmes quantités de la même façon, nous avons MV pour la quantité de mouvement de A avant le choc, mu pour celle de B, & $MV-mu$ pour la différence de ces quantités de mouvement. Or cette différence eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement après le choc (184); & à cauſe de la vîteſſe commune après le choc, la ſomme des quantités de mouvement après le choc eſt égale à la ſomme des maſſes multipliée par la vîteſſe commune: donc ſi l'on diviſe la ſomme $MV-mu$ des quantités de mouvement après le choc, par la ſomme $M+m$ des maſſes; le quotient $\frac{MV-mu}{M+m}$ ſera la vîteſſe commune après le choc.

I°. Si l'on ſuppoſe $M=2m$, & $V=2u$, on aura $\frac{MV-mu}{M+m}=\frac{2m\times 2u-mu}{3m}$ $=\frac{4mu-mu}{3m}=\frac{3mu}{3m}=u$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe, après le choc, ſera égale à la vîteſſe de B avant le choc.

II°. De même, ſi l'on ſuppoſe $M=m$, & $V=2u$, on aura $\frac{MV-mu}{M+m}$ $=\frac{2Mu-Mu}{2M}=\frac{Mu}{2M}=\frac{u}{2}$; c'eſt-à-dire, la vîteſſe commune après le choc eſt égale à la moitié de la vîteſſe B avant le choc; & par un ſemblable calcul, on trouvera toujours la vîteſſe commune après le choc, ſelon les différents rapports des maſſes & des vîteſſes avant le choc.

190. Remarque. Les trois formules de la vîteſſe commune après le choc, ſont donc $\frac{MV}{M+m}$, lorſque le corps B eſt en repos avant le choc; $\frac{MV+mu}{M+m}$, lorſque le corps B ſe meut avant le choc, ſelon la

direction de A, mais moins vîte ; & $\frac{MV-mu}{M+m}$, lorſque le corps B ſe meut avec une direction contraire à celle de A, mais avec moins de force : & il faut faire attention à ces trois formules, parcequ'elles nous ſerviront dans ce que nous devons dire touchant le choc des corps à reſſort.

PROPOSITION XXVIII.

191. *Si un corps non élaſtique A choque un autre corps non élaſtique B qui eſt en repos, il le choque avec toute ſa vîteſſe : ſi le corps B ſe meut ſelon la direction de A, mais moins vîte, le corps A le choque avec la différence des vîteſſes : & ſi le corps B ſe meut dans une direction contraire à celle de A, le corps A le choque avec la ſomme des vîteſſes.*

Démonstration. La premiere partie de cette Propoſition eſt évidente par elle-même. La ſeconde ne l'eſt guere moins : car le corps A, mu avec la même vîteſſe B, n'atteindroit jamais B, puiſque les deux corps ne feroient pas plus de chemin l'un que l'autre dans le même temps ; & par conſéquent A n'atteint & ne choque B que par l'excès de ſa vîteſſe ſur celle de B.

Enfin la troiſieme partie ſe prouvera aiſément, en faiſant voir que lorſque A choque B qui s'approche vers lui, la quantité de mouvement qu'il perd eſt égale à celle qu'il perdroit s'il alloit choquer le corps B en repos avec une vîteſſe égale à la ſomme des vîteſſes. En effet,

Lorſque A & B ſe meuvent enſemble, la quantité de mouvement de A avant le choc eſt MV, celle de B eſt mu ; & la vîteſſe commune, après le choc, eſt $\frac{MV-mu}{M+m}$ (189) : donc la quantité de mouvement de A, après le choc, eſt $\frac{MMV-Mmu}{M+m}$. Or ſa quantité de mouvement avant le choc étoit MV : donc ce qu'il a perdu par le choc eſt $MV - \frac{MMV+Mmu}{M+m}$; ou $\frac{MMV+MmV-MMV+Mmu}{M+m}$: ce qui ſe réduit à $\frac{MmV+Mmu}{M+m}$.

Suppoſons maintenant que A ſe meuve avec la vîteſſe $V+u$, & que B ſoit en repos. La quantité de mouvement de A avant le choc ſera $MV+Mu$; & la ſomme des quantités de mouvement après le choc ſera auſſi $MV+Mu$; ainſi la vîteſſe commune après le choc ſera $\frac{MV+Mu}{M+m}$; & la quantité de mouvement de A après le choc ſera

$\frac{MMV+MMu}{M+m}$. Donc ce qu'il aura perdu par le choc ſera $MV+Mu-\frac{MMV-MMu}{M+m}$; ou $\frac{MMV+MmV+MMu+Mmu-MMV-MMu}{M+m}$: ce qui ſe réduit à $\frac{MmV+Mmu}{M+m}$. Or cette perte eſt égale à la précédente : donc, puiſque le corps A perd la même choſe de l'une ou de l'autre façon, il choque le corps B en mouvement, de même qu'il le choqueroit avec la vîteſſe $V+u$, ſi B étoit en repos.

PROPOSITION XXIX.

192. *La force élaſtique d'un corps eſt égale à la force qui le comprime ou qui le tend ſans le rompre.*

DÉMONSTRATION. Puiſque le corps eſt comprimé ou tendu ſans être briſé, il réſiſte donc avec une force égale à celle qui le comprime ou qui le tend. Or il ne réſiſte que par la force élaſtique : donc la force élaſtique eſt égale à la force qui comprime ou qui tend le corps.

193. PROBLÊME I. *Connoiſſant la vîteſſe d'un corps élaſtique A, qui choque un autre corps élaſtique B qui eſt en repos ; connoître les vîteſſes après le choc.*

SOLUTION. I°. Si les deux corps n'étoient pas élaſtiques, la vîteſſe commune après le choc ſeroit $\frac{MV}{M+m}$ (186). Or dans l'inſtant du choc, les reſſorts ſont comprimés avec la vîteſſe V du choc ; & les réſiſtances de ces reſſorts ſont égales, puiſque l'un ne peut ſurmonter l'autre : donc il faut que la vîteſſe V ſe diſtribue aux deux reſſorts réciproquement à leurs maſſes : c'eſt-à-dire qu'en nommant x la partie de la vîteſſe V que le reſſort de B reçoit, ou avec laquelle ce reſſort réſiſte au reſſort de A ; & $V-x$, la partie de la vîteſſe V avec laquelle le reſſort de A réſiſte au reſſort de B ; il faut que la force Bx ou mx ſoit égale à la force $AV-Ax$, ou $MV-Mx$; & que par conſéquent, à cauſe de $mx=MV-Mx$, on ait $x.\ V-x :: M.\ m$.

Or puiſque $mx=MV-Mx$, nous aurons $mx+Mx=MV$, & partant, $x=\frac{MV}{M+m}$. Ainſi la vîteſſe que le reſſort de B reçoit, eſt $\frac{MV}{M+m}$. Or ce reſſort ne pouvant pas ſe détendre du côté de A, dont le reſſort lui réſiſte avec la même force ; il faut néceſſairement qu'il pouſſe B de l'autre côté, & que par conſéquent il donne à B la

vîteſſe $\frac{MV}{M+m}$. Mais indépendamment du reſſort, la vîteſſe de B, après le choc, eſt auſſi $\frac{MV}{M+m}$: donc la vîteſſe totale du corps élaſtique, après le choc, eſt $\frac{2MV}{M+m}$.

II°. Maintenant puiſque $x=\frac{MV}{M+m}$, nous aurons $V-x=V-\frac{MV}{M+m}=\frac{MV+mV-MV}{M+m}=\frac{mV}{M+m}$: or $V-x$ eſt la vîteſſe que le reſſort de A reçoit dans l'inſtant du choc: donc le reſſort de A agit avec la vîteſſe $\frac{mV}{M+m}$. Or ce reſſort ne peut ſe détendre du côté de B dont le reſſort lui réſiſte avec la même force: donc il faut qu'il repouſſe A dans une direction contraire avec la vîteſſe $\frac{mV}{M+m}$. Mais indépendamment de cette vîteſſe, la vîteſſe de A après le choc eſt $\frac{MV}{M+m}$: donc à cauſe de la vîteſſe contraire $\frac{mV}{M+m}$, la vîteſſe du corps élaſtique A eſt $\frac{MV-mV}{M+m}$.

194. Corollaire I. Si l'on ſuppoſe $M=m$; la vîteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{2M}=V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{MV-MV}{M+m}=0$: c'eſt-à-dire que ſi le corps A eſt égal à B, le corps A eſt en repos après le choc, & B ſe meut avec la vîteſſe de A avant le choc.

195. Corollaire II. Si l'on ſuppoſe $M=2m$; la vîteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{4mV}{3m}=\frac{4V}{3}$, & la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{2mV-mV}{3m}=\frac{mV}{3m}=\frac{1}{3}V$.

De même ſi l'on ſuppoſe $M=3m$; la vîteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{6mV}{4m}=\frac{6}{4}V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ ſera $\frac{3mV-mV}{4m}=\frac{2mV}{4m}=\frac{2}{4}V$: & ainſi des autres.

C'eſt-à-dire que lorſque A eſt plus grand que B, les deux corps après le choc ſuivent la direction de A avant le choc, & que la ſomme de leur vîteſſe eſt plus grande que la vîteſſe de A avant le choc.

196. Corollaire III. Au contraire, ſi l'on ſuppoſe $m=2M$;

la vîteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{3M} = \frac{2}{3}V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{MV-2MV}{M+m} = \frac{-MV}{3M} = -\frac{1}{3}V$: & par conſéquent, à cauſe du ſigne —, le corps A rebrouſſera ſon chemin avec $\frac{1}{3}V$.

De même ſi l'on ſuppoſe $m = 3M$; la vîteſſe $\frac{2MV}{M+m}$ de B après le choc ſera $\frac{2MV}{M+3M} = \frac{2MV}{4M} = \frac{2}{4}V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV}{M+m}$ de A ſera $\frac{MV-3MV}{4M} = \frac{-2MV}{4M} = -\frac{2}{4}V$: & par conſéquent le corps A rebrouſſera ſon chemin avec $\frac{2}{4}V$, & ainſi des autres; c'eſt-à-dire que ſi A eſt moindre que B, le corps A retourne toujours en arriere; & la ſomme des vîteſſes après le choc, priſes chacune ſelon leurs directions, eſt égale à vîteſſe de A avant le choc.

197. PROBLÊME II. *Connoiſſant les vîteſſes de deux corps élaſtiques A, B, qui ſe meuvent dans la même direction, mais dont le ſecond B a moins de vîteſſe; connoître les vîteſſes après le choc.*

SOLUTION. I°. Si les deux corps n'étoient pas élaſtiques, leur vîteſſe commune, après le choc, ſeroit $\frac{MV+mu}{M+m}$ (190). Or, la vîteſſe avec laquelle A choque B, eſt $V-u$ (191); & cette vîteſſe doit ſe diſtribuer aux deux reſſorts réciproquement aux maſſes, par les raiſons que nous avons dites dans le Problême précédent. Nommant donc x, la partie de cette vîteſſe que le reſſort de B reçoit, & $V-u-x$, celle que le reſſort de A reçoit; nous aurons $x. V-u-x :: M. m$: donc $mx = MV - Mu - Mx$, ou $Mx + mx = MV - Mu$; d'où je tire $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$. Ainſi la vîteſſe que le reſſort de B reçoit, eſt $\frac{MV-Mu}{M+m}$. Or, ce reſſort ne peut pas ſe détendre du côté de A, dont le reſſort lui réſiſte avec la même force : donc il faut qu'il pouſſe B de l'autre côté avec la vîteſſe $\frac{MV-Mu}{M+m}$. Mais indépendamment du reſſort, B eſt déja pouſſé de ce côté avec la vîteſſe $\frac{MV+mu}{M+m}$: donc la vîteſſe totale de B, après le choc, eſt $\frac{MV+mu+MV-Mu}{M+m}$; ce qui ſe réduit à $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$.

II°. Maintenant puiſque $x = \frac{MV-Mu}{M+m}$; donc $V-u-x = V-u-\frac{MV+Mu}{M+m} = \frac{MV-Mu+mV-mu-MV+Mu}{M+m} = \frac{mV-mu}{M+m}$. Or $V-u-x$ eſt la vîteſſe que le reſſort de A reçoit : donc cette vîteſſe eſt $\frac{mV-mu}{M+m}$. Mais ce reſſort ne peut ſe détendre du côté de B, dont le reſſort

lui

lui réſiſte avec la même force : donc il faut qu'il repouſſe A dans une direction contraire à celle qu'il avoit avec la vîteſſe $\frac{mV-mu}{M+m}$. Or, indépendamment du reſſort, le corps A, après le choc, a la vîteſſe $\frac{MV+mu}{M+m}$: retranchant donc de celle-ci, celle que le reſſort lui donne dans un ſens contraire; la vîteſſe de A, après le choc, ſera $\frac{MV+mu-mV+mu}{M+m}$: ce qui ſe réduit à $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$.

198. Corollaire. Si l'on ſuppoſe $M=m$; la vîteſſe $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$ de B, après le choc, ſera $\frac{2MV}{2M}=V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$, ſera $\frac{2mu}{2m}=u$; c'eſt-à-dire que les deux corps, après le choc, auront échangé leurs vîteſſes avant le choc.

De même ſi l'on ſuppoſe $M=2m$; la vîteſſe $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$ de B, après le choc, ſera $\frac{4mV-2mu+mu}{3m}=\frac{4mV-mu}{3m}=\frac{4}{3}V-\frac{1}{3}u$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ de A, ſera $\frac{2mV-mV+2mu}{3m}=\frac{mV+2mu}{3m}=\frac{1}{3}V+\frac{2}{3}u$: &, par un ſemblable calcul, on trouvera les vîteſſes de A & de B, après le choc, ſelon les différents rapports de M à m; ſoit que A ſuive la même direction, ſoit qu'il ſoit obligé de rebrouſſer chemin : ce que l'on connoîtra, lorſque la valeur de ſa vîteſſe, après le choc, ſera négative.

199. Problême III. *Connoiſſant les vîteſſes de deux corps élaſtiques A, B, qui s'avancent l'un vers l'autre avec des directions contraires, mais dont le ſecond, B, a moins de quantité de mouvement que le premier; connoître leurs vîteſſes après le choc.*

Solution. I°. Si les deux corps n'étoient pas élaſtiques, leur vîteſſe commune, après le choc, ſeroit $\frac{MV-mu}{M+m}$ (190). Or A choque B avec la ſomme $V+u$ des vîteſſes avant le choc (191) ; & cette vîteſſe ſe diſtribue aux deux reſſorts réciproquement à leurs maſſes. Nommant donc x, la portion de cette vîteſſe que le reſſort de B reçoit; & $V+u-x$, la portion que reçoit le reſſort de A; nous aurons x. $V+u-x$ :: M. m : donc $xm=MV+Mu-Mx$, ou $Mx+mx=MV+Mu$; d'où je tire $x=\frac{MV+Mu}{M+m}$. Ainſi le reſſort de B reçoit la vîteſſe $\frac{MV+Mu}{M+m}$: mais ce reſſort ne pouvant ſe détendre du côté de A, dont le reſſort lui réſiſte avec la même

force, il faut néceſſairement qu'il pouſſe B de l'autre côté de A, avec la vîteſſe $\frac{MV+Mu}{M+m}$. Or B, indépendamment du reſſort, a reçu par le choc de A, la vîteſſe $\frac{MV-mu}{M+m}$: donc la vîteſſe de B, après le choc, eſt $\frac{MV-mu+MV+Mu}{M+m}$: ce qui ſe réduit à $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$.

II°. Maitenant à cauſe de $x=\frac{MV+Mu}{M+m}$, nous aurons $V+u-x$ $=V+u-\frac{MV-Mu}{M+m}=\frac{MV+Mu+mV+mu-MV-Mu}{M+m}=\frac{mV+mu}{M+m}$. Or $V+u-x$ eſt la vîteſſe que reçoit le reſſort de A : donc cette vîteſſe eſt $\frac{mV+mu}{M+m}$. Mais ce reſſort ne peut ſe détendre du côté de B, dont le reſſort lui réſiſte : donc il faut qu'il repouſſe A dans une direction contraire avec la vîteſſe $\frac{mV+mu}{M+m}$. Mais indépendamment du reſſort, le corps A après le choc doit avoir la vîteſſe $\frac{MV-mu}{M+m}$ ſelon ſa direction : retranchant donc de cette vîteſſe, la vîteſſe oppoſée que le reſſort lui donne ; ſa vîteſſe après le choc ſera $\frac{MV-mu-mV-mu}{M+m}$ $=\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$.

200. COROLLAIRE. Si l'on ſuppoſe $M=m$; la vîteſſe $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$ de B, après le choc, ſera $\frac{2MV}{M+m}=V$; & la vîteſſe $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$ de A ſera $-\frac{2mu}{2m}=-u$; c'eſt-à-dire, A rebrouſſera ſon chemin avec la vîteſſe de B avant le choc, & B ſuivra la direction de A avec la vîteſſe de A avant le choc. Ainſi ils rebrouſſeront tous les deux leur chemin, en faiſant échange de leur vîteſſe.

Et par un ſemblable calcul, on trouvera toujours les vîteſſes après le choc, ſelon les différents rapports de M à *m* ; en obſervant cependant que ſi l'on veut ſuppoſer que *m* ſoit plus grand que M, il faut que cette ſuppoſition ſoit telle que la quantité de mouvement *mu* de B avant le choc ſoit moindre que la quantité de mouvement MV de A avant le choc, ſelon l'énoncé du Problême.

PROPOSITION XXX.

201. *Si deux corps A, B, d'égales maſſes, ſe choquent avec des vîteſſes égales & directement oppoſées ; après le choc ils rebrouſſeront leur chemin chacun avec ſa vîteſſe.*

DÉMONSTRATION. Si les deux corps n'étoient pas élaſtiques,

leur mouvement ceſſeroit après le choc (182), puiſqu'on ſuppoſe que leurs forces ſont égales. Or, le choc ſe faiſant avec la ſomme V +V des vîteſſes (191); cette ſomme ſera 2V : & comme 2V doit ſe diſtribuer aux deux reſſorts réciproquement aux maſſes que l'on ſuppoſe égales, chaque reſſort recevra la vîteſſe V. Or le reſſort de A ne pouvant ſe détendre du côté de B, dont le reſſort lui réſiſte avec la même force, repouſſera A de l'autre côté avec la vîteſſe V ; & par la même raiſon, le reſſort de B repouſſera B du côté oppoſé à A avec la vîteſſe V : donc ces deux corps rebrouſſeront leur chemin avec les vîteſſes qu'ils avoient avant le choc.

PROPOSITION XXXI.

203. *Si un corps élaſtique A choque un autre corps élaſtique B qui lui réſiſte invinciblement ; le corps A après le choc rebrouſſe ſon chemin avec la même vîteſſe qu'il avoit auparavant.*

Démonstration. Si A & B n'étoient pas élaſtiques, le mouvement de A ceſſeroit après le choc (179). Or, la réſiſtance que le corps B oppoſe au corps A, étant égale à la force du corps A qui eſt MV ; nous pouvons regarder les deux corps A, B, comme deux corps qui ont des maſſes égales, mais dont l'un eſt retenu par un obſtacle invincible : ainſi le choc ſe faiſant avec la vîteſſe V, & cette vîteſſe ſe diſtribuant aux deux reſſorts réciproquement à leurs maſſes, chaque reſſort doit recevoir $\frac{1}{2}$ V de vîteſſe.

Or, le reſſort de A ne pouvant ſe détendre du côté de B, repouſſe A du côté oppoſé avec $\frac{1}{2}$ V ; & dans le même temps, le reſſort de B qui ne peut abſolument ſe détendre du côté de B, repouſſe le corps A avec $\frac{1}{2}$ V : donc le corps A repouſſé avec $\frac{1}{2}$ V $+\frac{1}{2}$ V$=$V doit rebrouſſer chemin avec la vîteſſe qu'il avoit auparavant ; ou bien on peut dire que les deux reſſorts trouvant ici une réſiſtance invincible du côté de B, & n'en trouvant point du côté de A, ils doivent porter leur effort pour ſe détendre de ce côté-là, & par conſéquent repouſſer le corps A avec $\frac{1}{2}$V $+\frac{1}{2}$V $=$V.

PROPOSITION XXXII.

204. I°. *Si deux corps A, B, qui ſe choquent, ſuivent la même direction avant & après le choc ; la quantité de mouvement avant le choc, eſt égale à la quantité de mouvement après le choc.*

II°. *S'ils ont des directions contraires avant & après le choc, la différence des quantités de mouvement eſt la même avant & après le choc.*

III°. *S'ils ont des directions contraires avant le choc, & la même direction après le choc; la ſomme des quantités de mouvement après le choc eſt égale à la différence des quantités de mouvement avant le choc.*

IV°. *Enfin, s'ils ont la même direction avant le choc, & des directions contraires après le choc; la différence des quantités de mouvement après le choc eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement avant le choc.*

DÉMONSTRATION. Dans le premier cas, la ſomme des quantités de mouvement avant le choc eſt $MV+mu$: la vîteſſe de A, après le choc, eſt $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ (197): donc ſa quantité de mouvement eſt $\frac{MMV-MmV+2Mmu}{M+m}$. De même la vîteſſe de B, après le choc, eſt $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$; & ſa quantité de mouvement eſt $\frac{2mMV-mMV+mmu}{M+m}$: ajoutant donc enſemble les deux quantités de mouvement de A & de B après le choc, la ſomme ſera $\frac{MMV-MmV+2Mmu+2mMV-mMV+mmu}{M+m}$ $= \frac{MMV+mMV+Mmu+mmu}{M+m} = MV+mu$. Or, $MV+mu$ eſt la quantité de mouvement avant le choc : donc les quantités de mouvement ſont égales avant & après le choc.

Dans le ſecond cas, la différence des quantités de mouvement avant le choc eſt $MV-mu$. Or, le corps A rebrouſſe chemin après le choc : donc ſa vîteſſe après le choc, laquelle eſt $\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$ (199), devient négative ; & par conſéquent elle eſt $-\frac{MV+mV+2mu}{M+m}$: & ſa quantité de mouvement eſt $-\frac{MMV+MmV+2Mmu}{M+m}$: La vîteſſe B, après le choc, eſt $\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$; & ſa quantité de mouvement eſt $\frac{2mMV+mMu-mmu}{M+m}$. Retranchant donc la quantité de mouvement de A après le choc, de la quantité de mouvement de B après le choc ; leur différence ſera $\frac{2mMV+mMu-mmu+MMV-MmV-2Mmu}{M+m}$ $= \frac{MMV+mMV-mMu-mmu}{M+m} = MV-mu$. Or, cette différence eſt la même que la différence $MV-mu$ des quantités de mouvement avant le choc : donc, &c.

Et par des calculs ſemblables on trouvera aiſément la vérité des deux autres cas.

205. REMARQUE. Il n'y a donc pas toujours la même quantité de mouvement avant & après le choc; & par conſéquent il ſemble

que les Cartéſiens ont tort, lorſqu'ils nous aſſurent le contraire. Mais il faut prendre garde qu'ils ne prennent pour quantité de mouvement, que celle qui reſte ſelon la direction du corps A qui avoit la plus grande quantité de mouvement avant le choc, lorſqu'on en a retranché la quantité de mouvement qui lui eſt oppoſée. Ainſi ils appellent quantité de mouvement, ce que nous appellons différence de ces quantités ; & par conſéquent ils diſent la même choſe que nous. Au reſte, leur façon de s'exprimer & de conſidérer les choſes, eſt quelquefois utile.

PROPOSITION XXXIII.

206. *Dans le choc de deux corps élaſtiques, la ſomme des produits des maſſes par les quarrés de leurs vîteſſes avant le choc, eſt égale à la ſomme des produits des maſſes par les quarrés de leurs vîteſſes après le choc.*

Démonstration. Si les corps A & B ont la même direction avant & après le choc ; la vîteſſe de A, après le choc, eſt $\frac{MV-mV+2mu}{M+m}$ (197) : donc ſon quarré eſt $\frac{M^2V^2-2MmVV+m^2V^2+4mMVu-4mmVu+4m^2u^2}{M^2+2mM+mm}$; & multipliant ce quarré par ſa maſſe, nous aurons $\frac{M^3V^2-2M^2mVV+Mm^2V^2+4M^2mVu-4Mm^2Vu+4Mm^2u^2}{M^2+2mM+mm}$. De même la vîteſſe de B, après le choc, eſt $\frac{2MV-Mu+mu}{M+m}$ (197) ; & ſon quarré multiplié par la maſſe m, eſt $\frac{4M^2V^2m-4M^2Vum+M^2u^2m+4MmmVu-2Mmmuu+m^3u^2}{M^2+2Mm+mm}$.

Ajoutant donc enſemble ces deux quarrés des vîteſſes après le choc, multipliés par leurs maſſes, nous aurons $\frac{M^3V^2+2M^2mV^2+Mm^2V^2+M^2u^2m+2Mm^2u^2+m^3u^2}{M^2+2Mm+mm} = MV^2+mu^2$. Or, MV^2+mu^2 eſt égal à la ſomme des quarrés des vîteſſes avant le choc multipliés par les maſſes : donc cette ſomme eſt égale à celle des quarrés des vîteſſes après le choc multipliés par les maſſes.

Et on prouvera la même choſe dans tous les autres cas ; en obſervant que ſi dans quelqu'un de ces cas, le corps A rebrouſſe ſon chemin après le choc, ſa vîteſſe après le choc devient négative, & que par conſéquent il faut rendre ſon expreſſion négative en changeant les ſignes + & — avant de faire ſon quarré.

Cette Propoſition eſt encore vraie, lorſque l'un des corps B eſt en repos avant le mouvement : ce qu'il eſt facile de vérifier.

207. Remarque. Les partiſans des *forces vives* ont pris d'ici occaſion de ſoutenir que les forces des corps à reſſort qui ſe choquent, ſont entre elles comme les quarrés des vîteſſes multipliées par les maſſes. Car, diſent-ils, les forces ſont entre elles comme les effets qu'elles produiſent: or, dans le choc des corps, les effets ſont que les produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes avant le choc, ſont égaux aux produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes après le choc: donc les forces après le choc doivent être auſſi égales aux forces avant le choc, & par conſéquent elles doivent être dans la raiſon des produits des maſſes par les quarrés des vîteſſes.

Mais il faut prendre garde que cet effet ne vient pas entiérement de la force motrice des corps; car ſi cela étoit, la même choſe devroit arriver dans le choc des corps non élaſtiques; ce qui n'eſt pas vrai: & que par conſéquent cet effet eſt cauſé en partie par la force motrice, & en partie par la force du reſſort, laquelle ne provient nullement de la force motrice. Ainſi cette propriété du choc des corps à reſſort ne fait rien en faveur des forces vives.

PROPOSITION XXXIV.

208. *Si un corps élaſtique A choque un autre corps élaſtique B plus grand que lui, & qui eſt en repos; & que celui-ci, par le mouvement que le choc lui a donné, aille choquer un autre corps élaſtique C plus grand que lui, & qui eſt en repos; la vîteſſe que le corps C recevra par le choc de B, ſera plus grande que celle qu'il auroit reçue, ſi A l'avoit choqué avec la même vîteſſe dont il a choqué B; & la même choſe arriveroit ſi B étoit moindre que A, & C moindre que B* (Fig. 52).

Démonstration. Je nomme L la vîteſſe de A; S, la vîteſſe que B reçoit par le choc de A; R, la vîteſſe que C reçoit par le choc de B; & T, la vîteſſe que C recevroit, ſi A le choquoit immédiatement.

La vîteſſe que A communique à B eſt $\frac{2AL}{A+B}$, c'eſt-à-dire, le double de la quantité de mouvement de A diviſé par la ſomme des maſſes A, B (193): donc $\frac{2AL}{A+B} = S$; & partant, $2AL = S \times \overline{A+B}$: d'où je tire $2L. S :: A+B. A$.

De même la vîteſſe que B donne au corps C eſt $\frac{2BS}{B+C}$; & par conſéquent $\frac{2BS}{B+C} = R$, ou $2BS = R \times \overline{B+C}$: d'où je tire $S. R :: B+C. 2B$. Or, 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon de

2L à S, & de celle de S à R : donc 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon A+B. A, & de la raiſon B+C. 2B ; c'eſt-à-dire 2L. R :: $\overline{A+B}\times\overline{B+C}$. A×2B.

De même la vîteſſe que A donneroit à C s'il le choquoit immédiatement, eſt $\frac{2AL}{A+C}$: donc $\frac{2AL}{A+C}=T$, ou $2AL=T\times\overline{A+C}$: d'où je tire 2L. T :: A+C. A. Il eſt donc queſtion de faire voir que 2L eſt moins grand par rapport à R que par rapport à T ; & que par conſéquent R eſt plus grand que T. Ce que je fais ainſi.

I°. Je prends trois lignes MN, NP, PQ, qui ſoient entre elles comme les maſſes A, B, C ; & par conſéquent j'ai MN+NP ou MP. MN :: A+B. A : donc 2L. S :: MP. MN. De même j'ai NP+PQ ou NQ. 2NP :: B+C. 2B : donc S. R :: NQ. 2NP. Et à cauſe que 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon de 2L à S, & de celle de S à R, ou de la raiſon MP. MN, & de la raiſon NQ. 2NP ; nous avons 2L. R :: MP×NQ. MN×2NP.

II°. J'éleve en N la perpendiculaire ND, que je fais égale à MP, & j'acheve le rectangle DEQN, qui eſt égal à MP×NQ : je prends ſur DH la partie HN=NP, & par conſéquent DH=MN. Du point H, je mene HY parallele à NQ ; & du point P, la droite PZ parallele à ND : & le rectangle HDZX eſt égal à MN×NP. Ainſi nous avons 2L. R :: NDEQ. 2HDZX.

III°. De même MN+PQ. MN :: A+C. A ; & multipliant les deux premiers termes par la hauteur commune NP, j'ai MN×NP +PQ×NP. MN×NP :: A+C. A. Or, nous avons 2L. T :: A+C. A : donc 2L. T :: MN×NP+PQ×NP. MN×NP. Mais MN×NP =HDZX ; & PQ×NP=PQXY : donc 2L. T :: HDZX+PQYX. HDZX ; ou bien, en doublant les deux derniers termes, 2L. T :: 2HDZX+2PQYX. 2HDZX.

IV°. Or, 2HDZX+2PQYX eſt plus grand que NDEQ. Car faiſant HV=DH, & menant du point V la droite VG, parallele à NQ, le rectangle PIGQ ſera plus grand que le rectangle PIVN, à cauſe de PQ plus grand que NP : donc 2HDZX ne ſera moindre que NDZP que de la quantité NVIP ; & au contraire, 2PQYX ſera plus grand que PZEQ de toute la quantité PIGQ plus grande que NVIP. Donc 2HDZX+2PQYX ſera plus grand que NDEQ : & par conſéquent 2HDZX+2PQVX ſera plus grand par rapport à 2HDZX, que NDEQ par rapport au même 2HDZX. Donc auſſi 2L ſera plus grand par rapport à T, que 2L par rapport à R ; & partant, la vîteſſe R ſera plus grande que la vîteſſe T.

On démontreroit la même choſe de la même façon, ſi B étoit moindre que A, & C moindre que B.

209. Il ſuit de là que ſi on mettoit pluſieurs corps entre A & C, en ſorte qu'ils allaſſent tous en augmentant ou en diminuant depuis A juſqu'à C ; on pourroit augmenter conſidérablement la vîteſſe de C.

LEMME.

210. *Trois lignes AB, AC, AD, étant en proportion géométrique continue; ſi on leur ajoute à chacune une même quantité AE; je dis que le rectangle EB×ED des extrêmes EB, ED, eſt plus grand que le quarré de la moyenne EC* (Fig. 53).

DÉMONSTRATION. I°. Je fais le quarré EFGC de la moyenne EC, & le rectangle ELMD des extrêmes EB, ED. Or, par la ſuppoſition, les trois lignes AB, AC, AD, étant en proportion continue, le quarré de AC ſera égal au rectangle AB×AD. Retranchant donc du quarré EFGC, le quarré AHSC, de la droite AC, & du rectangle ELMD, le rectangle APQD égal au rectangle AB ×AD ; il reſtera d'une part le gnomon EFGSHA, & de l'autre le gnomon ELMQPA.

Or, à cauſe de EL=EB, & de AB=AP ou ET, nous avons TL=EA. De même à cauſe de EF=EC, & de AH ou ER=AC, nous avons RF=EA ; & par conſéquent RF=TL : donc prenant LX=FG, & du point X menant VX parallele à TL, le rectangle RFGS ſera égal au rectangle TLVX. Ainſi retranchant du gnomon EFGSHA, le rectangle RFGS ; & du gnomon ELMQPA, le rectangle TLVX; il reſtera d'une part le rectangle RHAE, & de l'autre le rectangle EATP plus le rectangle VXQM.

II°. Je fais AZ=AP ; & menant ZY parallele à EA, j'ai le rectangle YZAE égal au rectangle EAPT. Retranchant donc du rectangle RHAE, le rectangle YZAE ; & des deux EATP+VXQM, le rectangle EATP ; il reſtera d'une part RHZY, & de l'autre VXMQ. Or, ces deux rectangles reſtants, ayant une dimenſion égale RH=VX, ſont entre eux comme HZ eſt à VQ : & par conſéquent, ſi je fais voir que HZ eſt moindre que VQ, j'aurai démontré que le rectangle RHZY eſt moindre que le rectangle VXMQ, & que EFGC eſt moindre que ELMD.

Or, à cauſe de AH=AC, & de AZ=AP ou AB, j'ai ZH=BC ; & de l'autre côté, j'ai VQ=CD. Mais à cauſe des trois lignes AD, AC, AB, en proportion ; j'ai AD—AC. AC :: AC—AB. AB ;

ou CD. AC :: CB. AB ; ou CD. CB :: AC. AB. Mais AC eſt plus grand que AB : donc CD ou VQ eſt plus grand que CB ou ZH ; & partant VQMX eſt plus grand que HZYR. D'où il eſt aiſé de conclure que le quarré EFGC eſt moindre que le rectangle ELMD, puiſqu'après avoir retranché des choſes égales de part & d'autre, le reſte HZYR eſt moindre que le reſte XMQV.

PROPOSITION XXXV.

211. *Si trois corps élaſtiques A, B, C, ſont en proportion géométrique continue, qui aille en augmentant ou en diminuant ; & que A ayant choqué B, qui étoit en repos, celui-ci aille choquer C, qui eſt auſſi en repos : je dis que la vîteſſe que C reçoit de B, eſt plus grande que celle qu'il pourroit recevoir, ſi au lieu de B on mettoit un autre corps H plus grand ou moindre que B, qui après avoir été choqué par A, vînt le choquer* (Fig. 54).

DÉMONSTRATION. I°. Je nomme L la vîteſſe de A ; S, la vîteſſe que B reçoit de A ; & R, la vîteſſe que C reçoit de B. Je prends trois lignes MN, NP, PQ, qui ſoient entre elles comme les trois corps A, B, C ; & ſuivant ce qui a été dit dans le Problême précédent, nous aurons, 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon MP, MN, & de la raiſon NQ, 2NP. Or à cauſe de PQ. NP :: NP. MN, nous avons PQ+NP. NP :: NP+MN. MN, ou NQ. NP :: MP. MN : & doublant les conſéquents, nous aurons NQ. 2NP :: MP. 2MN. Donc puiſque 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon MP. MN, & de la raiſon NQ, 2NP, qui eſt la même que la raiſon MP, 2MN ; nous avons, 2L eſt à R en raiſon compoſée de la raiſon MP, MN, & de la raiſon MP, 2MN ; & par conſéquent $2L. R :: \overline{MP}. \overline{2MN}$.

II°. Maintenant mettons à la place de B, un autre corps X plus grand que B : nommons H, la vîteſſe que ce corps en repos recevra de A ; & Z, celle que le corps X donnera au corps C. Je prends une ligne NF qui ſoit à MN comme X eſt A ; & enſuite une troiſieme proportionnelle NV, à NF & NP. Cela fait :

La vîteſſe que A donnera à X ſera $\frac{2AL}{A+X}$ (193) : donc $\frac{2AL}{A+X} = H$, ou $2AL = H \times \overline{A+X}$: d'où je tire 2L. H :: A+X. A. Mais nous avons A. X :: MN. NF : donc A+X. A :: MN+NF. MN :: MF. MN ; & par conſéquent 2L. H :: MF. MN.

La vîteſſe que X donne à C, eſt $\frac{2HX}{X+C}$: donc $\frac{2HX}{X+C} = Z$; & 2HX

$=Z\times\overline{X+C}$: d'où je tire H. Z :: X+C. 2X. Mais à cauſe que nous avons A. X :: MN. NF, ou A. MN :: X. NF; & A. C :: MN. PQ; ou A. MN :: C. PQ; nous aurons auſſi X. NF :: C. PQ, ou X. C :: NF. PQ :: & partant X+C. X :: NF+PQ. NF; & doublant les conſéquents, X+C. 2X :: NF+PQ. 2NF : donc H. Z :: NF +PQ. 2NF.

Or 2L eſt à Z en raiſon compoſée de la raiſon de 2L à H, & de celle de H à Z : donc 2L eſt à Z en raiſon compoſée de la raiſon MF, MN, & de la raiſon NF+PQ, 2NF.

III°. Mais les trois lignes MN, NP, PQ, étant en proportion continue, nous avons $MN\times PQ=\overline{NP}^2$: & à cauſe des trois lignes en proportion continue NV, NP, NF, nous avons $NV\times NF=\overline{NP}^2$: donc $MN\times PQ=NV\times NF$. D'où je tire NV. MN :: PQ. NF; & compoſant, j'ai NV+MN ou MV. MN :: PQ+NF. NF; & doublant les conſéquents, nous aurons MV. 2MN :: PQ+NF. 2NF.

Donc puiſque nous venons de trouver que 2L eſt à Z en raiſon compoſée de MF, MN, & de NF+PQ, 2NF : il s'enſuit que 2L eſt à Z en raiſon compoſée de MF, MN, & de MV, 2MN; & par conſéquent, 2L. Z :: $MF\times MV$. $\overline{2MN}^2$; & $2L\times\overline{2MN}^2=Z\times MF\times MV$.

Mais nous avons trouvé 2L. R :: $\overline{MP}^2$. $\overline{2MN}^2$, ce qui donne $2L\times\overline{2MN}^2=R\times\overline{MP}^2$: donc $Z\times MF\times MV=R\times\overline{MP}^2$, d'où je tire Z. R :: $\overline{MP}^2$. $MF\times MV$.

Or, à cauſe des trois lignes en proportion continue NV, NP, NF, & de la droite MN ajoutée à chacune d'elles ; nous avons $\overline{MP}^2$ plus petit que $MF\times MV$, par le Lemme précédent : donc la vîteſſe Z que le corps X donneroit au corps C, eſt moindre que celle que le corps C reçoit de B.

On prouveroit la même choſe, ſi au lieu de B on mettoit un autre corps plus petit que B.

Du Choc Oblique des Corps.

212. *Deux corps ſe choquent directement*, lorſque leurs directions paſſent par leurs centres. Par exemple (*Fig.* 55), ſi le corps A avance vers B le long de la ligne AB qui paſſe par les deux centres de A & B, ils ſe choquent directement. Tout ce que nous avons

dit ci-deſſus, touchant le choc des corps, doit s'entendre de ce choc direct.

213. *Deux corps ſe choquent obliquement*, lorſque leurs directions ne paſſent pas par leurs centres. Par exemple, ſi le corps A (*Fig.* 56) ſe meut vers le corps C, ſelon la ligne AD qui ne paſſe pas par le centre C; le choc ſera oblique. De même ſi les deux corps A, B (*Fig.* 57), ſe meuvent ſelon les directions AD, BD, qui ne paſſent pas toutes les deux par les deux centres; le choc de ces corps, lorſqu'ils ſe rencontreront, ſera oblique.

214. *Lorſque les corps ſont ſphériques, l'obliquité du choc ſe meſure par l'angle que fait la direction avec la tangente au point où ſe fait le choc.* Par exemple, ſuppoſons que le corps ſphérique A (*Fig.* 56) aille choquer le corps ſphérique B ſelon la direction AD qui ne paſſe pas par le centre C, & que le choc ſe faſſe au point R. Je mene par le point R une tangente, ou plutôt un plan touchant MS; & l'angle que la direction AR fait avec ce plan, eſt la meſure de l'obliquité du choc.

215. PROBLÊME. *Déterminer ce qui arrive dans le choc oblique des corps non élaſtiques* (Fig. 58 & 59).

SOLUTION. En premier lieu, ſi le corps A (*Fig.* 58) va choquer le corps oblique B, qu'il ne peut ébranler: je conçois un plan touchant au point R où ſe fait le choc. La direction AC étant oblique à ce plan, j'abaiſſe du point A la perpendiculaire AR; & achevant le parallélogramme ARCH, la force AC eſt compoſée de la force AR, & de la force AH. Or la force AR choque le plan directement, & par conſéquent la ſphere B auſſi: mais la force AH ne le choque point; puiſqu'elle eſt parallele à RC: donc après le choc, la force AR ſera détruite, & il ne reſtera plus que la force AH: donc le corps A, après le choc, continuera à ſe mouvoir avec la force AH, ſelon la direction CD parallele à AH.

En ſecond lieu, ſi les corps A, B (*Fig.* 59), ſe choquent avec des directions MA, LB, & avec des vîteſſes exprimées par les droites MA, LB: je conçois que par les centres A, B, il paſſe des plans NR, HV, paralleles au plan touchant CD. Du point M, j'abaiſſe la perpendiculaire MN ſur le plan NR; & achevant le parallélogramme MPAN, la vîteſſe MA eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire MN, & de la vîteſſe MP. De même, j'abaiſſe du point L la perpendiculaire LH ſur le plan HV; & achevant le parallélogramme HBEL, la vîteſſe LB eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire HL, & de la vîteſſe LE. Or, les vîteſſes MP, LE, étant

paralleles, n'agiſſent point l'une ſur l'autre: ainſi les corps ne s'approchent qu'avec les vîteſſes MN, HL. Le plus fort des deux détruira donc la vîteſſe du plus foible, & l'entraînera ſelon ſa direction, avec une vîteſſe qui leur ſera commune (181). Suppoſons que cette vîteſſe ſoit exprimée par la droite AS: le corps A pouſſé par cette vîteſſe AS, & par la vîteſſe NA, qui agit toujours ſur lui, prendra après le choc la direction de la diagonale AQ du parallélogramme AQ, formé par ces deux vîteſſes; & le corps B pouſſé par la vîteſſe BT égale à AS, & par la vîteſſe HB, prendra après le choc la direction de la diagonale BX du parallélogramme BX formé par ces deux vîteſſes.

Et on trouvera de la même façon ce qui doit arriver dans tous les autres cas du choc oblique des corps non élaſtiques.

PROPOSITION XXXVI.

216. *Si un corps élaſtique A choque avec une direction oblique AD, un autre corps élaſtique BC, qu'il ne peut ébranler; il ſe réfléchira après le choc, en faiſant l'angle de réflexion PDC, égal à l'angle d'incidence ADB* (Fig. 60).

Démonstration. Suppoſons que la vîteſſe de A ſoit exprimée par la direction AD. Du point A, j'abaiſſe ſur BC la perpendiculaire AH; & achevant le parallélogramme AHDE, la vîteſſe AD eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire AH, & de la vîteſſe AE parallele au corps BC. Ainſi A ne choque le corps BC qu'avec la vîteſſe AH; & comme il ne peut ébranler le corps B, il doit rebrouſſer chemin avec la même vîteſſe AH ou DE (203). Or la vîteſſe AE agit toujours ſur lui & le pouſſe vers Q: faiſant donc DC =AE, & achevant le parallélogramme DCPE compoſé des deux vîteſſes DE, DC; le corps A prendra la direction de la diagonale DP. Le triangle rectangle DPC ſera donc ſemblable & égal au triangle rectangle DAH; à cauſe de DC=DH, & de CP=AH; & par conſéquent l'angle de réflexion PDC ſera égal à l'angle d'incidence ADH.

217. Problême. *Déterminer ce qui doit arriver dans le choc oblique de deux corps élaſtiques, dont il n'y en a aucun qui réſiſte invinciblement* (Fig. 61 & 62).

Solution. En premier lieu, ſuppoſons que le corps A (Fig. 61), avec une vîteſſe AR, aille choquer obliquement le corps B qui lui eſt égal; & que les deux corps ſoient ſphériques. Je conçois au point R, où ſe fait le choc, un plan ST qui touche le corps B: du

point A, j'abaiſſe la perpendiculaire AS ſur ce plan, & achevant le parallélogramme AMRS, la vîteſſe eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire AS, & de la vîteſſe AM, laquelle étant parallele à ST ne peut agir ſur B. Ainſi A choque directement B avec la vîteſſe AS ou MR : donc à cauſe de l'égalité des maſſes, le corps B, après le choc, ſe meut ſelon la direction RQ avec la vîteſſe MR (194); & A doit être en repos ſelon cette direction : mais comme il eſt toujours pouſſé par la vîteſſe AM, il doit prendre après le choc la direction RT, parallele à AM, avec la vîteſſe AM.

En ſecond lieu, ſuppoſons que le corps A (*Fig.* 62), avec une vîteſſe MA, choque obliquement le corps B moindre que lui, & qui eſt en repos. Je conçois que par le centre A, il paſſe un plan NQ parallele au plan touchant ST. Du point M, j'abaiſſe MN perpendiculaire ſur ce plan ; & achevant le parallélogramme MNAE, la vîteſſe MA eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire MN, & de la vîteſſe ME, laquelle étant parallele au plan touchant ST, ne peut point agir ſur B. Ainſi A n'agit ſur B qu'avec la vîteſſe MN ou EA; & comme B eſt moindre que A, on trouvera, ſelon les regles établies ci-deſſus (195), qu'après le choc, le corps B aura une vîteſſe ſelon la direction EA plus grande que la vîteſſe de A ſelon cette direction. Suppoſant donc que la vîteſſe de B ſoit exprimée par la droite BH, & celle de A par la droite AX; le corps B prendra la direction BH, qui eſt la même que EA, avec la vîteſſe BH : mais le corps A pouſſé par la vîteſſe AX, & par la vîteſſe ME ou AQ ſon égale, laquelle agit ſur lui, prendra la direction de la diagonale AV du parallélogramme AV compoſé des deux vîteſſes; & ſa vîteſſe ſera exprimée par la droite AV.

Et on trouvera de la même façon ce qui doit arriver dans tous les autres cas du choc oblique des corps élaſtiques.

Du Choc des Bombes contre les Corps qu'elles rencontrent, et de leurs enfoncements dans les terres.

218. Si une bombe A (Fig. 63), tirée avec une direction oblique AB, décrit une parabole ALC, & qu'après avoir diviſé ſa direction AB en parties égales AE, EF, FT, on abaiſſe des points de diviſion des perpendiculaires EM, FN, &c, ſur l'amplitude AC; il eſt évident que cette amplitude ſera diviſée en un même nombre de parties égales; & que les arcs paraboliques AH, HL, &c, que ces perpendiculaires couperont, ſeront décrits par la bombe dans des

temps égaux à ceux que la bombe emploieroit à parcourir les droites AE, EC, &c, ſur ſa direction, ſi la peſanteur ne l'abaiſſoit. Car nous avons démontré ci-deſſus, que tandis que la bombe devroit être en E, la peſanteur l'abaiſſe, de ſorte qu'elle ſe trouve en H: que tandis qu'elle devroit être en F, la peſanteur fait qu'elle ſe trouve en L, &c. Or, les parties égales AE, EF, ſeroient parcourues dans des temps égaux, à cauſe que le mouvement de la direction AB eſt uniforme: donc les arcs AH, HL, &c, ſont auſſi parcourus dans des temps égaux.

Suppoſant donc que les diviſions de la direction AB ſoient infiniment proches, les petits arcs AH, HL, &c, ſeront auſſi infiniment petits, & pourront être regardés comme des petites lignes droites qui compoſent la courbe parabolique, & qui, étant prolongées, deviendroient tangentes de la courbe: donc on peut conſidérer la bombe comme parcourant, dans des temps égaux, des petites droites qui ſont dans la direction des tangentes; & par conſéquent en quelque point de la parabole que la bombe ſe trouve, elle eſt dans la direction de la tangente à ce point.

219. THÉORÊME. *Une même parabole ARC ne peut pas être décrite par deux vîteſſes différentes, à commencer par un même point A* (Fig. 63).

DÉMONSTRATION. I°. Je diviſe la direction AB en parties égales AE, EF, &c, qui repréſentent les eſpaces égaux que la bombe parcourroit ſur cette direction dans des temps égaux, ſi la peſanteur ne l'abaiſſoit pas. Ainſi dans le premier temps, la bombe parcourroit AE; dans les deux premiers, elle parcourroit AF; dans les trois premiers, elle parcourroit AT, & ainſi de ſuite: & les abaiſſements EH, LF, &c, cauſés par la peſanteur à la fin du premier temps, des deux premiers, des trois premiers, &c, ſont entre eux comme les quarrés de ces temps, ou comme les quarrés des eſpaces AE, AF, AT, &c.

II°. Suppoſons maintenant qu'une bombe, égale à la premiere, ſoit tirée du même point A avec la même direction, mais avec moins de vîteſſe. Les temps qu'elle emploiera à parcourir les eſpaces AE, AF, AT, &c, ſeront donc plus longs: & par conſéquent l'abaiſſement EO, cauſé par la peſanteur à la fin du premier temps AE, ſera plus long que l'abaiſſement EH; puiſque la peſanteur aura agi dans un temps plus long. Or, cet abaiſſement EO ſera à l'abaiſſement FV que la peſanteur aura cauſé à la fin des deux premiers temps, comme le quarré de AE eſt au quarré de AF, ou

comme l'abaiſſement EH eſt à l'abaiſſement FL. Faiſant donc EH. FL :: EO. FV, on aura FV plus grand que FL, à cauſe de EO plus grand que EH : & par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que tous les autres abaiſſements ſeront plus grands que les abaiſſements TS, &c : donc la bombe, tirée avec cette ſeconde vîteſſe, décrira une parabole qui ne ſera pas la même que la parabole ARC, mais qui paſſera en deſſous.

III°. On prouvera de la même façon, que ſi la bombe étoit tirée avec une vîteſſe plus grande, elle emploieroit moins de temps à parcourir les eſpaces AE, AF, &c ; & que par conſéquent les abaiſſements à la fin de ces temps devenant moins longs, la parabole qu'elle décriroit paſſeroit en deſſus de la parabole ARC.

Au reſte, j'ai dit qu'on ne pouvoit pas décrire la même parabole avec deux vîteſſes différentes, à commencer par un même point A : car il eſt viſible qu'une bombe qui ſeroit tirée horizontalement au ſommet R, parcourroit la même parabole RA avec une vîteſſe différente (131).

PROPOSITION XXXVII.

220. *Si une bombe A, tirée obliquement à l'horizon, choque un plan horizontal pendant ſa courſe, ſoit en montant ou en deſcendant, elle le choque avec la vîteſſe qu'elle auroit acquiſe, ſi elle étoit tombée par ſon propre poids d'une hauteur BR égale à la diſtance qui ſe trouve entre le point B de la parabole où elle ſe trouve lorſqu'elle choque le plan & la tangente CR au ſommet de la parabole qu'elle décrit* (Fig. 64).

Démonstration. Quand la bombe eſt parvenue au point B, ſa force eſt égale à la force d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée du point B ſelon la direction de la tangente BL au point B, & qui décriroit la parabole reſtante BCH : car cette parabole BC ne peut pas être décrite par deux vîteſſes différentes (219). Or, cette force feroit décrire à la bombe la tangente BL dans un temps égal à celui qu'elle emploie à parcourir l'arc BC : menant donc l'ordonnée BE, & achevant le parallélogramme BECL, la force BL eſt compoſée des deux BE, BS, dont l'une feroit parcourir à la bombe la ligne horizontale BE, & l'autre la verticale BS dans un temps égal à celui que la force compoſée BL emploieroit à lui faire parcourir l'eſpace BL. Mais la vîteſſe verticale BS eſt égale à la vîteſſe que la bombe auroit acquiſe ſi elle étoit tombée par ſon propre poids de la moitié RB de la hauteur SB ; car nous avons démontré (104)

que cette vîteſſe acquiſe feroit parcourir un eſpace double de la hauteur RB : donc puiſque la bombe ne peut choquer le plan horizontal mis en B qu'avec ſa vîteſſe verticale, à cauſe que l'horizontale BE eſt parallele à ce plan ; elle le choque avec la vîteſſe qu'elle auroit acquiſe ſi elle étoit tombée de la hauteur BR.

Pour démontrer que la bombe en deſcendant choque un plan horizontal, par exemple, en P, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur NP ; il n'y a qu'à obſerver que quand la bombe eſt parvenue au ſommet C de la parabole, ſa force eſt égale à celle d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée du point C avec une direction horizontale CN, & qui décriroit la demi-parabole CPH : car cette demi-parabole ne peut pas être décrite par deux forces différentes. Or dans le temps que cette force feroit décrire ſur la ligne horizontale la droite CN, la peſanteur fait deſcendre la bombe d'une hauteur verticale NP ; & le corps horizontal mis en P, n'eſt choqué que par ce mouvement vertical, à cauſe que le mouvement horizontal CN lui eſt parallele : donc ce corps eſt choqué avec la vîteſſe acquiſe par la chûte NP.

221. COROLLAIRE. Il ſuit de là qu'*une bombe frappe auſſi fort un plan horizontal au déboucher A du mortier, qu'à la fin H de ſon amplitude*, puiſque les diſtances AO, HX, ſont égales ; qu'elle frappe également en montant ou en deſcendant, lorſque les points B, P, où elle frappe ſont également éloignés du ſommet A ; & que les forces avec leſquelles elle frappe dans les points A, B, inégalement éloignés du ſommet, ſont entre elles comme les racines des diſtances AO, BR : car ces forces ſont comme les vîteſſes acquiſes par les chûtes OA, RB ; & ces vîteſſes ſont comme les racines de ces hauteurs par les regles du mouvement accéléré.

PROPOSITION XXXVIII.

222. *Si une bombe A tirée obliquement à l'horizon choque pendant ſa courſe, ſoit en montant ou en deſcendant, un plan ED perpendiculaire ſur ſa direction, c'eſt-à-dire perpendiculaire à la tangente BL qui paſſe par le point du choc ; la vîteſſe avec laquelle elle choque ce plan, eſt égale à la vîteſſe qu'elle auroit acquiſe, ſi elle étoit tombée de la hauteur du quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B où ſe fait le choc* (Fig. 65).

DÉMONSTRATION. I°. Lorſque la bombe eſt parvenue en B, ſa force eſt égale à celle d'une bombe de même poids qui ſeroit tirée

tirée du point B avec la direction BL, & qui décriroit la parabole BCN ; car cette parabole ne peut pas être décrite avec deux vîteſſes différentes (219). Or cette force eſt égale à la vîteſſe que la bombe auroit acquiſe en tombant de la hauteur du quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B (138) : donc la bombe choque le plan perpendiculaire ED avec cette vîteſſe.

Pour démontrer que la bombe en deſcendant choque un plan ZM perpendiculaire à ſa direction au point du choc H, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur du quart du parametre du diametre qui paſſe par le même point; je mene au point H la tangente HL : du ſommet C, je mene CR parallele à la tangente, & par conſéquent double ordonnée au diametre HP ; & du point R, je mene RV parallele à LC & qui coupe la tangente LH prolongée au point V. Ainſi l'abaiſſement VR eſt égal à l'abaiſſement LC, à cauſe des paralleles LV, CR ; & comme HP, parallele à LC & à VR, coupe la droite CR en deux également, la droite LV eſt auſſi coupée en deux également en H. Cela poſé :

II°. Quand la bombe eſt parvenue en H, il eſt clair que ſi elle ne rencontroit point d'obſtacles, elle continueroit à ſe mouvoir, & décriroit la parabole HR. Ainſi ſa force ſeroit égale à celle d'une bombe de même poids, laquelle étant tirée du point H avec la direction HV, parcourroit la même parabole HR. Or, ſi cette ſeconde bombe, au lieu d'être tirée ſelon la direction HV, étoit tirée ſelon la direction oppoſée HL, elle parcourroit, ſur ſa direction HL, l'eſpace HL=HV dans un temps égal à celui qu'elle auroit employé à parcourir l'eſpace HV ; & par conſéquent l'abaiſſement LC, cauſé par la peſanteur pendant le temps employé à parcourir l'eſpace LH, ſeroit égal à l'abaiſſement VR cauſé par la peſanteur pendant le temps employé à parcourir l'eſpace HV. Donc cette ſeconde bombe, tirée ſelon la direction HL, décriroit la parabole HC ; & par conſéquent ſa vîteſſe ſeroit égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point H (138). Or la vîteſſe de la bombe tirée du point A, & parvenue en H, eſt la même que la vîteſſe de cette ſeconde bombe, comme on vient de le voir : donc cette bombe choque le plan MZ, perpendiculaire à ſa direction, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant d'une hauteur égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point H.

223. COROLLAIRE I. *Si du point de projection A, on éleve perpendiculairement ſur l'amplitude AN, une droite AE égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A ; & que de l'extrémité E, on mene EL parallele à l'amplitude ; qu'enſuite d'un autre point quelconque B de la parabole, on mene une perpendiculaire BT ſur EL:*

Je dis que la vîteſſe avec laquelle la bombe frapperoit en A un plan perpendiculaire à ſa direction ou à la tangente AS, eſt à la vîteſſe avec laquelle elle frapperoit en B un plan perpendiculaire à ſa direction ou à la tangente BV, comme la racine de la hauteur AE, eſt à la racine de la hauteur BT (Fig. 66).

DÉMONSTRATION. Puiſque la bombe tirée du point A avec la direction AS, décrit la parabole ACN ; ſa vîteſſe eſt égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur EA du quart du parametre du diametre qui paſſe par A (138). Or, ſi du point A, je mene au foyer O de la parabole la droite AO ; cette droite AO ſera égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A, ainſi qu'il a été dit dans les Sections coniques. Donc OA ſera égal à AE ; & par conſéquent EL doit être la directrice de la parabole, comme il a été enſeigné dans le même endroit.

Ainſi, ſi du point B, je mene au même foyer O, la droite BO qui ſera auſſi le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B ; cette droite ſera égale à BT, & par conſéquent BT ſera le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B. Mais nous venons de voir dans la Propoſition précédente que la bombe choque en A un plan perpendiculaire à ſa direction AS, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur AE égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A ; & qu'elle choque en B un plan perpendiculaire à ſa direction BV, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur BT égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B ; & que ces deux vîteſſes acquiſes ſont entre elles comme les racines des hauteurs EA, TB : donc la force du choc en A, eſt à la force du choc en B ; comme la racine de EA eſt à la racine de BT.

224. COROLLAIRE II. De là il ſuit qu'*une bombe frappe auſſi fort au débouché A de la piece, un plan perpendiculaire à ſa direction, qu'elle frappe à l'extrémité N de ſon amplitude un plan perpendiculaire à ſa direction ;* & que dans des points B, H, éga-

lement éloignés de la directrice ou de l'amplitude, elle frappe avec la même force, &c.

225. COROLLAIRE III. *Si une bombe A eſt tirée ſucceſſivement avec la même force ſous deux angles également éloignés de 45 degrés; en ſorte qu'elle décrive deux paraboles ACN, ARN, qui ont la même amplitude AN:*

Je dis que cette bombe, dans l'une & l'autre projection, choquera avec la même force des plans perpendiculaires à ſes directions, non ſeulement au débouché de la piece, & à la fin N de l'amplitude; mais encore dans des points B, H, également éloignés de l'amplitude (Fig. 67).

DÉMONSTRATION. Du point A, j'éleve perpendiculairement ſur l'amplitude AN, la droite AE égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de la parabole ARN. Ainſi la vîteſſe de la bombe, au débouché de la piece, ſera égale à la vîteſſe qu'elle auroit acquiſe en tombant de cette hauteur (138). Or, avec la même vîteſſe, la bombe décrit l'autre parabole ACN: donc la droite AE eſt auſſi le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de la parabole ACN. Menant donc du point E la droite EL parallele à l'amplitude; cette droite ſera la directrice des deux paraboles. Car ſi du point A, je mene une droite au foyer de la parabole ARN, cette droite ſera égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de la parabole ARN; & par conſéquent elle ſera égale à AE, & la droite EL ſera la directrice de cette parabole. De même, ſi du point A je mene une droite au foyer de la parabole ACN, cette droite ſera égale au quart du parametre du diametre qui paſſe par le point A de la parabole ACN; & par conſéquent elle ſera auſſi égale à AE, & la droite EL ſera auſſi la directrice de cette parabole. Cela poſé:

I°. Quant la bombe décrit la parabole ARN, le choc en A & le choc en N, ſur des plans perpendiculaires aux directions, c'eſt-à-dire aux tangentes aux points A & N, ſont égaux, puiſque les vîteſſes de ces chocs ſont entre elles comme les racines des hauteurs égales AE, NL (223).

De même quand la bombe décrit la parabole ACN, le choc en A & le choc en N, ſur des plans perpendiculaires aux directions, ſont encore égaux entre eux & aux deux précédents, à cauſe que leurs vîteſſes ſont comme les vîteſſes qui ſeroient acquiſes ſi la bombe tomboit des hauteurs AE, LN. Donc dans les deux

projections la bombe frappe avec la même force au débouché & à la fin AN, les plans perpendiculaires aux directions.

II°. Maintenant ſuppoſons que dans la projection ARN, la bombe choque un plan perpendiculaire à ſa direction au point H; & que dans la projection ACM, elle choque un plan perpendiculaire à ſa direction au point B, autant éloigné de l'amplitude que le point H. La vîteſſe avec laquelle elle choquera en H, ſera égale à la vîteſſe qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur HV, qui eſt le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point H (222, 223): & par la même raiſon, elle choqueroit en B avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur TB, qui eſt le quart du parametre du diametre qui paſſe par le point B. Or les deux hauteurs VH, TB, ſont égales: donc les vîteſſes avec leſquelles la bombe frappe en H un plan perpendiculaire à ſa direction, eſt égale à celle avec laquelle elle frappe en B un plan perpendiculaire à ſa direction.

226. COROLLAIRE. IV. En général, *il eſt donc faux que de deux bombes égales tirées ſous des angles également éloignés de 45 degrés, celle qui eſt tirée au-deſſus de 45 degrés frappe plus fort que celle qui eſt tirée en-deſſous*, comme on le croit communément.

Cela n'eſt vrai que lorſque les plans ſur leſquels elles tombent ſont horizontaux: car, en ce cas, la bombe qui décrit la parabole ARN (*Fig.* 68) choque en N un plan horizontal avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur TN, compriſe entre la tangente RT au ſommet R & l'amplitude AN (220): & la bombe qui décrit la parabole ACN, choque le plan horizontal en N, avec une vîteſſe égale à celle qu'elle auroit acquiſe en tombant de la hauteur MN compriſe entre la tangente CM au ſommet C & l'amplitude. Or ces deux hauteurs ſont inégales: donc les vîteſſes des chocs, qui ſont comme les racines de ces hauteurs, ſont auſſi inégales; & la bombe qui décrit la pararabole ARN choque plus fort que la bombe qui décrit la parabole ACN. Mais la même choſe n'arrive plus lorſque les plans choqués ſont perpendiculaires aux directions, comme on vient de voir, ni lorſqu'ils ſont obliques aux directions & à l'horizon, comme on le verra bientôt.

Bien plus, il ſe peut faire que la bombe tirée ſous l'angle au-deſſus de 45 degrés choque moins fort que celle qui eſt tirée ſous l'angle en-deſſous de 45 degrés. Car ſi le plan choqué en N

(*Fig.* 68), par la bombe qui décrit la parabole ACN, eſt perpendiculaire à ſa direction ou tangente NS; ce même plan ſera oblique à la direction ou tangente de la parabole ARN : ainſi la bombe qui décrira la parabole ARN ne choquera pas ce plan avec autant de force que ſi elle le choquoit perpendiculairement. Mais ſi elle choquoit ce plan perpendiculairement, ſa force ſeroit égale à celle de la bombe qui décriroit la parabole ACN & qui choqueroit le même plan perpendiculairement (225). Donc le choc oblique de la bombe qui décriroit la parabole ARN eſt moindre que le choc direct de celle qui décriroit la parabole ACN.

227. COROLLAIRE V. De là il ſuit que dans la pratique, *lorſqu'on veut tirer ſur des plans inclinés à l'horizon, comme des toits de maiſons, de voûtes, ou de magaſins, il faut tirer, non pas ſous le plus grand angle, mais ſous celui qui fait que la bombe peut choquer moins obliquement.*

PROPOSITION XXXIX.

228. *Si une bombe choque dans quelque point B de ſa parabole un plan MN incliné à l'horizon & à ſa direction BR; la vîteſſe avec laquelle elle choque ce plan eſt à celle avec laquelle elle le choqueroit s'il étoit perpendiculaire à ſa direction, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus droit ou rayon* (Fig. 69).

DÉMONSTRATION. Je prends ſur la direction BR une partie BP égale à la racine du parametre appartenant au point B. Du point P j'abaiſſe la perpendiculaire PM ſur le plan MN, & j'acheve le parallélogramme PMBQ.

Si le choc étoit direct, la bombe frapperoit le plan avec une vîteſſe exprimée par PB (222) : mais puiſque le choc eſt oblique, la vîteſſe PB eſt compoſée de la vîteſſe perpendiculaire PM & de la vîteſſe PQ parallele à MN. Or celle-ci n'agit point ſur MN : donc la bombe frappe avec la vîteſſe PM. Mais dans le triangle PMB les côtés PM, PB, ſont entre eux comme les ſinus des angles oppoſés, c'eſt-à-dire comme le ſinus de l'angle d'incidence PBM eſt au ſinus de l'angle droit PMB : donc la vîteſſe PM avec laquelle la bombe frappe le plan, eſt à la vîteſſe PB, comme le ſinus PM de l'angle d'incidence PMB eſt au ſinus droit PB.

Cherchant donc dans les tables des ſinus, le rayon & le ſinus de l'angle d'incidence, on dira : comme le rayon eſt au ſinus, ainſi PB eſt à un quatrieme terme qui ſera la valeur de PM.

229. COROLLAIRE I. *Si deux bombes de même poids ſont tirées avec la même force ſous deux angles également éloignés de 45 degrés, en ſorte que l'amplitude des deux paraboles ſoit la même, & qu'elles viennent à choquer dans des points B, N, également éloignés de leur amplitude, des plans OT, VS, également inclinés à leur direction HB, NE, je dis qu'elles choqueront ces plans avec des forces égales* (Fig. 70).

DÉMONSTRATION. Les parametres appartenants aux points B, N, ſeront égaux, comme a vu ci-deſſus : c'eſt pourquoi ſi les deux plans étoient perpendiculaires, les deux chocs ſeroient égaux, puiſque les vîteſſes ſeroient comme les racines de ces parametres égaux (225).

Mais comme les chocs ſont obliques, je prends ſur les deux directions les lignes BH, NX, égales chacune à la racine de l'un ou l'autre parametre : & des points H, X, j'abaiſſe ſur les plans les perpendiculaires HO, XV. Ainſi la bombe qui décrit la parabole ARM, choquera le plan VS avec la vîteſſe XV ; & celle qui décrit la parabole ACM, choquera le plan OT avec la vîteſſe HO. Or ces deux vîteſſes VS, OT, ſont égales ; à cauſe que les triangles rectangles HBO, XNV, ayant l'angle d'incidence HBO égal à l'angle d'incidence XNV, & l'hypothénuſe HB égale à l'hypothénuſe XN, ſont égaux entre eux : donc les chocs ſont auſſi égaux.

Et il faudroit dire la même choſe, ſi le choc ſe faiſoit au point M, qui eſt l'extrémité de l'amplitude.

230. COROLLAIRE II. Mais *ſi les angles d'incidence étoient inégaux, & les diſtances des points B, N, à l'amplitude, égales entre elles ; les vîteſſes ou ſinus XV, HO, ſeroient inégales, & les rayons ou ſinus droits XN, HB, ſeroient égaux :* c'eſt pourquoi les vîteſſes des chocs ſeroient entre elles comme les ſinus des angles d'incidence.

231. COROLLAIRE III. D'où il ſuit que *ſi l'angle d'incidence XNV étoit moindre que l'angle d'incidence HBO*, la vîteſſe avec laquelle la bombe qui décrit la plus haute parabole choqueroit ſon plan, ſeroit moindre que celle avec laquelle l'autre bombe choqueroit le ſien.

232. COROLLAIRE IV. Enfin *ſi les angles d'incidence étoient inégaux, & les diſtances des points B, N, à l'amplitude, inégales auſſi ; les ſinus XV, HO, ſeroient différents, & les rayons XN, HB, le ſeroient auſſi*, puiſque les parametres appartenants aux

points B, N, ne ſeroient plus égaux. C'eſt pourquoi la vîteſſe XV ſeroit à la vîteſſe HO, comme le ſinus de l'angle d'incidence XNV par rapport au rayon droit XN, eſt au ſinus de l'angle d'incidence HBO par rapport au rayon HB.

Après avoir donc cherché dans les tables le rayon & le ſinus de l'angle d'incidence XNV, on diroit: comme le rayon eſt à ce ſinus, ainſi XN, racine du parametre appartenant au point N, eſt à un quatrieme terme qui ſeroit la vîteſſe XV. De même, après avoir cherché dans les tables le ſinus de l'angle d'incidence HBO, on diroit: comme le rayon eſt au ſinus, ainſi HB, racine du parametre appartenant au point B, eſt à un quatrieme terme qui ſeroit la vîteſſe HO.

PROPOSITION XL.

233. *Les enfoncements des bombes dans les terres ſur leſquelles elles tombent, ſont entre eux comme les quarrés des vîteſſes acquiſes à la fin de leurs chûtes, ou comme les hauteurs des paraboles qu'elles décrivent* (Fig. 71).

Démonstration. Soient les deux paraboles ACN, ARH, décrites par deux bombes tirées avec des forces inégales. La hauteur de la premiere eſt CP ou QN; & la hauteur de la ſeconde eſt RE ou TH. Ces deux bombes à la fin de leurs amplitudes N, H, frapperoient un plan horizontal avec des vîteſſes égales aux racines des hauteurs QN, TH (220). Suppoſant donc que la terre ſur laquelle elles tombent ſoit aſſez ferme pour ſoutenir ces bombes ſi on les y mettoit avec la main, il eſt viſible que ſi elles s'enfoncent en tombant, ce n'eſt que par l'effet des vîteſſes acquiſes, & nullement par celui de leur peſanteur. Il s'agit donc de faire voir que les enfoncements de ces bombes ſont comme les quarrés de leurs vîteſſes, ou comme leurs hauteurs; & cela ſe démontre ordinairement par une expérience conſtante que l'on fait ainſi.

On prend de l'argille ou de la terre glaiſe, qui ait aſſez de conſiſtance pour ſoutenir une boule qu'on met deſſus. Après quoi, reprenant cette boule, & la laiſſant tomber ſucceſſivement de différentes hauteurs, on trouve toujours que les enfoncements qu'elle a faits dans l'argille, ſont entre eux dans la raiſon des hauteurs. Or, pour prendre raiſon de ceci, il faut conſidérer que la terre eſt compoſée d'une infinité de couches les unes ſur les autres, leſquelles, par leur réſiſtance, détruiſent peu à peu les forces de la boule: & quoique chaque lame réſiſte davantage & ôte plus de vî-

teſſe à la bombe qui tombe de moins haut en N; cependant comme celle qui tombe en H va plus vîte, & qu'elle rencontre plus de lames dans un même temps, il ſe fait une compenſation; de façon que dans des temps égaux les deux bombes perdent des degrés égaux de vîteſſe. Il arrive donc ici la même choſe qu'on voit arriver à deux corps qui, après être deſcendus vers le centre de la terre, de deux hauteurs inégales, remontent avec leurs vîteſſes acquiſes, & perdent, dans des temps égaux, des degrés égaux de cette vîteſſe. Or les eſpaces que ces corps ſe trouvent avoir parcourus, lorſque leurs vîteſſes ſont totalement détruites, ſont entre eux comme les quarrés de vîteſſes, ou comme les hauteurs: donc auſſi les enfoncements des deux bombes doivent être auſſi comme les quarrés des vîteſſes ou comme les hauteurs.

Il y a cependant une différence: car les deux corps, en remontant, parcourent des eſpaces égaux aux hauteurs dont ils ſont deſcendus; au lieu que les enfoncements des bombes ne ſont pas égaux aux hauteurs de leurs paraboles, mais ſimplement proportionnelles à ces hauteurs: & la raiſon en eſt que la réſiſtance des lames de terre qu'elles percent, eſt beaucoup plus grande à chaque inſtant, que la réſiſtance que la peſanteur leur oppoſeroit à chaque inſtant, ſi elles remontoient avec leurs vîteſſes acquiſes.

DE LA STATIQUE.

Du Centre de Gravité des Corps solides.

234. On dit que deux corps ſont en *équilibre*, lorſqu'ils s'empêchent mutuellement de ſe mouvoir, ou lorſqu'ils s'entretiennent l'un & l'autre dans le repos. Par exemple, ſi deux corps A, B (*Fig.* 72), ſont attachés aux extrémités d'un levier AB, ſuſpendu par un point C; & que le corps A empêche le corps B de deſcendre vers le centre de la terre, & le corps B empêche le corps A de deſcendre; les deux corps ſeront en équilibre, & il n'y aura point de mouvement. Que ſi au lieu de l'un des corps A, on met une puiſſance qui empêche le corps B de deſcendre, & qui ne puiſſe pas non plus le faire monter, la puiſſance & le poids ſeront en équilibre.

Le point C, autour duquel deux corps A, B, ſont en équilibre, ſe nomme *centre d'équilibre*.

235. Dans tous les corps il y a un point nommé *centre de gravité* ou *de peſanteur*, qui eſt tel que ſi ce centre eſt empêché de deſcendre

deſcendre vers le centre de la terre, toutes les parties de ce corps ſont en équilibre autour de ce centre.

236. Le *centre de grandeur* d'un corps eſt un point par lequel on peut faire paſſer un plan qui diviſe ce corps en deux parties égales. Dans les corps homogenes, c'eſt-à-dire, dont toutes les parties ſont d'une même matiere qui n'eſt ni plus ni moins condenſe, le centre de grandeur eſt le même que le centre de gravité; car alors le poids d'un côté eſt égal au poids de l'autre côté.

237. Si une ligne AC (*Fig.* 73) tourne autour d'un point B, ce point ſe nomme *centre de mouvement*; & toute ligne droite MN, qui paſſe par le point B, & qui n'eſt pas dans le plan ou dans la ſurface que la ligne AC décrit pendant ſon mouvement, ſe nomme *axe de mouvement.*

238. Comme une ligne AC peut tourner autour de ſon axe de mouvement de différentes façons, nous entendrons toujours dans la ſuite que cette ligne AC (*Fig.* 74) eſt d'abord dans une poſition horizontale; que ſon axe de mouvement MN eſt auſſi horizontal & perpendiculaire à AC; que AC tourne autour de cet axe, en ne ceſſant jamais de lui être perpendiculaire; & que par conſéquent le plan ARCH, que cette ligne décrit, eſt vertical, c'eſt-à-dire perpendiculaire à l'horizon & à l'axe MN de mouvement. Quand nous voudrons entendre les choſes autrement, nous aurons ſoin de nous expliquer.

239. Lorſque nous parlerons de pluſieurs corps attachés à différents points d'un levier qui tournera autour d'un axe de mouvement, nous conſidérerons ce levier comme n'ayant aucune peſanteur, afin de pouvoir conſidérer les forces de ces corps indépendamment de la peſanteur du levier. Mais comme dans la pratique la peſanteur négligée des leviers cauſe de l'altération dans le rapport des forces des corps, nous nous réſervons à corriger ce défaut lorſque nous parlerons des machines.

240. Si deux corps, attachés aux deux extrémités d'un levier, ſont en équilibre autour du centre de mouvement; alors le centre de mouvement & le centre d'équilibre ne ſont qu'un même point.

PROPOSITION XLI.

241. *Les forces de deux ou pluſieurs corps A, B, &c, attachés à différents points d'un levier AB qui tourne autour d'un axe MN de mouvement, ſont entre elles comme les produits des maſſes par les parties du levier compriſes entre ces corps & l'axe de mouve-*

ment : c'eſt-à-dire, la force de A eſt à celle de B, comme le produit AxAC eſt au produit BxBC (Fig. 75).

DÉMONSTRATION. Le corps B ne peut ſe mouvoir autour de MN, & décrire par exemple l'arc BR, que le corps A ne ſe meuve & décrive l'arc AS : car nous ſuppoſons que le levier AB eſt inflexible. Or, à cauſe des angles RCB, ACS, égaux, les ſecteurs RCB, ACS, ſont ſemblables : donc BR. AS :: BC. AC. Or les arcs BR, AS, ſont entre eux comme les vîteſſes des deux corps, puiſque ces deux arcs ſont les eſpaces parcourus par les deux corps dans le même temps : donc les vîteſſes des deux corps ſont auſſi comme les rayons BC, AC ; & par conſéquent nous pouvons prendre ces deux rayons pour l'expreſſion des vîteſſes. Or les forces ſont entre elles comme les quantités de mouvement, ou comme les produits des maſſes par les vîteſſes : donc les forces de A & B ſont entre elles comme les produits AxAC, BxBC.

242. REMARQUE. Cette Propoſition eſt encore vraie, quand le levier n'eſt pas perpendiculaire à l'axe de mouvement. Suppoſons par exemple qu'un levier horizontal AB ſoit attaché fixement en C à ſon axe de mouvement MN auſſi horizontal, mais oblique à AB ; & que cet axe vienne à tourner autour de lui-même, c'eſt-à-dire autour de ſes deux points fixes M, N, à peu près comme une broche tourne autour des chenets qui la ſoutiennent (*Fig.* 76).

Il eſt clair que le levier AB tournera autour de cet axe, en conſervant toujours ſon angle d'obliquité BCN ou ACM : ainſi menant des points A, B, des perpendiculaires AM, BN, ſur l'axe MN ; les poids A, B, ſeront toujours à ces mêmes diſtances de l'axe pendant leur mouvement, & décriront des circonférences dont les cercles ſeront perpendiculaires ſur MN. Or les vîteſſes de ces poids ſeront entre elles comme les circonférences décrites par ces poids, puiſqu'elles ſeront décrites en même temps : par conſéquent ces vîteſſes ſeront auſſi comme les rayons AM, BN, qui ſont dans la même raiſon que leurs circonférences. Mais à cauſe des triangles ſemblables BNC, AMC, nous avons AM. BN :: AC. BC : donc les vîteſſes des poids A, B, ſeront entre elles auſſi comme AC, BC ; & par conſéquent leurs forces ſeront comme les produits AxAC, BxBC.

Ce qui fait voir que ſi nous avons choiſi ci-deſſus (238) l'axe de mouvement perpendiculaire au levier, préférablement à tout autre ; ce n'a été que pour fixer & aider en même temps l'imagination.

Lorſque deux ou pluſieurs corps ſont attachés à différents points

d'un levier qui tourne autour d'un axe de mouvement, les produits A×AC, B×BC, des maſſes par les bras de levier ou par les parties du levier compriſes entre les poids & le centre C de mouvement, ſe nomment *moments* des corps A, B: ainſi le *moment* de A eſt A × AC; le moment de B eſt B × BC; & ainſi des autres.

243. Problême I. *Deux corps A & B étant attachés à deux différents points d'un levier, trouver leur centre d'équilibre, c'eſt-à-dire le point par où il faudroit ſuſpendre le levier, afin que les deux corps fuſſent en équilibre* (Fig. 77).

Solution. Je diviſe la diſtance AB des deux corps AC, CB, en deux parties qui ſoient entre elles réciproquement comme les poids des deux corps; c'eſt-à-dire, je fais A. B :: BC. AC. Je mets la petite longueur BC du côté du corps B, qui eſt le plus grand des deux; & la grande AC, du côté de l'autre corps A: le point de diviſion C eſt le centre d'équilibre demandé.

Car afin que les deux corps ſoient en équilibre, il faut que les produits des corps par leurs diſtances au centre ſoient égaux, puiſqu'il faut que leurs moments ou leurs forces ſoient égales. Or, par la conſtruction, nous avons A. B :: BC. AC: donc A×AC= B×BC: donc il y a équilibre.

244. Problême II. *Un corps A étant attaché à l'un des bras AD d'un levier dont le centre de mouvement eſt en C, trouver à quel point il faut attacher un autre corps B, afin qu'il y ait équilibre* (Fig. 77).

Solution. Je fais: comme le poids B eſt au poids A; ainſi la diſtance AC du poids A au centre C, eſt à un quatrieme terme qui ſera la diſtance CB à laquelle il faut attacher le poids. Car puiſque B. A :: AC. BC: donc B×BC=A×AC; & par conſéquent les deux corps doivent être en équilibre.

245. Problême III. *Deux ou pluſieurs corps A, B, D, &c, étant attachés à un bras CD d'un levier MD, qui tourne autour d'un centre de mouvement C; trouver le point où il faudroit les attacher tous, afin qu'ils euſſent une force égale à la ſomme des forces qu'ils ont chacun en leur place* (Fig. 78).

Solution. Par la condition du Problême, la force de la ſomme des poids attachés tous enſemble à la diſtance du point C qu'on nous demande, ſera le produit de la ſomme de ces poids multipliée par la diſtance demandée; & cette force doit être égale aux trois produits du corps A par ſa diſtance AC, du corps B par ſa

distance BC, & du corps D par sa distance DC : car ces trois produits expriment les forces des trois corps (241). Nommant donc x la distance demandée ; nous avons $Ax+Bx+Dx=AxAC+BxBC+DxDC$: & divisant de part & d'autre par $A+B+D$, nous aurons $x=\frac{AxAC+BxBC+DxDC}{A+B+C}$. D'où l'on tire cette regle générale que,

Pour trouver la distance à laquelle il faut attacher les corps, afin qu'ils aient une force égale à la somme des forces qu'ils ont chacun en leur place ; il faut multiplier chaque corps par sa distance au centre du mouvement, & diviser la somme des produits par la somme des corps : ce qui donnera un quotient qui sera la distance demandée. Par exemple,

Soit $A=1$, $B=2$, $D=4$, $AC=1$, $BC=2$, $DC=3$: nous aurons $AxAC=1$, $BxBC=4$, & $DxDC=12$: donc $x=\frac{1+4+12}{1+2+4}=\frac{17}{7}=2\frac{3}{7}$.

Prenant donc une longueur CH, telle que nous ayons CA. CH :: 1. $2\frac{3}{7}$; la longueur CH sera la distance à laquelle il faut attacher tous les poids, afin qu'ils aient là une force égale à la somme des forces qu'ils ont chacun en leur place.

246. Problême IV. *Plusieurs poids A, B, D, E, étant attachés en différents points d'un levier ; trouver leur centre d'équilibre* (Fig. 79).

Solution. Je conçois que le levier tourne autour d'un axe de mouvement mis à son extrémité C. Je cherche la distance CH, à laquelle il faudroit attacher tous les corps, afin qu'ils eussent la même force sur CB, qu'ils ont chacun en leur place (245) : & je dis que si l'on suspend le levier par le point H, tous les corps seront en équilibre.

Car quand le corps A est en sa place A, son moment ou sa force est AxAC ; & quand il sera en H, son moment ou sa force est AxCH, ou AxAC+AxAH : donc la force qu'il gagne lorsqu'il est transporté en H, est AxAH. Par la même raison, la force que le corps B transporté en C gagne, est BxBH : ainsi la somme des forces que les corps A, B, gagnent quand ils sont transportés en H, est AxAH+BxBH.

De l'autre côté, quand le corps D est en sa place D, son moment ou sa force est DxDC ; & quand il est transporté en H, sa force n'est plus que DxCH, ou DxDC—DxHD : donc la force qu'il perd quand il est en H, est DxHD. Par la même raison, la force

que le corps E perd lorſqu'il eſt en H, eſt ExHE. Ainſi la ſomme des forces que les deux corps D, E, perdent lorſqu'ils ſont en H, eſt DxHD+ExEH.

Or, puiſque la force des corps tranſportés en H eſt égale à la ſomme des forces qu'il avoient chacun en leur place, il faut néceſſairement que la ſomme des forces gagnées par les deux premiers ſoit égale à la ſomme des forces perdues par les deux autres: donc AxAH+BxBH=DxDH+ExEH.

Si nous concevons donc que le levier ſoit ſuſpendu en H, c'eſt-à-dire que ſon centre de mouvement ſoit le point H, la force du corps A, ſur le bras AH, ſera AxAH; celle du corps B ſera BxBH: de même la force du corps D, ſur le bras EH, ſera DxDH; & celle du corps E ſera ExEH. Mais nous venons de trouver que la ſomme des deux premieres forces eſt égale à celle des deux ſecondes: donc les quatre corps ſeront en équilibre autour du point H.

247. Problême V. *Deux ou pluſieurs corps A, B, étant attachés à différents points d'un bras CB d'un levier MB, qui tourne autour d'un centre C de mouvement; trouver à quelle diſtance de C il faut attacher un autre corps D ſur l'autre bras CM, afin qu'il y ait équilibre* (Fig. 80).

Solution. Par la condition du Problême, il faut que la force du corps D ſoit égale à la ſomme des forces des deux corps. Donc le corps D, multiplié par la diſtance cherchée, doit être égal au produit de A par AC, plus le produit de B par BC. Ainſi nommant x la diſtance cherchée, nous aurons $Dx = AxAC + BxBC$; & diviſant de part & d'autre par D, nous aurons $x = \frac{AxAC+BxBC}{D}$; c'eſt-à-dire que ſi l'on diviſe la ſomme des moments de A & de B par le poids D, le quotient ſera la diſtance cherchée. Par exemple,

Soit A=1, B=2, D=4, AC=1, BC=2: nous aurons AxAC=1, BxBC=4; & partant $x = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4}$: prenant donc ſur le bras MC une longueur MD, telle qu'on ait $1. \frac{5}{4} :: CA. CD$: le point D ſera le point où il faudra attacher le poids D.

248. Problême VI. *Deux ou pluſieurs corps A, B, étant attachés à différents points d'un bras CB d'un levier MB, qui tourne autour d'un centre C de mouvement; trouver le poids qu'il faudroit mettre à un point D de l'autre bras CM, afin qu'il y eût équilibre* (Fig. 80).

Solution. Je nomme x le poids qu'on demande; par conſé-

quent, pour faire équilibre, nous aurons $x \times CD = A \times AC + B \times BC$: donc en diviſant de part & d'autre par CD, nous aurons $x = \frac{A \times AC + B \times BC}{CD}$; c'eſt-à-dire que ſi l'on diviſe la ſomme des moments de A & de B, par la diſtance donnée CD, le quotient ſera la valeur du poids demandé. Par exemple,

Soit $A = 1$, $B = 2$, $AC = 1$, $BC = 2$, $CD = \frac{5}{4}$: donc $A \times AC = 1$, & $B \times BC = 4$. Ainſi $x = \frac{1+4}{\frac{5}{4}} = \frac{4+16}{5} = \frac{20}{5} = 4$; & par conſéquent le poids demandé D doit être $= 4$.

PROPOSITION XLII.

249. *Soit un levier horizontal MD, auquel eſt attaché fixement un autre levier horizontal SR qui le traverſe, & aux extrémités duquel ſont deux poids S, R, dont le centre d'équilibre ſur SR eſt le point H, où les deux leviers ſe coupent* (Fig. 81).

Je dis que ſi le levier MD tourne autour d'un axe de mouvement C, en entraînant avec lui le levier SR, la ſomme des moments ou des forces des poids S, R, ſur le bras CD du levier MD, ſera égale au moment ou à la force que ces deux poids auroient ſur le même bras, s'ils étoient attachés au point H, qui eſt leur centre d'équilibre ſur le levier SR.

Démonstration. Des points S, R, je mene les droites SL, RO, paralleles au levier MD, & les droites ST, RV, paralleles à l'axe OL de mouvement.

Les corps S, R, en tournant autour de LO, décriront des circonférences dont les rayons ſont les perpendiculaires SL, RO : ainſi les vîteſſes de ces corps ſeront comme ces circonférences, ou comme leurs rayons SL, RO. Or SL = CT, à cauſe des paralleles, & OR = CV : donc les vîteſſes des deux corps ſeront entre elles comme les droites CT, CV ; & par conſéquent leurs forces ou moments ſur le bras CD ſeront entre eux comme les produits $S \times CT$, $R \times CV$; c'eſt-à-dire qu'ils peſeront autant ſur ce bras, que s'ils étoient mis en T & en V.

Or à cauſe que les poids S, R, ſont en équilibre autour du point H, nous avons RH. SH :: S. R : & à cauſe des triangles ſemblables HRV, HST, nous avons HR. HS :: HV. TH : donc HV. TH :: S. R ; & par conſéquent $S \times TH = R \times HV$.

Mais $S \times TH$ eſt la quantité de force que le corps S mis en T gagneroit s'il étoit tranſporté en H ; car alors ſon moment ſur le bras CD ſeroit $S \times CH = S \times CT + S \times TH$: & $R \times HV$ eſt la quan-

tité de force que le corps R mis en V perdroit s'il étoit tranſporté en H, puiſqu'alors ſon moment ſur le bras CD ſeroit R×CH=R×VC —R×HV. Donc le gain de force d'un côté étant égal à la perte de l'autre, les deux corps mis en H doivent avoir autant de force ſur CD, qu'ils en auroient s'ils étoient en T & en V. Mais ils en auroient autant en T & en V, qu'ils en ont en S & en R : donc les deux corps mis en H, ont autant de force ſur le bras CD, qu'ils en ont en S & en R.

250. REMARQUE. Cette Propoſition eſt encore véritable, lorſque l'axe de mouvement LO (*Fig.* 82) n'eſt pas perpendiculaire ſur le levier MD. Car alors les poids S, R, décriroient autour de LO des circonférences dont les rayons ſeroient les perpendiculaires PS, RQ, différentes des droites SL, RO, paralleles au levier MD. Cependant à cauſe des triangles ſemblables SPL, RQO, nous aurons SP. RQ :: SL. RO : & par conſéquent les vîteſſes des deux corps qui ſeroient entre elles comme les rayons SP, RQ, de leurs circonférences, ſeroient auſſi comme les paralleles LS, RO, ou comme les droites CT, CV ; & leurs moments ou forces ſur le bras CD, ſeroient encore comme S×CT, R×CV ; c'eſt-à-dire qu'ils feroient le même effort ſur CD, que s'ils étoient en T & en V. Après quoi on prouveroit, comme auparavant, que les poids tranſportés en H, auroient la même force que s'ils étoient en T & en V, ou en S & en R.

251. PROBLÊME. *Pluſieurs corps A, B, C, D, étant ſur un plan horizontal, trouver leur centre d'équilibre commun* (Fig. 83).

SOLUTION. Je mene la ligne AB, que je conſidere comme un levier auquel ſont attachés les deux poids A, B : je cherche ſur ce levier le centre d'équilibre E de ces deux corps. Je mene du point E au poids C la droite EC, que je conſidere comme un levier auquel ſeroient attachés en E les deux poids A & B, & en C le poids C : je cherche ſur le levier EC le centre d'équilibre H des deux poids A, B, mis enſemble en E, & du poids C mis en C. Du point H je mene au poids D la droite HD, que je regarde comme un levier auquel les trois poids A, B, C, ſeroient attachés en H, & le poids D en D : & cherchant ſur ce levier le centre d'équilibre L, des trois poids A, B, C, mis en H, & du poids D mis en D ; je dis que le point L eſt le centre d'équilibre de tous les corps mis chacun en leur place.

Car ſi nous ſuppoſons que les trois leviers AB, EC, HD, ſoient attachés fixement aux points E, H ; les deux corps A, B, étant

en équilibre autour du point E, peſeront autant ſur le bras EH du levier EC, que s'ils étoient tranſportés tous deux en E (249). De même les deux poids A, B, tranſportés enſemble en E ſur le levier EC, ſont en équilibre autour du point H avec le poids C : donc les deux poids A, B, mis au point E, & le poids C mis en C, peſent autant ſur le bras HL du levier HD, que s'ils étoient tous les trois mis en H.

Or, par la conſtruction, les trois poids mis en H, & le poids D mis en D, ſont en équilibre autour du point L : donc ſi on remet tous les poids chacun en leur place, ils ſeront encore en équilibre autour du point L, puiſqu'ils ne peſeroient ni plus ni moins ſur le bras HL.

PROPOSITION XLIII.

252. *Si pluſieurs corps A, B, C, D, mis ſur un plan horizontal, tournent autour d'un axe de mouvement MN auſſi horizontal, en conſervant toujours leurs diſtances AM, BR, CP, DN, à cet axe :*

Je dis que la ſomme de leurs moments ou de leurs forces, eſt égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tous tranſportés à leur contre d'équilibre commun L, & qu'ils tournaſſent autour de l'axe MN, en conſervant toujours la diſtance LX de ce centre à l'axe de mouvement (Fig. 84).

DÉMONSTRATION. Je mene la droite AB : & cherchant ſur cette ligne conſidérée comme un levier, le centre E d'équilibre des corps A, B ; je mene du point E la droite ES perpendiculaire à l'axe de mouvement ; & des points A, B, les droites AT, BV, perpendiculaires ſur ES prolongé en V. Les corps A, B, en tournant autour de MN, décrivent des circonférences dont les rayons ſont AM, BR : ainſi leurs vîteſſes ſont comme les rayons ou les leviers AM, BR. Mais AM=TS, à cauſe des paralleles, & BR=SV : donc les vîteſſes des corps A, B, ſont comme les droites TS, SV ; & par conſéquent leurs moments ſont comme A×TS, B×VS : c'eſt-à-dire que leurs moments ſont les mêmes que s'ils étoient mis en T & en V.

Or, à cauſe que les corps A, B, ſont en équilibre autour du point E, nous avons B. A :: AE. EB (243) : & à cauſe des triangles ſemblables AET, EBV, nous avons AE. EB :: TE. EV ; & partant, B. A :: TE. EV : ce qui donne A×TE=B×EV. Mais A×TE eſt le moment ou la force que le corps A mis en T gagneroit ſi on le mettoit en E : car alors ſon moment ſeroit A×SE=A×TS+A×TE.

TE. De même B×EV eſt le moment ou la force que le corps B mis en V perdroit, s'il étoit tranſporté en E ; car alors ſon moment ſeroit B×ES=B×VS—B×EV.

Donc, puiſque les corps mis en T & V auroient les mêmes forces qu'en A & en B ; & qu'en les tranſportant tous les deux en E, le gain de force de l'un ſeroit égal à la perte de l'autre ; il eſt clair que ces deux corps mis en E, auroient autant de force que s'ils étoient en leurs places A & B ; & que par conſéquent on aura A×ES+B×ES=A×AM+B×BR.

Concevant donc que ces deux corps A & B ſoient mis en E, je mene la droite EC ; & cherchant ſur ce levier le centre d'équilibre H des deux corps A & B mis en E, & du corps C, je prouverai comme ci-deſſus, que les forces de ces trois corps, en tournant autour de MN, ſont égales à la force qu'ils auroient s'ils étoient mis enſemble au point H.

Et menant du point H la droite HD, puis cherchant ſur ce levier le centre d'équilibre L des trois corps A, B, C, mis en H, & du corps D ; je prouverai encore que les quatre corps mis en L, auront autant de force en tournant autour de MN, que les trois corps A, B, C, mis en H, & le corps D en D. Or les trois corps A, B, C, mis en H, ont la même force que ſi les deux A, B, étoient en E, & le corps C en C, comme on vient de voir : & les deux A, B, en ont autant en E que s'ils étoient en A & B : donc les quatre corps mis en L en ont autant que s'ils étoient en leurs places.

253. COROLLAIRE. De là il ſuit que *ſi l'on multiplie les quatre corps A, B, C, D, chacun par ſa diſtance AM, BR, CP, DN ; la ſomme des produits ſera égale à la ſomme des quatre corps multipliée par la diſtance LX du centre de gravité :* c'eſt-à-dire qu'on aura A×AM+B×BR+C×CP+D×DN=A×LX+B×LX+C×LX+D×LX.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A LA GÉOMÉTRIE.

254. Ce que nous venons de dire touchant l'équilibre des corps, a donné occaſion au Pere Guldin Jéſuite d'inventer une méthode générale & fort commode pour trouver la ſolidité de tous les corps qui ſont formés par la circonvolution d'un plan autour d'un axe de mouvement, & la meſure de leurs ſurfaces : & de là on tire auſſi la maniere de meſurer les priſmes tronqués par des plans inclinés à leurs baſes, de quelque figure que ſoient ces baſes, & de trouver

la valeur de leurs ſurfaces. C'eſt ce que nous allons voir dans les Propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION XLIV.

255. *Si une ligne AB tourne autour d'un axe MN de mouvement, dans quelque poſition qu'elle ſoit, pourvu qu'elle ſoit horizontale & l'axe auſſi, ou que l'un & l'autre ſoient dans un même plan, lequel on pourra toujours conſidérer comme horizontal; je dis que le plan ou la ſurface que cette ligne décrira en faiſant une circonvolution entiere, eſt égal au produit de la ligne AB multipliée par la circonférence que décrit ſon centre de gravité C* (Fig. 85, 86, 87, 88).

Démonstration. Concevons que la ligne AB ſoit un levier chargé dans tous ſes points de poids tous égaux. Il eſt clair que le centre d'équilibre de ces points ſera ſur le milieu C de la ligne, puiſqu'il n'y en aura pas plus d'un côté que de l'autre. Or tous ces poids, en tournant autour de l'axe de mouvement MN, décriront des circonférences dont les rayons ſeront les perpendiculaires tirées de chacun des poids ſur MN : ainſi les vîteſſes de ces poids ſeront entre elles comme les circonférences décrites, & leurs moments ou forces ſeront le produits des poids par leur vîteſſe ou par les circonférences qu'ils décrivent. Mais la ſomme de ces moments ou produits eſt égale au moment que tous les corps auroient s'ils étoient tranſportés en C, & qu'ils tournaſſent autour de MN, comme on a vu ci-deſſus; auquel cas ce moment n'eſt autre choſe que le produit de la ſomme des poids multipliée par la vîteſſe commune, c'eſt-à-dire par la circonférence décrite par le point C : donc la ſomme des produits des poids multipliés chacun par la circonférence qu'il décrit en ſa place, eſt égale au produit de la ſomme des poids multipliée par la circonférence qu'ils décriroient s'ils étoient mis chacun en C.

Or les points qui compoſent la ligne AB, ſont entre eux comme les poids, puiſqu'ils ſont tous égaux : donc la ſomme des produits de ces points par les circonférences qu'ils décrivent, ce qui n'eſt autre choſe que la ſomme de ces circonférences, eſt égale à la ſomme des points multipliée par la circonférence que le point C décrit : ce qui n'eſt autre choſe que la ligne AB multipliée par la circonférence que le point C décrit, puiſque la ſomme des points de la ligne AB eſt la même choſe que la ligne AB. Mais la ſomme des circonférences décrites par tous les points chacun en ſa place, eſt

le plan ou la ſurface AB décrite autour de MN : donc ce plan ou cette ſurface eſt égal au produit de la ligne AB multipliée par la circonférence que ſon centre de gravité C décrit.

256. REMARQUE. Ceci s'accorde fort bien avec ce que la Géométrie nous enſeigne. Car,

Si la ligne AB eſt perpendiculaire ſur l'axe de mouvement MN (*Fig.* 85), elle décrit un cercle ; & nous ſavons qu'un cercle eſt égal à la circonférence que décrit ſon rayon AB multipliée par la moitié du rayon, ou à la circonférence que décrit la moitié AC de ſon rayon multipliée par le rayon AB.

Si AB eſt oblique ſur MN, & le coupe en A (*Fig.* 86), elle décrit la ſurface d'un cône ; & nous ſavons que cette ſurface eſt égale au côté AB du cône multiplié par la circonférence moyenne décrite par la droite CX.

Si AB eſt oblique à AM ſans le couper (*Fig.* 87), elle décrira la ſurface d'un cône tronqué ; & nous ſavons que cette ſurface eſt égale au côté AB du cône tronqué multiplié par la circonférence décrite par le rayon moyen CX.

Enfin ſi AB eſt parallele à MN, elle décrit la ſurface d'un cylindre ; & nous ſavons que cette ſurface eſt égale à la hauteur AB du cylindre multipliée par la circonférence du rayon BN ou ſon égal CX.

PROPOSITION XLV.

257. *Si pluſieurs lignes AB, BC, CD, tournent autour d'un axe de mouvement MN ; je dis que la ſurface qu'elles décriront en faiſant une circonvolution entiere, eſt égale au produit de la ſomme des lignes multipliée par la circonférence que leur centre de gravité décrira autour de l'axe de mouvement* (Fig. 89).

DÉMONSTRATION. Concevons que les lignes AB, BC, CD, ſoient trois leviers chargés de poids égaux dans tous leurs points. Il eſt clair que le centre d'équilibre des poids qui ſont ſur le levier AB, ſera ſur le point de milieu H ; & que par conſéquent la ſomme des forces de tous ces poids en tournant autour de MN, ſera égale à la ſomme qu'ils auroient s'ils étoient tous tranſportés en H, & qu'ils tournaſſent autour de MN. Par la même raiſon, la ſomme des forces des poids qui ſont ſur le levier BC, ſera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tranſportés à leur centre E d'équilibre ſur ce levier ; & la ſomme des forces des poids qui ſont ſur le

levier CD ſera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tranſportés à leur centre F d'équilibre ſur ce levier.

Concevant donc que tous les poids qui ſont ſur le levier AB ſoient tranſportés en H, & que ceux qui ſont ſur le levier BC ſoient tranſportés en E, & menant la ligne HE ; la force de ces poids mis les uns en H & les autres en E, ſera égale à celle qu'ils auroient s'ils étoient tous tranſportés à leur centre d'équilibre R ſur le levier HE : & par un ſemblable raiſonnement on trouvera que tous les poids des leviers AB, BC, étant tranſportés en R, & tous les poids du levier CD étant tranſportés à leur centre F d'équilibre ſur ce levier ; la ſomme des forces des poids mis en R & en F ſera égale à celle que tous les poids auroient s'ils étoient tranſportés au point P qui eſt leur centre d'équilibre commun. Ainſi tous les poids tranſportés en leurs premieres places, auroient autant de force en tournant autour de MN, que ſi on les tranſportoit tous en P, & qu'on les fît tourner autour de MN.

Mais la ſomme des forces des corps mis en leur place, eſt la ſomme des produits de chaque corps par ſa vîteſſe ou par la circonférence qu'il décrit ; & la force des poids tranſportés en P eſt la ſomme des produits de tous les poids multipliés par la circonférence que décrit le centre commun d'équilibre P : donc la ſomme des produits des poids par les circonférences qu'ils décrivent chacun en leur place, eſt égale à la ſomme des poids multipliée par la circonférence que décrit le centre d'équilibre commun P autour de l'axe de mouvement MN.

Or les points qui compoſent les trois lignes AB, BC, CD, ſont entre eux comme les poids, puiſqu'ils ſont tous égaux entre eux : donc la ſomme des produits de ces points par les circonférences qu'ils décrivent chacun en ſa place, ce qui n'eſt autre choſe que la ſomme même des circonférences, eſt égale à la ſomme des points, c'eſt-à-dire aux trois lignes AB, BC, CD, multipliées par la circonférence que décrit le centre de gravité commun P.

258. COROLLAIRE. Il ſuit de là que *ſi un plan ABCD tourne autour de l'un de ſes côtés AD, & fait une révolution entiere* (Fig. 89) ; on connoîtra la ſurface du ſolide qu'il décrira, en multipliant les trois lignes AB, BC, CD, par la circonférence que leur centre de gravité P décrit autour de AD.

Et *ſi un plan ABCD* (Fig. 90) *tourne autour d'un axe MN qui n'eſt aucun des côtés de la Figure*, on connoîtra la ſurface du ſo-

lide décrit par la circonvolution entiere, en multipliant les quatre lignes AB, BC, CD, AD, par la circonférence que décrit leur centre de gravité autour de MN.

La différence qui ſe trouve entre la Figure 89 & la Figure 90, c'eſt que dans la premiere le côté AD étant l'axe de mouvement, ne décrit aucune ſurface; & que par conſéquent la ſurface du ſolide décrit par la circonvolution de la Figure, n'eſt compoſée que des trois ſurfaces que décrivent les trois autres lignes: au lieu que dans la Figure 90, toutes les quatre lignes AB, BC, CD, AD, décrivent des ſurfaces qui appartiennent au ſolide, lequel ſe trouve avoir un vuide dans le milieu.

PROPOSITION XLVI.

259. *Si un plan ABCD tourne autour d'un axe de mouvement MN, le ſolide produit par une circonvolution entiere eſt égal au produit de ce plan multiplié par la circonférence que ſon centre de gravité décrit autour de l'axe de mouvement* (Fig. 91).

DÉMONSTRATION. Le plan ABCD n'eſt autre choſe que la ſomme de ſes éléments BC, RS, &c. Concevant donc que chacun de ces éléments ou lignes BC, RS, &c, ſoit un levier chargé de poids égaux dans toutes ſes parties; la force des poids du levier BC, en tournant autour de MN, ſera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient tous tranſportés à leur centre d'équilibre H ſur ce levier. Ainſi la ſomme des poids multipliés par la circonférence que H décrit autour de MN, ſera égale à la ſomme des poids multipliés chacun par la circonférence qu'ils décrivent chacun à leur place: & à cauſe que les points de la ligne BC ſont entre eux comme les poids, nous trouverons que la ſomme des points multipliés par la circonférence que décrit le point H, c'eſt-à-dire la ligne BC multipliée par cette circonférence, eſt égale à la ſomme des mêmes points multipliés par les circonférences qu'ils décrivent chacun en leur place, c'eſt-à-dire à la ſomme des circonférences, & par conſéquent à la ſurface que la ligne BC décrit en tournant autour de MN.

Par la même raiſon, la ſomme des forces des poids qui ſont ſur la ligne RS, ſera égale à la force qu'ils auroient s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre L ſur cette ligne; & la ligne RS, multipliée par la circonférence que le point L décrit autour de MN, ſera égale à la ſurface compoſée de toutes les circonférences que ſes points décriront, c'eſt-à-dire à la ſurface que la ligne RS décrira en tournant autour de MN: & ainſi des autres.

Suppoſant donc que tous les poids qui ſont ſur BC, ne fuſſent qu'un ſeul poids mis en H, que tous ceux qui ſont ſur RS, ne fuſſent qu'un ſeul poids mis en L, & ainſi de ſuite; tous les poids H, L, F, &c, ſeront entre eux comme les lignes BC, RS, PQ, &c, puiſque la ſomme des poids mis en H, ſera égale à la ſomme des poids de la ligne BC, de même que la ligne BC eſt égale à la ſomme de ſes points; que le poids mis en L ſera égal à la ſomme des poids de la ligne RS, de même que la ligne RS eſt égale à la ſomme de ſes points: & ainſi de ſuite.

Or les poids mis en H, L, F, &c, auront un centre d'équilibre que je ſuppoſe être le point X: ainſi la ſomme des poids H, L, F, &c, multipliée par la circonférence que le point X décrit autour de MN, ſera égale à la ſomme des produits des mêmes poids par les circonférences qu'ils décrivent en leurs places H, L, F, &c. Ainſi, à cauſe que les lignes BC, RS, PQ, &c, ſont en même raiſon que les poids H, L, F, &c; la ſomme de ces lignes multipliée par la circonférence que le point X décrit, ſera égale à la ſomme des mêmes lignes multipliées par les circonférences que les points H, L, F, &c, décrivent. Or, la ſomme des lignes n'eſt autre choſe que le plan ABCD; & la ſomme des lignes multipliées par les circonférences que les points H, L, F, &c, décrivent, n'eſt autre choſe que la ſomme des ſurfaces que ces lignes décrivent autour de MN: donc le plan ABCD, multiplié par la circonférence que décrit le point X, eſt égal à la ſomme des ſurfaces décrites par ſes éléments, c'eſt-à-dire, au ſolide que le plan ABCD décrit en tournant autour de MN.

260. COROLLAIRE I. *Si le plan ABCD ne faiſoit que la moitié, le tiers, ou le quart, &c, de ſa circonvolution, le ſolide décrit ne ſeroit que la moitié, le tiers, ou le quart du produit du plan ABCD multiplié par la circonférence que X décriroit dans une circonvolution entiere* (Fig. 91).

DÉMONSTRATION. Les poids mis ſur tous les points des lignes BC, RS, &c, ne décriroient que la moitié, le tiers, ou le quart de leurs circonférences; de même que leurs centres d'équilibre H, L, F, &c, ſur ces lignes: de façon que tous les poids de la ligne BC, multipliés par la moitié, le tiers, ou le quart de leurs circonférences, ſeroient égaux à la ſomme des poids mis au centre H d'équilibre multiplié par la moitié, le tiers, ou le quart de la circonférence que le point H décriroit. Par conſéquent la ligne BC, multipliée par la moitié, le tiers, ou le quart de la circonférence décrite par H, ſe-

roit égale à la ſomme des produits de ſes points multipliés par la moitié, le tiers, ou le quart de leurs circonférences; c'eſt-à-dire, à la moitié, au tiers, ou au quart de la ſomme des circonférences, ou de la ſurface que la ligne BC décriroit: & la même choſe arriveroit à l'égard des autres lignes.

D'où il eſt aiſé de conclure que la ſomme des lignes, c'eſt-à-dire le plan ABCD multiplié par la moitié, le tiers, ou le quart de la circonférence que leur centre commun de gravité X décriroit autour de MN, ſeroit égale à la ſomme des produits des mêmes lignes multipliées chacune par la moitié, le tiers, ou le quart des circonférences que leurs centres particuliers de gravité H, L, F, &c, décriroient.

261. COROLLAIRE II. Il ſuit de là que *ſi l'on connoît la valeur d'un plan ABCD qui tourne autour d'un axe de mouvement MN, & la diſtance de ſon centre de gravité X à l'axe de mouvement*; on connoîtra toujours non ſeulement le ſolide que ce plan décrit pendant une circonvolution entiere, mais encore celui qu'il décrit pendant la moitié, le tiers, le quart, &c, de ſa circonvolution. Car la diſtance du point X à l'axe MN étant connue, on peut aiſément connoître la circonférence que ce point décrit.

PROPOSITION XLVII.

262. *Si un ſolide ABCDEF eſt décrit par la circonvolution d'un plan ABCD autour d'un axe de mouvement MN, on peut toujours trouver un priſme tronqué dont la baſe ſoit égale & ſemblable au plan ABCD, & qui ſoit égal au plan ABCDEF* (Fig. 92).

DÉMONSTRATION. I°. Je prends une baſe *abcd*, égale & ſemblable au plan ABCD: ainſi ſi cette baſe tournoit autour de la ligne *mn* ſemblablement poſée à l'égard de ce plan, comme MN l'eſt à l'égard du plan ABCD; elle décriroit un ſolide égal & ſemblable au ſolide ABCDEF. Menant dans la baſe *abcd* les éléments *ba*, *gf*, *hi*, &c, perpendiculaires ſur *mn*, j'obſerve que ceux de ces éléments qui iroient aboutir à la droite *mn* décriroient des cercles en tournant autour de cette ligne: que ceux, tels que *pq*, qui n'aboutiroient pas ſur *mn*, décriroient des couronnes; car prolongeant *pq* en *r*, la droite *pr* décriroit un cercle duquel il faudroit retrancher le cercle décrit par la partie *qr* extérieure; ce qui donneroit la couronne décrite par *pq*, & ainſi des autres: & qu'enfin

le ſolide décrit par la circonvolution du plan *abcd*, ſeroit égal à la ſomme des cercles & des couronnes que les éléments de ce plan décriroient autour de *mn*.

II°. Maintenant je laiſſe le plan *abcd* immobile dans ſa poſition horizontale; & ſur l'élément *ba* j'éleve perpendiculairement au plan un triangle rectangle *ab*P, dont la baſe eſt l'élément *ba*, & la hauteur *b*P eſt égale à la circonférence que l'élément *ba* décriroit en tournant autour de *mn*. Ainſi le triangle *ab*P eſt égal au cercle que l'élément *ba* décriroit : car on ſait qu'un triangle rectangle, dont l'un des deux côtés perpendiculaires eſt égal au rayon d'un cercle, & l'autre eſt égal à la circonférence, on ſait, dis-je, qu'un tel triangle eſt égal au cercle. Je fais la même choſe ſur *ef*, *hi*, &c, qui aboutiſſent à la ligne *mn*; & par conſéquent j'ai autant de triangles rectangles que ces éléments décrivent de cercles, & chaque triangle eſt égal au cercle correſpondant.

III°. Quant aux éléments tels que *pq* qui n'aboutiſſent point ſur *mn*, je les prolonge juſqu'à ce qu'ils coupent *mn*. Je conſtruis ſur *pr* un triangle rectangle *prt* ayant pour baſe *pr*, & pour hauteur la circonférence que *rp* décriroit autour de *mn*; & ſur la partie extérieure *qr*, un triangle rectangle *qrſ* ayant pour baſe *qr*, & pour hauteur la circonférence que *qr* décriroit autour de *mn*. Ainſi les triangles *ptr*, *qrſ*, étant ſemblables, à cauſe que leurs baſes ſont à leurs hauteurs comme le rayon du cercle eſt à la circonférence; l'hypothénuſe *ſr* du triangle *qſr* ſera partie de l'hypothénuſe *tr* du triangle *tpr*: & par conſéquent, du triangle *tpr* égal au cercle que *pr* décriroit, retranchant le triangle *qſr* égal au cercle que *qr* décriroit, le trapézoïde reſtant *ptſq* eſt égal à la couronne que *pq* décriroit autour de *mn*; & faiſant la même choſe à l'égard des autres éléments, tels que *pq*, j'aurai autant de trapézoïdes que ces éléments décriroient de couronnes, & chaque trapézoïde ſera égal à chaque couronne.

IV°. Puis donc que le ſolide décrit par la circonvolution de ABCD autour de MN, n'eſt autre choſe que la ſomme des cercles & des couronnes que ces éléments décrivent autour de MN; & que la ſomme des triangles rectangles & des trapézoïdes faits ſur les éléments de *abcd* ou ABCD, eſt égale à la ſomme des cercles & des couronnes; il s'enſuit que le ſolide formé par les cercles & les couronnes, eſt égal au ſolide formé par les triangles & les trapézoïdes. Mais le ſolide formé par les triangles & les trapézoïdes, eſt un priſme tronqué, dont la baſe eſt égale au plan ABCD : car les hauteurs des triangles & des trapézoïdes étant perpendiculaires

autour

autour du circuit *abcd*, forment une ſurface priſmatique ; & les hypothénuſes P*a*, *og*, &c, des triangles rectangles, jointes aux parties d'hypothénuſes *tf* des trapézoïdes, étant également inclinées ſur la baſe *abcd*, à cauſe que tous les triangles ſont ſemblables, forment un plan qui tronque obliquement la ſurface priſmatique. Donc le ſolide décrit par la circonvolution du plan autour de MN, eſt égal à un priſme fait ſur la baſe *abcd*.

V°. Si le plan ABCD (*Fig.* 93) tournoit autour d'un axe MN éloigné de ſa baſe ; alors tous les éléments *fc*, *hd*, &c, du plan *abcd*, décriroient en tournant autour de *mn*, des couronnes : & mettant au lieu des couronnes, des trapézoïdes égaux à ces couronnes & perpendiculaires aux éléments, on auroit un priſme tronqué *abcdrgpn*, égal au ſolide décrit par la circonvolution du plan *abcd* autour de *mn*, mais dont le plan incliné tronqueroit obliquement tous les côtés du priſme, & ne paſſeroit point par l'extrémité de la baſe comme le précédent.

PROPOSITION XLVIII.

263. *Tout priſme droit, tronqué par un plan incliné, eſt ou égal au ſolide que ſa baſe décriroit en tournant autour de la ligne par laquelle le plan incliné coupe la baſe prolongée s'il le faut ; ou il eſt moindre, ou il eſt plus grand* (Fig. 94).

Démonstration. Soit le priſme ABCDQP, tronqué par le plan PQDA qui paſſe par le côté AD de ſa baſe ABCD. Je mene dans la baſe du plan les éléments BA, *fg*, &c, perpendiculaires ſur le côté AD, autour duquel je conçois que la baſe ABCD tourne. Ainſi tous les éléments de cette baſe décriront des cercles & des couronnes, s'il s'en trouve quelques-uns qui n'aboutiſſent pas à l'axe de mouvement *mn*. Mettant donc, au lieu des cercles & des couronnes, des triangles rectangles & des trapézoïdes égaux aux cercles & aux couronnes, j'aurai un priſme tronqué par un plan oblique qui paſſera par *mn*.

Or, ſi ce plan, formé par les hypothénuſes & parties d'hypothénuſes, eſt autant incliné ſur la baſe ABCD que le plan PADQ ; ces deux plans n'en feront qu'un ; & le priſme formé par les triangles & les trapézoïdes, ſera égal au priſme ABCDQP.

Si ce plan eſt plus incliné que le plan PADQ, tel qu'eſt le plan RADS, le priſme ABCDSR, formé par les triangles & les trapézoïdes, ſera moindre que le priſme ABCDQP : ce qui eſt évident.

Si ce plan eſt moins incliné que le plan ADQP, il eſt encore

clair que le priſme formé par les triangles & les trapézoïdes, ſera plus grand que le priſme ABCDQP.

Et l'on doit dire la même choſe, ſi le plan incliné PQHV (*Fig.* 95) du priſme tronqué ABCDVQPH, coupoit la baſe prolongée en une ligne MN: ce qui n'a pas beſoin de démonſtration.

PROPOSITION XLIX.

264. *Tout priſme droit, tronqué par un plan oblique à l'horizon, eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par la perpendiculaire élevée ſur le centre de gravité de cette baſe, & compriſe entre la baſe & le plan tronquant* (Fig. 96).

Démonstration. Soit le priſme ABCDQP, tronqué par un plan incliné PQDA, qui paſſe par le côté AD de ſa baſe, & dont je ſuppoſe que le centre de gravité de la baſe ABCD ſoit le point X.

I°. Si ce priſme eſt égal au ſolide que ſa baſe décriroit en tournant autour de AC, tous les triangles & les trapézoïdes élevés perpendiculairement ſur les éléments de ſa baſe perpendiculaire à AD, ſeront égaux chacun à chacun aux cercles & couronnes que ces éléments décriroient en tournant autour de AD; & toutes les hauteurs de ces triangles ſeront égales aux circonférences des cercles & des couronnes chacune à chacune; & le triangle rectangle ZXO, élevé perpendiculairement ſur la diſtance XO du centre de gravité à l'axe à AD, étant ſemblable aux autres triangles, ſera auſſi égal au cercle que XO décriroit, & ſa hauteur XZ égale à la circonférence de ce cercle. Or, le ſolide décrit par la circonvolution de la baſe, c'eſt-à-dire, la ſomme des cercles & des couronnes décrites par les éléments de la baſe, ſeroit égale à la baſe multipliée par la circonférence de XO, c'eſt-à-dire par la circonférence que le centre X décriroit: donc la ſomme des triangles & des trapézoïdes, c'eſt-à-dire le priſme, doit être auſſi égale à la même baſe multipliée par la droite XZ égale à la circonférence que X décriroit, c'eſt-à-dire, par la perpendiculaire élevée ſur le centre de gravité X, & compriſe entre la baſe & le plan incliné.

II°. Si le priſme ABCDQP eſt moindre que le ſolide que ſa baſe décriroit en tournant autour de AD, il ne ſera pas moins vrai que tous les triangles PAB, *ofg*, &c, dont il eſt compoſé, ſeront ſemblables, à cauſe que le plan incliné fait par-tout un même angle avec la baſe. Ainſi l'on auroit PB. BA :: *of*. *fg*: c'eſt-à-dire que ſi la hauteur PB de l'un n'eſt, par exemple, que la moitié de la circonférence que ſa baſe BA décriroit; la hauteur *of* de l'autre n'eſt auſſi

que la moitié de la circonférence que ſa baſe *fg* décriroit; & ainſi des autres. D'où il ſuit que tous les triangles rectangles qu'on feroit ſur les mêmes baſes BA, *gf*, égaux aux cercles que ces baſes décriroient, auroient les hauteurs doubles des hauteurs BP, *of*, &c; & ſeroient par conſéquent doubles des triangles BPA, *ofg*, dont le priſme eſt compoſé en partie.

III°. Quant aux trapézoïdes que le priſme comprend, tels que le trapézoïde *ſnrt*; il eſt clair que ce trapézoïde n'étant autre choſe que le triangle *nſu*, moins le triangle *rtu*, ne doit être auſſi que la moitié de la couronne que l'élément *ſt* décriroit en tournant autour de AD. Car le triangle *nſu* n'ayant que la moitié de la hauteur de celui qui ſeroit fait ſur la même baſe *ſu*, & qui ſeroit égal au cercle que *ſu* décriroit autour de AD, n'eſt auſſi que la moitié de ce cercle: & par la même raiſon, le triangle *rtu* n'eſt que la moitié de celui qui ſeroit fait ſur la même baſe *tu*, & qui ſeroit égal au cercle que *tu* décriroit. Ainſi le trapézoïde *nrts*, c'eſt-à-dire le triangle *nſu* moins le triangle *rtu*, ne doit être que la moitié du trapézoïde qu'on auroit en retranchant du triangle égal au cercle de *ſu*, le triangle égal au cercle de *tu*. Enfin dans le triangle XZO, fait ſur la diſtance XO du centre X de gravité à l'axe AD de mouvement; la hauteur XZ n'eſt auſſi que la moitié de la circonférence que XO décriroit.

IV°. Puis donc que tous les triangles & les trapézoïdes du priſme ABCDPQ, ne ſont que les moitiés des cercles & des couronnes qui compoſeroient le ſolide formé par la circonvolution de la baſe, ſelon la ſuppoſition que nous avons faite; il s'enſuit que le priſme ne doit être que la moitié de ce ſolide. Or, le ſolide fait par la circonvolution de la baſe eſt égal au produit de la baſe par la circonférence que X décriroit: donc notre priſme doit être égal au produit de la baſe par la moitié de cette circonférence, & par conſéquent par la perpendiculaire XZ élevée ſur le centre de gravité, & compriſe entre la baſe & le plan incliné.

V°. On prouvera aiſément la même choſe, ſi le priſme BADCQP eſt plus grand que le ſolide que ſa baſe décriroit en tournant autour de AD.

La même choſe ſe prouvera encore, ſi le plan incliné du priſme coupoit tous les côtés du priſme, & ne rencontroit la baſe qu'après l'avoir prolongée en MN (*Fig.* 95).

PROPOSITION L.

265. *La ſurface d'un priſme tronqué eſt égale à la ſomme des lignes qui ſervent de baſes aux parties de cette ſurface, multipliée par la perpendiculaire élevée ſur le centre commun d'équilibre de ces lignes, & compriſe entre la baſe & le plan incliné* (Fig. 97).

DÉMONSTRATION. Soit le priſme tronqué ABCDQP, dont les lignes AB, BC, CD, ſervent de baſe à la ſurface : car la ligne AD n'en ſoutient aucune partie, puiſque le plan incliné paſſe par cette ligne. Suppoſons auſſi que le centre de gravité commun aux trois lignes AB, BC, CD, ſoit le point X, lequel eſt différent du centre de gravité de la baſe ABCD. Le priſme ABCDQP eſt ou égal, ou moindre, ou plus grand que le ſolide que ſa baſe décriroit en tournant autour de AD.

I°. Suppoſons-le d'abord égal : ſa ſurface n'eſt autre choſe que la ſomme des lignes droites élevées perpendiculairement ſur la baſe, de tous les points des lignes AB, BC, CD, & terminées au plan incliné qui tronque le priſme ; & ces lignes droites ſont égales chacune à chacune aux circonférences que ces points décriroient en tournant autour de AD. Car menant de ces points B, *f*, &c, des droites BA, *fg*, &c, perpendiculaires ſur AD ; & des points A, *g*, &c, des droites AP, *go*, &c, qui ſe terminent aux extrémités P, *o*, des perpendiculaires, & qui, par conſéquent, ſeront ſur le plan incliné APQD ; les triangles ſemblables BPA, *gfo*, &c, ſeront égaux aux cercles que leurs baſes BP, *fg*, &c, décriroient ; & les droites BP, *fo*, &c, égales aux circonférences ; & ainſi des autres. Ainſi la ſurface du priſme eſt compoſée d'autant de lignes droites qu'il y a de circonférences qui compoſeroient la ſurface du ſolide décrit par la circonvolution de la baſe ; & chaque ligne droite étant égale à chaque circonférence, la ſurface du priſme eſt égale à la ſurface du ſolide décrit par la circonvolution de la baſe. Mais la ſurface de ce ſolide eſt égale à la ſomme des lignes AB, BC, CD, multipliées par la circonférence que leur centre de gravité X décriroit : donc la ſurface du priſme eſt égale à la ſomme des mêmes lignes multipliées par la hauteur XZ égale à la circonférence que X décriroit ; à cauſe que dans le triangle rectangle ZXO, ſemblable aux autres triangles PBA, &c, la hauteur eſt égale à la circonférence dont la baſe XO ſeroit le rayon.

II°. Maintenant ſi le priſme eſt moindre que le ſolide produit par la circonvolution de la baſe ; le plan incliné PQDA eſt par

conſéquent plus incliné ſur la baſe que le plan incliné du priſme qui ſeroit égal au ſolide produit par la circonvolution de la baſe: & à cauſe que tous les triangles rectangles BPO, *ofg*, XZO, &c, ſont tous ſemblables; leurs hauteurs BP, *fo*, XZ, &c, auront toutes même rapport à leurs baſes BA, *fg*, XO, &c. Suppoſant donc que la hauteur BP ne ſoit que la moitié de la circonférence que la baſe BA décriroit; toutes les autres hauteurs ne ſont auſſi que la moitié des circonférences de leurs baſes; & partant la ſurface du priſme eſt égale à la moitié de la ſurface du ſolide décrit par la circonvolution de la baſe. Or, la ſurface de ce ſolide eſt égale à la ſomme des lignes AB, BC, CD, par la circonférence que leur centre de gravité X décrit: donc la ſurface du priſme doit être égale à la ſomme des mêmes lignes multipliée par la droite XZ, laquelle, dans la ſuppoſition que nous avons faite, n'eſt que la moitié de la circonférence décrite par le point X.

III°. Et on prouveroit la même choſe, ſi le priſme étoit plus grand que le ſolide décrit par la circonvolution.

Si le plan incliné PSRQ (Fig. 98) du priſme ABCDRSPQ, coupoit tous les côtés du priſme avant de couper la baſe en MN; alors les quatre lignes AB, BC, CD, DA, ſoutiendroient chacune une portion de la ſurface; & l'on prouveroit, comme ci-deſſus, que la ſurface du priſme eſt égale à la ſomme de ces quatre lignes multipliée par la perpendiculaire élevée ſur le centre de gravité commun X, & compriſe entre la baſe & le plan incliné.

REMARQUE. La ſurface d'un priſme tronqué étant trouvée, ſi on lui ajoute la baſe & le plan incliné, on aura la ſurface totale.

PROPOSITION LI.

266. *Tout priſme incliné ABCDEH, & tronqué par un plan incliné à ſa baſe, eſt égal à un priſme droit de même baſe, & dont toutes les hauteurs ſeroient égales chacune à chacune à toutes les hauteurs du priſme incliné* (Fig. 99).

DÉMONSTRATION. Je prends un plan *abcd*, égal & ſemblable au plan ABCD. De la baſe j'éleve en *b* une droite *bh*, perpendiculaire ſur le plan *abcd*, & égale à la hauteur AY de l'arête BH, c'eſt-à-dire à la perpendiculaire menée du point H ſur la baſe ABCD prolongée: j'éleve de même en *c* la droite *ce*, perpendiculaire ſur le plan *abcd*, & égale à la hauteur EZ de l'arête CE; & menant les droites *ha*, *ed*, j'ai un priſme droit tronqué *abcdeh*,

qui eſt égal au priſme incliné tronqué ABCDEH. Ce que je prouve ainſi.

I°. Je mene dans les deux baſes ABCD, *abcd*, les éléments AB, RQ, &c, *ab*, *rq*, &c, perpendiculaires ſur les côtés égaux AD, *ad*, par leſquels paſſent les plans inclinés AHED, *ahed*. Je conçois que ſur ces éléments ſoient élevés des plans perpendiculaires aux baſes ABCD, *abcd*.

Ceux de ces plans qui ſont ſur les éléments AB, RQ, &c, *ab*, *rq*, &c, qui aboutiſſent aux côtés égaux AD, *ad*, ſeront des triangles AHB, RPQ, &c, *ahb*, *rpq*, &c; & ceux qui ſeront ſur les éléments tels que TS, &c, *ts*, &c, qui n'aboutiſſent pas aux côtés égaux AD, *ad*, ſeront des trapézoïdes TXVS, &c, *txus*, &c: & dans l'un & l'autre priſme il y aura un même nombre de triangles & de trapézoïdes, dont les baſes AB, RQ, TS, &c, ſeront égales chacune à chacune aux baſes *ab*, *rq*, *ts*, &c.

II°. Maintenant les deux triangles AHB, *ahb*, ſont égaux, à cauſe de la baſe AB égale à la baſe *ab*, & de la hauteur HY égale à la hauteur *hb*. Or; le triangle AHB eſt ſemblable à tous les triangles RQP, &c, faits ſur les éléments RQ, &c, qui aboutiſſent ſur AD: & le triangle *ahb* eſt ſemblable à tous les triangles *rqp*, &c, faits ſur les éléments *rq*, &c, qui aboutiſſent ſur *ad*.

Comparant donc le triangle AHB avec l'un de ſes ſemblables RQP, du ſommet duquel nous abaiſſerons la perpendiculaire PL ſur le plan de la baſe ABCD pour avoir la hauteur de ce triangle; nous aurons AB. RQ :: HY. PL; c'eſt-à-dire, les baſes de ces triangles ſont entre elles comme les hauteurs. Comparant de même le triangle *ahb* avec ſon ſemblable *rqp*, dont la baſe *rq* eſt égale à la baſe du triangle RQP; nous aurons *ab. rq :: bh. pq*. Or *ab*=AB, & *rq*=RQ: donc AB. RQ :: *hb. pq*; & partant HY. PL :: *hb. pq*. Mais HY=*hb* : donc PL=*pq*; & par conſéquent le triangle RQP, & le triangle *rqp*, ſont égaux: puiſqu'ils ont les baſes RQ, *rq*, égales; & les hauteurs PL, *pq*, auſſi égales. Et la même choſe arrivera pour tous les autres triangles.

III°. Les trapézoïdes TXVS, &c, *txus*, &c, faits par les éléments TS, &c, *ts*, &c, qui n'aboutiſſent pas aux côtés égaux AD, *ad*, ne ſont autre choſe que les triangles NVS, *nus*, faits par les prolongements de leurs côtés non paralleles, moins les petits triangles NXT, *nxt* : c'eſt-à-dire TXVS=NVS—NTX; & *txus* =*nus*—*ntx*. Or, les triangles NVS, NTX, ſont ſemblables au triangle AHB; & les triangles *nus*, *ntx*, ſont ſemblables au triangle *ahb* : donc nous démontrerons comme auparavant, que NVS

$=nus$, NTX$=ntx$; & par conſéquent NVS—NTX$=nus-ntx$, ou TXVS$=txus$.

Donc puiſqu'il y a un même nombre de triangles & de trapézoïdes dans l'un & l'autre priſme, & que chaque triangle eſt égal à chaque triangle, & chaque trapézoïde à chaque trapézoïde ; les deux priſmes ſont parfaitement égaux.

267. REMARQUE I. De là on tire une maniere facile de meſurer les priſmes inclinés tronqués. Car puiſque le priſme incliné tronqué ABCDEF (*Fig.* 100) eſt égal au priſme droit tronqué *abcdef*, dont toutes les hauteurs ſont égales aux hauteurs du priſme incliné ; & que le priſme droit eſt égal au produit de ſa baſe par la perpendiculaire *xt* élevée ſur ſon centre de gravité, & compriſe entre les deux baſes ; le priſme incliné ſera égal au même produit. Or dans le priſme droit les triangles *bcf*, *rxt*, étant ſemblables ; on trouve la perpendiculaire *tx*, en faiſant *bc. cf :: rx. xt* : & *cf* eſt la même choſe que la hauteur FQ du triangle BCF du priſme incliné ; de même que *bc* eſt égal à BC, & *rx*=RX. Donc après avoir pris la baſe BC, & la hauteur FQ de l'un des triangles du priſme incliné ; il faut chercher une quatrieme proportionnelle à BC, FQ, & à la diſtance RX du centre de gravité X de la baſe au côté BA, par lequel paſſe le plan incliné : & cette quatrieme proportionnelle ſera la quantité par laquelle on multipliera la baſe ABCD, pour avoir la valeur du priſme tronqué.

268. REMARQUE II. Il faut prendre garde ici que quoique le priſme droit *abcdef* (*Fig.* 100) ſoit égal au priſme incliné ABCDEF ; cependant la ſurface du priſme droit n'eſt pas égale à la ſurface du priſme incliné, par la raiſon qu'il ſe trouve dans la ſurface du priſme incliné des plans inclinés qui ſont partie de ſa ſurface, & qui ne ſont pas égaux aux plans droits du priſme droit qui ſont partie de ſa ſurface ; & qu'ainſi on ne peut pas dire que la ſurface du priſme incliné eſt égale à la ſomme des lignes qui la ſoutiennent, multipliée par la perpendiculaire élevée ſur le centre de gravité de la baſe de cette ſurface, & compriſe entre la baſe & le plan incliné du priſme droit, de même qu'on le dit de la ſurface du priſme droit. C'eſt pourquoi, dans ce cas, il faut, pour avoir la ſurface du priſme incliné, chercher les valeurs de toutes ſes ſurfaces à part.

269. REMARQUE III. Tout ce que nous venons de dire fait voir de quelle fécondité eſt pour la Géométrie, la méthode des centres de gravité, puiſque par la connoiſſance d'un plan quelconque qui tourne autour d'un axe de mouvement, & de la circonférence que décrit ſon centre de gravité, on peut non ſeulement connoître

le ſolide que ce corps décrit, mais encore un priſme quelconque tronqué droit ou incliné fait ſur ce plan, & dont le plan incliné paſſeroit par l'axe de mouvement; comme auſſi par la connoiſſance des lignes qui décrivent la ſurface du ſolide, & de la circonférence que le centre de gravité décrit, on peut connoître la ſurface du ſolide, & celle de tous les priſmes droits tronqués faits ſur la même baſe, & dont le plan incliné paſſeroit par l'axe de mouvement. Mais la difficulté conſiſte à trouver le centre de gravité des différents plans & des différentes lignes qui compoſent le circuit d'une figure; c'eſt à quoi nous allons maintenant nous appliquer.

Centres de gravité dans les lignes.

270. THÉORÊME. *Le centre de gravité d'une ligne AB eſt ſur le milieu C de cette ligne.* Car ſi nous concevons que cette ligne ſoit chargée dans tous ſes points de poids tous égaux; il n'y aura pas plus de poids à la gauche de C qu'à ſa droite, & par conſéquent tous ſes poids ſeront en équilibre autour du point C (*Fig.* 101).

271. REMARQUE. Pour trouver le centre de gravité de pluſieurs lignes AB, BD, DH, je joins les centres de gravité C, E, des deux premieres par la droite CE. Je coupe cette droite en deux parties CL, LE, réciproques aux deux lignes; c'eſt-à-dire, je fais CL. LE :: BD. BA. Je mets CL du côté de BA, & LE du côté de BD; & le point L eſt le centre d'équilibre des deux lignes AB, BD. Du point L, par le milieu G du centre de gravité de la ligne HD, je mene la droite LG: je coupe cette droite en deux parties réciproques à la ſomme des deux AB, BD, & à la droite HD; c'eſt-à-dire, je fais LM. MG :: HD. AB+BD. Je mets LM du côté de L, & MG du côté de HD; & le point M eſt le centre commun d'équilibre des trois lignes AB, BD, DH.

Car ſi nous concevons que les trois lignes ſoient chargées dans tous leurs points de poids égaux, les centres de gravité ſur chacune de ces lignes ſeront les points C, E, G, milieux de ces lignes. Conſidérant donc CE comme un levier, tous les poids de la ligne AB peſeront autant ſur ce levier, que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre C; & tous les poids de la ligne BD peſeront autant ſur ce levier, que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre E. Or, tous les poids de la ligne AB étant mis en C, où ils ne feront qu'un ſeul poids; & tous ceux de la ligne AD étant mis en E, pour n'y faire qu'un ſeul poids; il eſt clair que le poids C ſera au poids E, comme la ligne AB ſera à la ligne BD. Car le poids

C

C eſt compoſé d'autant de poids égaux, que la ligne AB renferme de points, & le poids E eſt compoſé d'autant de poids égaux que la ligne BD renferme de points. Ainſi le centre commun de gravité des poids C, E, ſur le levier CE, ſera auſſi le point L; puiſque les diſtances CL, LE, ſeront réciproques aux poids E, C, de même qu'elles le ſont aux lignes BD, AB.

Maintenant conſidérant la droite LG comme un levier; les poids C, E, peſeront autant ſur ce levier que s'ils étoient mis à leur centre d'équilibre L: & tous les poids qui ſont ſur le levier HD, peſeront autant ſur le levier LG que s'ils étoient tous mis à leur centre d'équilibre G, pour n'y faire qu'un ſeul poids. Ainſi les deux poids C, E, mis en L pour n'y faire qu'un ſeul poids, ſeroient au poids G, comme la ſomme des deux lignes AB, AD, eſt à la ligne HD; & par conſéquent leur centre commun de gravité ſeroit le point M, puiſque les diſtances LM, MG, ſeroient réciproques au poids G & au poids L compoſé des deux poids C, E.

Centres de gravité dans les parallélogrammes.

272. THÉORÊME. *Le centre de gravité de tout rectangle & de tout parallélogramme ABCD, eſt ſur le milieu X de la droite EH qui coupe deux côtés oppoſés BC, AD, chacun en deux également aux points E, H* (Fig. 102).

DÉMONSTRATION. Tous les éléments de la figure paralleles aux côtés BC, AD, ſont coupés en deux également par la ligne EH: ainſi tous leurs centres de gravité ſont ſur cette ligne; & par conſéquent on peut regarder ces éléments comme autant de poids égaux attachés à tous les points de la ligne EH. Or, le centre de gravité commun de tous ces poids égaux eſt ſur le milieu X de la ligne EH, à cauſe qu'il y en a autant de part & d'autre de X: donc le centre de gravité de tous les éléments, & par conſéquent celui du rectangle ou du parallélogramme, eſt le point X.

Centres de gravité dans les triangles.

273. THÉORÊME. *Le centre de gravité X d'un triangle ABC eſt éloigné de l'un des angles tel qu'on voudra A, d'une quantité AX égale aux deux tiers de la ligne AM menée du ſommet A ſur le milieu M du côté BC oppoſé à cet angle* (Fig. 103).

DÉMONSTRATION. A cauſe que la ligne AM coupe le côté BC en deux également en M, tous les éléments du triangle paralleles au côté BC ſont coupés chacun en deux également; & par conſé-

quent tous leurs centres étant ſur la ligne AM, leur centre de gravité commun, c'eſt-à-dire le centre de gravité du triangle, eſt ſur cette ligne AM. Je mene d'un autre angle B une droite BR ſur le milieu du côté oppoſé AE : & tous les éléments du triangle, paralleles au côté AC, étant auſſi diviſés chacun en deux également par AR; leur centre de gravité commun, ou le centre de gravité du triangle, doit être auſſi ſur AR. Or, nous venons de voir que ce centre eſt ſur AM : donc il faut néceſſairement qu'il ſoit ſur le point X où les deux lignes AM, BR, s'entrecoupent.

Du point R, je mene RN parallele à BC, & qui coupe AM en O. Dans les triangles ſemblables AMC, AOR, nous avons MC. OR :: AC. AR : mais AC=2AR : donc MC=2OR, ou OR=$\frac{1}{2}$ MC=$\frac{1}{2}$ MB. Or les triangles ſemblables BXM, OXR, donnent BM. RO :: MX. OX : donc BM.$\frac{1}{2}$ MB :: MX. OX; & par conſéquent OX=$\frac{1}{2}$ MX; & OX=$\frac{1}{3}$ OM. Mais à cauſe des triangles ſemblables ACM, ARO, & de AC=2AR; nous avons AM=2AO=2OM; & par conſéquent AO=OM. Ainſi OX étant le le tiers de OM ou de AO, n'eſt que le ſixieme de la ligne entiere AM; & ce ſixieme étant ajouté à la moitié AO de AM, fait les deux tiers de AM : donc le centre de gravité X eſt éloigné des deux tiers de AM.

Centre de gravité dans le trapeze, &c.

274. REMARQUE I. Pour *trouver le centre de gravité d'un trapézoïde, ou d'un trapeze ABCD* (Fig. 104); je mene la diagonale BD qui diviſe la figure en deux triangles ABD, DBC : je mene dans le triangle ABD de l'un des angles ABD la droite BM ſur le milieu du côté oppoſé AD; & ſur cette ligne, je prends BH égal aux deux tiers de BM. Ainſi le centre de gravité du triangle ABD eſt en H. Je mene dans le triangle BDC, de l'un des angles DBC, la droite BN ſur le milieu du côté oppoſé DC; & prenant ſur BN la partie BP égale à ſes deux tiers, le centre de gravité du triangle DBC eſt le point P.

Je joins les deux centres de gravité H, P, par la droite HP; & conſidérant cette ligne comme un levier auquel ſont attachés deux poids en H & P, égaux aux deux triangles; je partage cette ligne en deux parties HS, SP, réciproques aux poids ou aux triangles; c'eſt-à-dire, je fais HS. SP :: BDC. BAD; & le point S eſt le centre commun des deux triangles, & par conſéquent le centre de gravité du trapézoïde : ce qui eſt évident par les principes établis ci-deſſus.

275. REMARQUE II. Pour *trouver le centre de gravité d'une figure irréguliere ABCDE* (Fig. 105), qui a plus de quatre côtés, je diviſe la figure en triangles, par des lignes menées de l'un des angles B, à tous les autres où je puis en mener. Je cherche les centres de gravité H, P, S, de ces triangles : menant enſuite la droite HP, que je conſidere comme un levier ayant à ſes extrémités H, P, deux poids qui ſont entre eux comme les triangles ABE, BED; je cherche leur centre de gravité commun R ſur ce levier.

Du point R, je mene la droite RS, que je conſidere auſſi comme un levier ayant à ſon extrémité R un poids égal à la ſomme des deux triangles ABE, BED; & en S, un poids égal au triangle BDC : & cherchant ſur ce levier le centre Q d'équilibre des deux poids, le point Q eſt le centre de gravité de la figure : ce qui n'a plus beſoin de démonſtration.

Centre de gravité dans les polygones.

276. THÉORÊME. *Le centre de gravité d'un polygone régulier eſt au centre de la figure* (Fig. 106 & 107).

DÉMONSTRATION. I°. Si le polygone eſt d'un nombre pair de côtés, comme l'exagone ABCDE (*Fig.* 106), je mene de l'un de ſes angles D, une droite DA à l'angle oppoſé A : & comme cette ligne diviſe le polygone en deux parties parfaitement égales, le centre de gravité de ces deux parties, c'eſt-à-dire de l'exagone, doit être ſur cette ligne. Je mene de même d'un autre angle E, la droite EB à l'angle oppoſé; & par la raiſon que nous venons de dire, le centre de gravité de la figure doit être ſur cette ligne. Ainſi ce centre doit être néceſſairement ſur le point d'interſection O des deux lignes. Or, ce point, comme on ſait, eſt le centre de la figure. Donc, &c.

II°. Si le polygone eſt d'un nombre impair de côtés, comme le pentagone ABCDE (*Fig.* 107), je mene de l'un des angles D, la droite DM ſur le milieu du côté oppoſé AB : & la figure étant diviſée en deux parties parfaitement égales, ſon centre de gravité eſt ſur cette ligne DM. Je mene d'un autre angle E, la droite EN ſur le milieu du côté oppoſé BC; & par la même raiſon, le centre de gravité de la figure eſt auſſi ſur cette ligne. Donc ce centre eſt dans le point O, où les deux lignes DM, EN, ſe coupent; & ce point, comme on ſait, eſt le centre de la figure.

277. COROLLAIRE. Donc *le centre d'un cercle eſt ſon centre de*

gravité, puiſque le cercle eſt un polygone régulier d'une infinité de côtés.

Centres de gravité dans la parabole.

278. THÉORÊME I. *Le centre de gravité d'une parabole quarrée ABC eſt ſur un point S de l'axe BP, éloigné du ſommet d'une diſtance BS égale aux trois cinquiemes de cet axe* (Fig. 108).

DÉMONSTRATION. Je mene les éléments ED, FG, paralleles à la baſe AC; & tous ces éléments étant diviſés chacun en deux également par l'axe BP, ont leurs centres de gravité ſur cet axe: & par conſéquent leur centre de gravité commun, c'eſt-à-dire celui de la parabole, eſt auſſi ſur cet axe. Ainſi nous pouvons conſidérer ces lignes comme des poids qui ſeroient attachés à tous les points du levier BP: & ſuppoſant que ce levier tourne autour de la tangente MN au ſommet B, nous trouverons le centre de gravité commun, en multipliant chaque poids ou chaque ligne par ſa diſtance au point B, & en diviſant la ſomme des produits par la ſomme des poids ou des lignes: ce qui nous donnera la diſtance du centre de gravité commun, ou du centre de gravité de la parabole au point B (246).

Or, les moitiés des éléments ED, FG, &c, étant les ordonnées à l'axe BP, les quarrés de ces moitiés ſont entre eux comme les abſciſſes BL, BO, &c, c'eſt-à-dire comme les diſtances des éléments au ſommet B de la parabole; & ces abſciſſes ou diſtances ſont entre elles comme les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c, à l'infini: donc les quarrés des moitiés des éléments, & par conſéquent les quarrés des éléments ED, FG, &c, ſont entre eux comme les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c; & leurs racines quarrées, c'eſt-à-dire les éléments, ſont entre eux comme les racines quarrées de ces nombres.

C'eſt pourquoi les éléments forment une ſuite dont l'expoſant eſt $\frac{1}{2}$, par les principes de l'Arithmétique des Infinis; & les diſtances ou abſciſſes forment une ſuite 0, 1, 2, 3, &c, dont l'expoſant eſt 1: donc les produits des éléments par leurs diſtances formeront une nouvelle ſuite dont l'expoſant ſera la ſomme $\frac{1}{2}+1$ ou $\frac{3}{2}$ des deux expoſants; & la ſomme de ces produits ſera au dernier AC×PB multiplié par le nombre des termes PB, comme 1 eſt à l'expoſant $\frac{1}{2}$ augmenté de l'unité, ou comme 1 à $\frac{3}{2}+1$, ou comme 1 à $\frac{5}{2}$, ou comme $\frac{2}{2}$ à $\frac{5}{2}$, ou enfin comme 2 à 5: c'eſt-à-dire que la ſomme des produits des éléments par leurs diſtances ſera $\frac{2}{5}$ AC×$\overline{\text{PB}}^2$. Or, la ſomme des éléments, c'eſt-à-dire la parabole, eſt $\frac{2}{3}$ AC×PB: car

nous ſavons que la parabole eſt les $\frac{2}{3}$ du rectangle circonſcrit, ou du produit de la baſe par la hauteur. Diviſant donc $\frac{2}{3}$ AC×PB par $\frac{2}{3}$ AC ×PB; le quotient $\frac{6}{10}$ BP, ou $\frac{3}{5}$ PB, ſera la diſtance du centre de gravité de la parabole au ſommet B.

279. COROLLAIRE. Si l'on fait un ſemblable calcul par rapport aux premieres paraboles du troiſieme degré, du quatrieme, du cinquieme, &c, c'eſt-à-dire à la parabole dont les cubes des éléments ſont entre eux comme les abſciſſes, à celle dont les quatriemes puiſſances des éléments ſont entre elles comme les abſciſſes, & ainſi de ſuite; on trouvera que le centre de gravité de toutes les premieres paraboles, à commencer par la quarrée, ſont ſur l'axe à une diſtance éloignée du ſommet B des $\frac{3}{5}$ de l'axe, des $\frac{4}{7}$, des $\frac{5}{9}$, des $\frac{6}{11}$, des $\frac{7}{13}$, & ainſi de ſuite: de ſorte que le centre de gravité dans ces paraboles approchera de plus en plus vers la moitié de l'axe, & n'y parviendra jamais.

280. REMARQUE. Pour appliquer ceci à la pratique (*Fig.* 109):

I°. Cherchons la valeur du ſolide que décriroit la parabole ABC, en tournant autour de la tangente MN au ſommet. La parabole ABC étant les deux tiers du rectangle circonſcrit AMND, eſt donc $\frac{2}{3}$ AC ×PB: par conſéquent, ſi nous multiplions cette parabole par la circonférence que l'extrémité S de la diſtance BS de ſon centre de gravité décrira, laquelle diſtance eſt $\frac{3}{5}$ PB, nous aurons le ſolide décrit. Or en nommant (BP la circonférence que l'extrémité P de l'axe BP décriroit, la circonférence que S décrira ſera $\frac{3}{5}$ (BP: à cauſe que les deux circonférences ſont entre elles comme leurs rayons BP, BS. Ainſi le ſolide ſera $\frac{2}{3}$ ACxPBx $\frac{3}{5}$ (BP; ou $\frac{6}{15}$ ACx PBx (BP; ou enfin $\frac{2}{5}$ ACxPBx (BP: c'eſt-à-dire que le ſolide décrit par la circonvolution de la parabole autour de MN, eſt égal aux $\frac{2}{5}$ d'un priſme qui auroit pour baſe le rectangle circonſcrit AMNC, & pour hauteur une ligne égale à la circonférence du cercle que la hauteur PB de ce rectangle décrit autour de MN.

II°. Si la parabole eſt la premiere parabole du troiſieme degré, c'eſt-à-dire ſi les cubes de ſes ordonnées ſont entre eux comme leurs abſciſſes, nous trouverons par les regles de l'Arithmétique des Infinis, que cette parabole eſt les $\frac{3}{4}$ du rectangle circonſcrit, c'eſt-à-dire $\frac{3}{4}$ ACxBP: & comme la diſtance de ſon centre de gravité à la tangente eſt $\frac{4}{7}$ BP (279), la circonférence du cercle que cette ligne décrira eſt $\frac{4}{7}$ (BP: donc le ſolide décrit par la circonvolution de la parabole autour de MN, eſt $\frac{3}{4}$ ACxPBx $\frac{4}{7}$ (PB = $\frac{12}{28}$ ACxPBx (PB = $\frac{3}{7}$ ACxPBx (PB: c'eſt-à-dire, le ſolide décrit par la circonvo-

lution, eſt égal aux $\frac{3}{7}$ du rectangle circonſcrit multiplié par la circonférence du cercle que décrit la hauteur PB de ce rectangle.

III°. On trouvera de la même façon que les ſolides formés par la circonvolution des premieres paraboles du quatrieme degré, du cinquieme, &c, ſont $\frac{4}{9}$ AB×PB× (PB, $\frac{5}{11}$ AC×PB× (PB, $\frac{6}{13}$ AC× PB× (PB, & ainſi de ſuite: & comme le priſme AC×PB× (PB, eſt toujours le même, il s'enſuit que les paraboloïdes décrits autour de MN par la circonvolution des paraboles du ſecond degré, du troiſieme, du quatrieme, &c, ſont entre eux comme $\frac{2}{5}.\frac{3}{7}.\frac{4}{9}.\frac{5}{11}.\frac{6}{13}$, &c.

IV°. Et ſi on veut ſavoir les rapports de ces paraboloïdes au cylindre que le rectangle circonſcrit décrit en tournant autour de MN; on conſidérera que le centre de gravité de ce rectangle étant ſur le milieu T de BP, la circonférence du cercle que BT décriroit autour de MN, eſt $\frac{1}{2}$ (BP; & que par conſéquent le cylindre doit être AC×PB× $\frac{1}{2}$ (PB = $\frac{1}{2}$ AC×PB× (PB: ainſi ce cylindre n'eſt que la moitié du priſme AC×PB× (BP. Donc le paraboloïde décrit par la parabole quarrée étant les $\frac{1}{3}$ de AC×PB× (BP, ſera les $\frac{4}{9}$ du cylindre: le paraboloïde décrit par la parabole du troiſieme degré étant les $\frac{1}{4}$ de AC×PB× (PB, ſera les $\frac{6}{7}$ du cylindre: de ſorte que les rapports de nos différents paraboloïdes au cylindre ſeront $\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{9}.\frac{10}{11}.\frac{12}{13}$, &c.

V°. On pourra trouver de la même façon les ſolides décrits par les paraboles deuxiemes, troiſiemes, &c, de tous les degrés; & ceux que décrivent toutes les différentes paraboles autour d'un autre axe de mouvement pris où l'on voudra; & les rapports de ces ſolides aux cylindres circonſcrits: ce que je laiſſe à chercher à ceux qui étudieront ceci.

281. THÉORÊME II. *Le centre de gravité d'une demi-parabole quarrée BCP, eſt un point H éloigné de la tangente BN au ſommet, d'une quantité égale aux trois cinquiemes de l'axe BP, & diſtant de l'axe d'une quantité égale aux trois huitiemes de la baſe PC* (Fig. 110).

DÉMONSTRATION. Je mene les éléments MR, TV, &c, paralleles à la baſe PC; & concevant que la parabole tourne autour de la tangente BN, je trouve, comme ci-deſſus (278), que ſon centre de gravité eſt éloigné de cette tangente d'une quantité égale aux $\frac{3}{5}$ de ſon axe BP. Mais comme ce centre ne peut pas être ſur l'axe, je ſuppoſe que la parabole tourne autour de l'axe BP. Les centres de gravité des éléments MR, TV, &c, étant ſur leurs milieux Q,

X, &c ; je conçois ces éléments comme autant de poids qui ſeroient entre eux dans le même rapport que ces éléments, & qu'on auroit mis aux points Q, X, &c : & pour trouver leur centre d'équilibre commun, je conçois encore que ces poids ſoient tranſportés ſur l'un des éléments, par exemple ſur PC, en ſorte que leurs diſtances à l'axe PB ſoient les mêmes que celles qu'ils avoient en Q, X, F.

Ainſi, multipliant chaque poids par ſa diſtance à l'axe, & diviſant la ſomme des produits par la ſomme des poids, le quotient ſera la diſtance de leur centre d'équilibre commun à l'axe. Or les poids ou les éléments ſont entre eux comme les racines quarrées des nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c ; & leurs diſtances étant les moitiés des éléments, ſont auſſi dans la même raiſon. Multipliant donc chaque terme de la ſuite des éléments, laquelle a pour expoſant $\frac{1}{2}$, par chaque terme de la ſuite des diſtances, laquelle a auſſi pour expoſant $\frac{1}{2}$; l'expoſant de la ſuite des produits ſera $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ou 1 : & par conſéquent la ſuite de ces produits ſera au dernier $\overline{PC} \times \frac{1}{2} PC$ ou $\frac{1}{2} \overline{PC}^2$ multiplié par le nombre des termes PB, comme 1 eſt à l'expoſant 1 augmenté de l'unité, ou comme 1 eſt à 2 ; & par conſéquent cette ſomme de produits ſera la moitié de $\frac{1}{2} \overline{PC}^2 \times PB$; c'eſt-à-dire, elle ſera $\frac{1}{4} \overline{PC}^2 \times PB$.

Or la ſomme des éléments eſt $\frac{1}{3} PC \times PB$: diviſant donc $\frac{1}{4} \overline{PC}^2 \times PB$ par $\frac{1}{3} PC \times PB$; le quotient $\frac{3}{8} PC$ ſera la diſtance du centre de gravité de la parabole. Prenant donc ſur PC une quantité PZ égale à $\frac{3}{8} PC$; & ſur BP, une quantité $BS = \frac{3}{5} BP$: puis menant par Z une droite ZH parallele à PB ; & par S, une droite SH parallele à PC ; le point H, où ces deux lignes ſe couperont, ſera le centre de gravité de la parabole : car il ſera éloigné de BN, de $\frac{3}{5} BP$; & de BP, de $\frac{3}{8} PC$.

Et, par un ſemblable raiſonnement, on trouvera les centres de gravité de toutes les demi-paraboles de tous les degrés.

282. THÉORÊME III. *Le centre de gravité d'un complément BCV de parabole quarrée, eſt un point X, éloigné de l'axe BP d'une quantité égale aux $\frac{3}{4}$ de la tangente BV au ſommet, & diſtant de la même tangente BV d'une quantité égale à $\frac{3}{10}$ de CV* (Fig. 111).

DÉMONSTRATION. Je mene les éléments MN, RS, &c, paralleles à BP ; & ces éléments étant entre eux comme les quarrés de leurs abſciſſes BM, BR, &c, ont pour expoſant 2. Multipliant donc

ces éléments par leur distance BM, BR, à l'axe BP de la parabole autour duquel nous concevrons que le complément tourne ; les produits formeront une suite dont l'exposant sera la somme 2+1 ou 3 de l'exposant 2 de la suite des éléments & de l'exposant 1 de la suite des distances BM, BR, &c, qui sont entre elles comme les nombres 0, 1, 2, 3, &c. Ainsi la somme des produits sera au plus grand BV×VC multiplié par le nombre des termes BV, comme 1 à 3+1 ou comme 1 à 4 : & partant cette somme de produits sera $\frac{1}{4}\overline{BV}^3 \times VC$. Divisant donc cette somme par celle des éléments, laquelle est $\frac{1}{3}BV \times VC$; le quotient $\frac{3}{4}BV$ fait voir que le centre de gravité cherché est distant de l'axe BP, d'une quantité égale à $\frac{3}{4}BV$.

Or, ce centre ne pouvant être sur BV, je conçois que le complément tourne autour de BV : & comme la suite des éléments a pour exposant 2, & que les distances de leurs centres de gravité à la droite BV étant égales aux moitiés de ces éléments, ont aussi pour exposant 2 ; la somme des produits de chaque élément par chaque distance, aura pour exposant 2+2 ou 4. Ainsi cette somme sera au dernier produit $VC \times \frac{1}{5}CV$, ou $\frac{1}{5}\overline{VC}^4$ multiplié par le nombre des termes BV, comme 1 à 4+1, ou comme 1 à 5 : c'est-à-dire, cette somme sera $\frac{1}{10}\overline{VC}^4 \times BV$; & divisant cette somme par la somme $\frac{1}{3}VC \times BV$ des éléments, le quotient $\frac{3}{10}CV$ sera la distance du centre de gravité du complément à la droite BV. C'est pourquoi prenant sur BV la partie $BF = \frac{3}{4}BV$; & sur VC la partie $VZ = \frac{3}{10}VC$; puis menant FX parallele à VC, & ZX parallele à BC, le point X est le centre de gravité du complément, & ainsi des autres compléments de parabole.

283. REMARQUE. Pour *trouver le centre de gravité d'un ſegment BDC de parabole quarrée*, je cherche le centre X de gravité de la parabole, & le centre de gravité O du triangle PBC (*Fig.* 112). Je mene la droite OX que je prolonge en-delà de X, puis je dis, par regle de trois : comme le ſegment BDC est au triangle PBC, ainsi la distance OX du centre de gravité du triangle au centre de gravité de la parabole, est à un quatrieme terme ; & faisant XZ égal à ce quatrieme terme, le point Z est le centre de gravité du ſegment.

Car puisque la parabole n'est autre chose que la somme du ſegment & du triangle ; le centre de gravité X de la parabole doit être le centre d'équilibre du ſegment & du triangle. Mettant donc à la place du triangle & du ſegment deux poids qui soient dans le même rapport, en sorte que l'un soit sur le centre de gravité O du triangle,

triangle, & l'autre ſur le centre de gravité du ſegment; il faudra, pour que ces poids ſoient en équilibre autour du point X, que le poids O ou le triangle ſoit à l'autre poids ou au ſegment, réciproquement comme la diſtance de ce ſecond poids au centre d'équilibre X, eſt à la diſtance du poids O au même centre X (243). Or, c'eſt ce que nous venons de faire voir : donc le point Z que nous avons trouvé par ce moyen eſt le centre de gravité du ſegment.

284. De même *pour trouver le centre de gravité d'une portion PMNC de demi-parabole quarrée PBC* (Fig. 113), compriſe entre deux ordonnées MN, PC, à l'axe BP, je meſure la parabole PBC & la parabole MBN : & retranchant la petite de la grande, le reſte eſt la valeur de la portion PMNC. Je cherche le centre de gravité X de la parabole PBC, & le centre de gravité O de la parabole MBN : je mene la droite OX, que je prolonge au-delà de X; & je dis, par regle de trois : comme la portion PMNC eſt à la petite parabole MBN ; ainſi la diſtance OX du centre de gravité O de la petite parabole au centre X de la grande, eſt à un quatrieme terme qui ſera la diſtance XZ du centre de gravité de la portion PMNC au centre X de la grande parabole.

Par conſéquent le point Z ſera le centre de gravité de cette portion : car la parabole PBC n'étant autre choſe que la ſomme de la petite parabole BMN, & de la portion PMNC, il faut que ces deux parties ſoient en équilibre autour du centre X; & par conſéquent, il faut que les diſtances de leurs centres de gravité O, Z, leur ſoient réciproques.

Centres de gravité dans le cercle.

285. THÉORÊME I. *Le centre de gravité d'un arc de cercle ABC eſt ſur la ligne droite OB qui part du centre O du cercle, & qui coupe l'arc ABC en deux également en B; & la diſtance XO de ce centre de gravité au centre O du cercle, eſt une quatrieme proportionnelle à l'arc ABC, à ſa corde AC, & au rayon OB du cercle* (Fig. 114).

DÉMONSTRATION. La premiere partie de cette Propoſition eſt évidente : car puiſque l'arc ABC eſt diviſé en deux également par la droite OB qui paſſe par le centre du cercle, & que tous les points du demi-arc AB ſont autant éloignés de cette droite que tous les autres points de l'autre demi-arc BC ; il eſt clair que ces deux demi-arcs doivent être en équilibre autour de BO.

Pour prouver la ſeconde, ſuppoſons d'abord que l'arc ABC ſoit moindre que la demi-circonférence. Je mene par le point B la

tangente PBT, que je fais égale au diametre MN parallele à AC, en faiſant PB & BT égales chacune au rayon : & ſuppoſant que la demi-circonférence MBN, & la tangente PT, tournent autour du diametre MN, la demi-circonférence MBN décrira la ſurface d'une ſphere ; la tangente PT décrira la ſurface du cylindre circonſcrit à la ſphere ; & l'arc ABC décrira la ſurface d'une zone, laquelle ſurface ſera égale à la ſurface cylindrique qui ſera décrite par la droite VE égale à la largeur AC de la zone : ainſi cette ſurface ſera égale à VE ou AC multipliée par la circonférence du rayon OB. Or, la ſurface que l'arc ABC décrit, eſt auſſi égale à l'arc ABC multiplié par la circonférence que décrit la diſtance OX de ſon centre de gravité à l'axe de mouvement MN : donc nous aurons AC×(OB=ABC×(OX : d'où je tire ABC. AC :: (OB. (OX ; & au lieu des circonférences mettant les rayons, nous aurons ABC. AC :: OB. OX ; & partant OX eſt quatrieme proportionelle à l'arc ABC, à ſa corde AC, & au rayon OB.

Maintenant pour trouver le centre de gravité de l'autre arc ARC, je conſidere que le centre de gravité de la circonférence étant le centre O de cette circonférence, à cauſe que tous ſes points étant également éloignés de ce centre peſent également par rapport à ce centre ; les deux arcs ABC, ARC, qui compoſent la circonférence, doivent être en équilibre autour de leur centre de gravité commun O. C'eſt pourquoi je prolonge XO au-delà de X, & je dis, par regle de trois : comme l'arc ARC eſt à l'arc ABC, réciproquement la diſtance XO du centre de gravité de l'arc ABC, eſt à un quatrieme terme, qui doit être la diſtance OZ du centre de gravité de l'arc ARC. Ainſi nous aurons ABC×OX=ARC ×OZ ; ou en mettant au lieu de OX & OZ, leurs circonférences, ABC×(OX=ARC×(OZ. Mais nous avons ABC×(OX=AC× (OB : donc ARC×(OZ=AC×(OB ; & partant ARC. AC :: (OB. (OZ ; ou bien en remettant les rayons au lieu des circonférences, ARC. AC :: OB. OZ : ce qui fait voir que la diſtance OZ du centre de gravité Z de l'arc ARC au centre du cercle, eſt auſſi quatrieme proportionnelle à l'arc ARC, à ſa corde AC, & au rayon du cercle.

286. Corollaire. De là il ſuit que *ſi l'arc ABC eſt égal à la demi-circonférence*, la diſtance de ſon centre de gravité au diametre, ou au centre du cercle, eſt quatrieme proportionnelle à la demi-circonférence, au diametre, & au rayon.

287. Théorême II. *Le centre de gravité X d'un ſecteur de*

ercle ABC eſt ſur la droite BR menée du centre B, & qui coupe en eux également en R l'arc AC du ſecteur ; & la diſtance de centre X au centre B du cercle, eſt une quatrieme proportionnelle à l'arc AC, à ſa corde AC, & aux deux tiers du rayon AB du cercle (Fig. 115).

DÉMONSTRATION. Puiſque la droite BR diviſe le ſecteur en deux parties égales, il eſt clair que ces deux parties doivent être en équilibre autour de BR ; & que par conſéquent le centre de gravité commun à ces deux parties doit être ſur BR.

Maintenant pour trouver la diſtance de X au centre B du cercle, ſuppoſons d'abord que le ſecteur ſoit moindre qu'un demi-cercle, & qu'il tourne autour du diametre MN perpendiculaire ſur BR. Le cercle étant un polygone d'une infinité de côtés, eſt compoſé d'une infinité de triangles tous égaux qui ont leurs ſommets au centre, & dont les baſes ſont les petits côtés égaux du polygone. Ainſi le ſecteur ABC eſt compoſé d'un nombre de triangles, qui eſt au nombre que le cercle en contient, comme l'arc ARC eſt à la circonférence entiere : & à cauſe que les baſes des triangles ſont infiniment petites, les perpendiculaires menées du centre ſur les milieux de leurs baſes, ne ſont pas différentes des côtés de ces triangles, c'eſt-à-dire du rayon AB. Ainſi les centres de gravité des triangles qui compoſent le ſecteur, étant tous éloignés de leurs ſommets d'une quantité égale aux deux tiers des lignes menées des ſommets ſur les milieux des baſes (273) ; tous ces centres ſont éloignés du centre B d'une quantité égale aux deux tiers du rayon AB. C'eſt pourquoi prenant ſur AB la partie TB, égale aux $\frac{2}{3}$ de AB : & du centre B, & de l'intervalle BT, décrivant l'arc TV ; cet arc paſſera par tous les centres de gravité des triangles qui compoſent le ſecteur.

Concevant donc ces triangles comme autant de poids égaux qui ſeroient attachés aux centres de gravité ſur l'arc TV ; il ne s'agit plus que de trouver leur centre de gravité commun, lequel n'eſt autre choſe que le centre de gravité de cet arc, puiſque tous les poids ſont entre eux comme les éléments de cet arc. Or, pour trouver le centre de gravité de l'arc, il faut faire cette analogie : l'arc TV eſt à ſa corde TV, comme le rayon TB eſt à la diſtance BX (285) ; & à cauſe des ſecteurs ſemblables ABC, TBV, nous avons, l'arc ARC eſt à ſa corde AC, comme l'arc TV eſt à ſa corde TV. Donc l'arc ARC eſt à ſa corde AC, comme TB qui eſt les deux tiers du rayon AB, eſt à la diſtance BX.

Si le ſecteur AHC eſt plus grand que le demi-cercle, nous trou-

verons en achevant la circonférence du rayon BT, que les centres de gravité de tous les triangles qui compoſent le ſecteur AHC ſont ſur l'arc TDV. Or, pour avoir le centre de gravité de cet arc, il faut encore faire TDV. TV :: TB. BZ ; & les ſecteurs ſemblables AHC, TDV, donnent TDV. TV :: AHC. AC : donc AHC. AC :: TB ou $\frac{2}{3}$ AB. BZ, & le point Z eſt le centre de gravité du ſecteur AHC.

288. REMARQUE I. De ce que nous venons de dire, on tire la méthode de *trouver le centre de gravité d'un vouſſoir d'une voûte circulaire* (Fig. 116).

On ſait que les pierres ou vouſſoirs d'une voûte circulaire ABHLCD ſont taillées de façon que tous leurs joints AD, BC, &c, étant prolongés, vont aboutir au centre P ; & par conſéquent chaque vouſſoir ABCD n'eſt autre choſe qu'un ſecteur ABP moins un ſecteur ſemblable DCP. Pour avoir donc le centre de gravité de ce vouſſoir, on cherchera le centre de gravité X du ſecteur ABP, & le centre de gravité Z du ſecteur DCP : on meſurera auſſi le ſecteur ABP, & le ſecteur DCP ; & retranchant le petit du grand, on aura la valeur de la ſurface ABCD du vouſſoir. Après quoi on dira par regle de trois : la ſurface ABCD eſt au ſecteur DCP, réciproquement comme la diſtance XZ du centre de gravité du ſecteur DCP au centre de gravité X du ſecteur ABP, eſt à un quatrieme terme, qui ſera la diſtance du centre de gravité de la ſurface ABCD au centre de gravité X du ſecteur APB. Ainſi prolongeant ZX, & faiſant XV égal à la diſtance trouvée, le point V ſera le centre de gravité de la ſurface ABCD : car la ſurface ABCD, & le ſecteur DCP, compoſant enſemble le ſecteur ABP, doivent être en équilibre autour du centre X de gravité de ce ſecteur. C'eſt pourquoi leurs centres de gravité particuliers doivent être à des diſtances de X, réciproques à leurs grandeurs.

Tout vouſſoir ayant de l'épaiſſeur, il eſt clair qu'après avoir trouvé le centre de gravité V de ſa ſurface, celui du vouſſoir ſera ſur le milieu de l'épaiſſeur, c'eſt-à-dire de la perpendiculaire qui paſſeroit du point V ſur la ſurface oppoſée.

289. REMARQUE II. Pour *trouver le centre de gravité d'un ſegment ABC de cercle*, je meſure le ſecteur ABCP, & le triangle APC ; & retranchant la valeur du triangle de celle du ſecteur, le reſte eſt la valeur du ſegment ABC (*Fig.* 117).

Je cherche le centre de gravité X du ſecteur ABCP, & le centre de gravité O du triangle APC ; puis menant la ligne OX, que je prolonge au-delà de X, je dis par regle de trois : comme le ſeg-

ment ABC eſt au triangle APC, réciproquement la diſtance OX du centre de gravité O du triangle au centre de gravité X du ſecteur, eſt à un quatrieme terme qui doit être la diſtance XZ du centre de gravité Z du ſegment au centre du ſecteur. Car le ſegment & le triangle compoſant le ſecteur, doivent être en équilibre autour du centre de gravité du ſecteur: ce qui ne peut ſe faire, à moins que les diſtances de leurs centres de gravité Z, O, au centre X, ne ſoient réciproques à leurs grandeurs.

290. REMARQUE III. Pour *trouver le centre de gravité d'une portion de cercle ACNM* compriſe entre deux ſegments ABC, MHN (Fig. 118), je cherche le centre de gravité X du quadrilatere ACNM, le centre de gravité O du ſegment MA, & le centre de gravité Z du ſegment CN; puis conſidérant les trois figures comme des poids mis à leurs centres de gravité X, O, Z, je mene la droite OX, & je cherche ſur cette droite le centre d'équilibre T des poids X, O, c'eſt-à-dire du quadrilatere ACNM, & du ſegment MA. Je mene la droite TZ, & concevant que les deux poids X, O, ſoient mis ſur le centre d'équilibre T, je cherche le centre d'équilibre V des deux poids X, O, mis en T, & du poids Z; & le point V eſt le centre d'équilibre des trois poids X, O, Z, ou des trois figures ACNM, MA, & CN; & par conſéquent ce centre eſt le centre de gravité de la figure ACNM compoſée des trois.

Centres de gravité dans l'ellipſe.

291. THÉORÊME I. *Le centre de gravité d'une ellipſe ABCD eſt le même que le centre O de la figure* (Fig. 119).

DÉMONSTRATION. Je mene les deux axes AC, DB: tous les éléments paralleles au petit axe DB ſont coupés en deux également par le grand axe AC: donc leurs centres de gravité ſont ſur ce grand axe; & par conſéquent leur centre de gravité commun eſt ſur cet axe. Je mene le petit axe DB, lequel coupe le grand axe AC en deux parties égales: & comme tous les éléments paralleles à ce petit axe peſent ſur le grand, comme s'ils étoient mis chacun ſur ſon centre de gravité qui eſt ſur le grand axe, & qu'il n'y a pas plus d'éléments qui traverſent le demi grand axe AO, qu'il n'y en a qui traverſent l'autre demi grand axe CO, & que les diſtances de ces éléments au centre O de part & d'autre ſont égales chacune à chacune; il s'enſuit que tous les éléments dont les centres de gravité ſont ſur AO, peſent autant ſur AO, que ceux dont les centres de gravité ſont ſur CO peſent ſur CO; & que par conſéquent

le point O doit être leur centre de gravité commun, ou le centre de gravité de l'ellipſe.

292. THÉORÊME II. *Le centre de gravité d'un ſegment elliptique ABCP, dont la corde AC eſt ordonnée au grand axe, eſt le même que le centre de gravité du ſegment du cercle circonſcrit à l'ellipſe, dont la corde EH eſt la même que AC prolongée de part & d'autre juſqu'à la circonférence du cercle* (Fig. 120).

DÉMONSTRATION. La ligne PB diviſe en deux également le ſegment circulaire EBHP, & le ſegment elliptique ABCP; & par conſéquent le centre de gravité de l'un & l'autre ſegment doit être ſur cette ligne. Or, nous avons démontré en parlant de l'ellipſe, que les éléments du ſegment elliptique APCB, perpendiculaires ſur PB, ſont proportionnels aux éléments du ſegment circulaire EBHP; & il eſt clair que les diſtances des éléments du ſegment elliptique au centre P de l'ellipſe, ſont égales chacune à chacune aux diſtances des éléments du ſegment circulaire au même point P, qui eſt auſſi le centre du cercle. Suppoſant donc que chaque élément du ſegment elliptique ne ſoit que la moitié de chaque élément du ſegment circulaire, & concevant que l'un & l'autre tournent autour du petit axe MN perpendiculaire ſur PB; la ſomme des produits des éléments du ſegment circulaire par leurs diſtances à l'axe de mouvement MN, ſera double de la ſomme des produits des éléments du ſegment elliptique par les mêmes diſtances.

Nommons $2x$ la ſomme des produits des éléments du ſegment circulaire par leur diſtance; nous aurons x pour la ſomme des produits des éléments du ſegment elliptique par leurs diſtances: & nommant $2y$ la ſomme des éléments du ſegment circulaire, nous aurons y pour celle des éléments du ſegment elliptique. Or, pour avoir la diſtance du centre de gravité du ſegment circulaire à l'axe de mouvement MN, il faut diviſer la ſomme $2x$ des moments de ſes éléments, par la ſomme $2y$ des éléments: donc cette diſtance ſera $\frac{2x}{2y}$ ou $\frac{x}{y}$. De même pour avoir la diſtance du centre de gravité du ſegment elliptique à l'axe de mouvement MN, il faut diviſer la ſomme x des moments de ſes éléments par la ſomme y des éléments: donc cette diſtance ſera encore $\frac{x}{y}$. Mais cette diſtance eſt la même que nous avons trouvée pour le ſegment circulaire: donc le centre de gravité X de l'un & de l'autre ſegment doit être le même.

293. REMARQUE. On prouvera de même que le centre de gra-

vité d'un ſegment elliptique ABC (*Fig.* 121), dont la corde AC eſt perpendiculaire au petit axe, eſt le même que le centre de gravité du ſegment correſpondant EBH du cercle inſcrit : que le centre de gravité d'une bande elliptique AMNC, compriſe entre deux doubles ordonnées AC, MN, eſt le même que le centre de gravité de la bande correſpondante EHTV du cercle correſpondant, &c.

294. THÉORÊME III. *Le centre de gravité X d'un ſecteur elliptique ABCP, dont la corde AC eſt perpendiculaire au grand axe BZ, eſt le même que le centre de gravité du ſecteur correſpondant EBHP du cercle circonſcrit BHZE* (Fig. 120).

DÉMONSTRATION. Tous les éléments du ſecteur elliptique ſont proportionnels aux éléments du ſecteur circulaire, ſelon ce qui a été démontré dans les Sections Coniques ; & les diſtances des centres de gravité des éléments du ſecteur elliptique au centre P de l'ellipſe, ſont égales chacune à chacune aux diſtances des centres de gravité des élémens du ſecteur circulaire au même centre P. Suppoſant donc que chaque élément du ſecteur circulaire ſoit double de chaque élément du ſecteur elliptique, le produit des élémens du ſecteur circulaire par leurs diſtances ſera double du produit des éléments du ſecteur elliptique.

Ainſi nommant le premier produit $2x$, le ſecond ſera x : & nommant auſſi $2y$ la ſomme des éléments du ſecteur circulaire, nous aurons y pour celle des éléments du ſecteur elliptique : & partant, la diſtance du centre de gravité du ſecteur circulaire au centre P de l'ellipſe, ſera $\frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$; & la diſtance du centre de gravité du ſecteur elliptique au même centre P, ſera $\frac{x}{y}$. Mais ces deux diſtances ſont la même : donc le point X eſt le centre de gravité de l'un & l'autre ſecteur.

Et par un ſemblable raiſonnement, on prouvera que le centre de gravité du ſecteur elliptique ABCP (*Fig.* 121), dont la corde eſt perpendiculaire au petit axe, eſt le même que celui du ſegment correſpondant EBHP du cercle inſcrit.

295. REMARQUE I. Pour trouver le centre de gravité d'un ſegment elliptique ABC (*Fig.* 122), dont la corde AC eſt oblique au grand axe & au petit ; je diviſe ſa corde AC en deux également en S : & du point S, par le centre P de l'ellipſe, je mene la droite PB qui ſera le demi-diametre du ſegment. Je coupe le demi grand axe RP en H, en même raiſon que le demi-diametre BP eſt coupé

en S : c'eſt-à-dire, je fais BP. BS :: RP. RH. Je mene par le point H la droite MN perpendiculaire au grand axe : ce qui me donne un ſegment elliptique MRN, dont je cherche le centre de gravité X par les regles ci-deſſus. Je coupe BS en Z, en même raiſon que RH eſt coupé en X : c'eſt-à-dire, je fais RH. RX :: BS. BZ ; & le point Z eſt le centre de gravité du ſegment ABC. Ce que je prouve ainſi.

J'ai démontré dans les Sections Coniques, en parlant de l'ellipſe, que le ſegment ABC eſt égal au ſegment MRN : que leurs baſes ſont réciproques aux hauteurs ; c'eſt-à-dire qu'en menant du point B la perpendiculaire BT ſur ſa baſe AC, on a AC. MN :: RH. BT : que ſi on conçoit RH coupé en une infinité de parties égales, & BS en un même nombre de parties, & qu'après avoir mené des points de diviſion des paralleles aux baſes MN, AC, on circonſcrive ſur ces paralleles des petits rectangles à l'égard du ſegment MRN, & des petits parallélogrammes à l'égard du ſegment ABC, tels qu'on les voit dans la figure, en ſorte qu'il y ait autant de rectangles d'une part que de parallélogrammes de l'autre ; chaque rectangle du ſegment MRN eſt égal à chaque parallélogramme du ſegment ABC. Cela poſé (*Fig.* 122) :

Concevons que le ſegment MRN tourne autour de ſa baſe MN, & le ſegment ABC autour de ſa baſe AC. Les centres de gravité des rectangles du ſegment MRN ſeront ſur les milieux des petites parties de la droite RH qui traverſent ces rectangles & les coupent en deux également, & les centres de gravité des parallélogrammes du ſegment ABC ſeront ſur les milieux des petites parties de la droite BS qui les traverſent, & qui les coupent en deux également. Concevons donc que tous les rectangles & les parallélogrammes ſoient autant de poids mis ſur leurs centres de gravité ; & quant aux *poids* qui repréſentent les parallélogrammes, faiſons-les avancer parallèlement à la baſe AC, juſqu'à ce qu'ils coupent la perpendiculaire BT en des points où nous les concevrons attachés.

Les droites RH, BS, étant diviſées en un même nombre de parties égales, il eſt clair que les parties de RH compriſes dans les rectangles du ſegment MRN, ſont proportionnelles aux parties de BS compriſes dans les parallélogrammes du ſegment ABC : & comme les centres de gravité des rectangles du ſegment MRN coupent en deux également les parties de RH compriſes dans les rectangles ; de même que les centres de gravité des parallélogrammes du ſegment ABC coupent en deux également les parties de BS compriſes dans les parallélogrammes ; il eſt encore clair que

la

la ligne RH eſt diviſée aux points O, O, &c, des centres de gravité des rectangles, en même raiſon que la ligne BS eſt diviſée aux points L, L, &c, des centres de gravité des parallélogrammes.

Mais à cauſe des paralleles LI, LI, &c, la perpendiculaire BT eſt diviſée aux points I, I, &c, en même raiſon que la droite BS aux points L, L, &c: donc la perpendiculaire BT eſt diviſée aux points I, I, &c, en même raiſon que la droite RH aux points O, O, &c: c'eſt-à-dire, les diſtances IT, IT, &c, des centres de gravité des parallélogrammes du ſegment ABC à la baſe AC de ce ſegment, ſont entre elles comme les diſtances OH, OH, &c, des centres de gravité des rectangles du ſegment MRN à la baſe MN de ce ſegment. Par conſéquent, ſi l'on ſuppoſe, par exemple, RH double de BT, tous les OH ſeront doubles de tous les IT. Multipliant donc tous les rectangles du ſegment MRN par leurs diſtances OH, &c, la ſomme des produits ſera double de la ſomme des produits des parallélogrammes du ſegment ABC par leurs diſtances IT, &c, à cauſe de l'égalité des rectangles & des parallélogrammes.

Ainſi nommant la premiere de ces ſommes de produits $2x$, la ſeconde ſera x; & par conſéquent ſi nous nommons y la ſomme des rectangles, la ſomme des parallélogrammes ſera auſſi y: diviſant donc $2x$, & x par y, les quotients ſeront $\frac{2x}{y}$ & $\frac{x}{y}$, & feront voir que la diſtance du centre de gravité du ſegment MRN à ſa baſe, eſt double de la diſtance du centre de gravité du ſegment ABC à ſa baſe AC; & qu'en prenant $TQ = \frac{1}{2}HX$, le point Q ſera la diſtance du centre de gravité du ſegment ABC à ſa baſe AC. Or, le centre de gravité du ſegment ABC doit être ſur BS: donc du point Q, menant QZ parallele à AC, le point Z ſera le centre de gravité cherché, & BS ſera diviſé en même raiſon en Z, que BR en X.

296. Remarque II. J'ai démontré dans le même endroit des Sections Coniques, que le ſecteur ABCP eſt égal au ſecteur MRNP (*Fig.* 122), en ſuppoſant toujours que BP. BS :: RP. RH. Par conſéquent ſi dans l'un & l'autre ſecteur on circonſcrivoit des rectangles & des parallélogrammes, de même que nous avons fait à l'égard des ſegments; chaque rectangle ſeroit égal à chaque parallélogramme: & en faiſant tourner le ſecteur MRNP autour du petit axe, lequel eſt parallele à ſa baſe; & le ſecteur ABCP, autour du diametre conjugué, lequel eſt parallele à ſa baſe AC; on trouveroit, en ſuppoſant que la diſtance du centre O de gravité du ſecteur

MRNP au centre P, ſoit la droite OB; on trouveroit, dis-je, que pour avoir le centre de gravité L de l'autre ſecteur, il faudroit faire RP. RO :: BP. BL.

297. REMARQUE III. Je ne parle point ici du *centre de gravité de l'hyperbole*, à cauſe que la quadrature de cette figure n'étant pas encore trouvée, ſon centre de gravité nous eſt encore inconnu : & je ne m'arrêterai pas davantage à chercher les centres de gravité d'un plus grand nombre de figures, attendu qu'il ſera aiſé de les trouver, en faiſant l'application des principes précédents. Ce qui me reſte à préſent, eſt de faire voir comment on trouve les centres de gravité des ſolides.

Centres de gravité des ſolides.

298. THÉORÊME I. *Dans tout priſme, parallélipipede, & cylindre; ſi ſur le centre de gravité X de la baſe, on éleve une perpendiculaire XZ juſqu'à la baſe ſupérieure, le centre de gravité du ſolide ſera ſur le milieu P de cette perpendiculaire* (Fig. 123).

DÉMONSTRATION. La choſe eſt évidente : car ſi l'on conçoit que le priſme ſoit coupé par une infinité de plans paralleles à la baſe, leſquels ſeront tous ſemblables & égaux à cette baſe, la perpendiculaire XZ paſſera par tous les centres de gravité de ces plans, & par conſéquent leur centre d'équilibre commun ſera auſſi ſur XZ : & comme tous les plans ſont égaux, & qu'il y en a autant entre P & Z, qu'entre P & X; le point P ſera le centre cherché.

299. THÉORÊME II. *Dans les figures ſemblables, les centres de gravité ſont ſemblablement poſés* (Fig. 124).

DÉMONSTRATION. Soient les deux figures ſemblables ABCDE, *abcde*. Je diviſe chacune de ces figures en triangles par des lignes menées des angles égaux A, *a* : ainſi j'ai autant de triangles dans l'une que dans l'autre; & chaque triangle de l'une eſt ſemblable à chaque triangle de l'autre. Je mene dans les triangles ſemblables BAC, *bac*, des ſommets A, *a*, les droites AH, *ah*, ſur les milieux de leurs baſes BC, *bc*; & ces lignes ſont ſemblablement poſées dans ces triangles : de ſorte que j'ai AH. *ah* :: BC. *bc*. Or, les centres de gravité des deux triangles ſont ſur les deux tiers AR, *ar*, des droites AH, *ah* : donc j'ai AR. *ar* :: AH, *ah*; & par conſéquent les deux centres de gravité R, *r*, ſont ſemblablement poſés dans ces triangles. Par la même raiſon les centres de gravité T, *t*, des triangles ſemblables CAD, *cad*, ſont ſemblablement poſés dans ces triangles; & nous avons AT. *at* :: CS. *cs* :: BC. *bc* :: AR.

ar. Et comme l'angle HAC eſt égal à l'angle *hac*, & l'angle CAS, eſt égal à l'angle *cas*; l'angle HAS eſt auſſi égal à l'angle *has*: par conſéquent les triangles RAT, *rat*, ſont ſemblables, puiſqu'ils ont les côtés AR, AT, proportionnels aux côtés *ar*, *at*; & l'angle compris RAT eſt égal à l'angle compris *rat*.

Or, pour trouver le centre de gravité X, commun aux deux triangles BAC, CAD, il faut diviſer RT en deux parties RX, XT, réciproques à ces deux triangles; & pour trouver le centre de gravité commun des triangles *bac*, *cad*, ſemblables aux deux BAC, CAD, il faut auſſi diviſer *rt* en deux parties réciproques aux deux triangles. Donc RX. XT :: *rx*. *xt* : & partant RX. RX+XT :: *rx*. *rx* +*xt*; ou RX. RT :: *rx*. *rt*; ou RX. *rx* :: RT. *rt*. Mais RT. *rt* :: RA. *ra* : donc RX. *rx* :: RA. *ra*; & par conſéquent menant les droites AX, *ax*, les triangles RAX, *rax*, ſont ſemblables & ſemblablement poſés dans les deux figures : & à cauſe de l'angle RAC, égal à l'angle *rac*; l'angle CAX eſt égal à l'angle *cax*.

Le centre de gravité O du triangle AED, & le centre de gravité *o* du triangle AED, ſont auſſi ſemblablement poſés dans ces triangles; c'eſt pourquoi l'angle OAD eſt égal à l'angle *oad*. Or, l'angle CAD eſt égal à l'angle *cad*; & l'angle CAX eſt égal à l'angle *cax* : donc l'angle XAD eſt égal à l'angle *xad*, & l'angle XAO égal à l'angle *xao*. Menant donc les droites XO, *xo*, les triangles XAO, *xao*, ſeront ſemblables : à cauſe de AX. *ax* :: AR. *ar* :: BC. *bc*; & de AO. *ao* :: ED. *ed* :: BC. *bc*. Ainſi les droites XO, *xo*, ſeront ſemblablement poſées dans les deux figures.

Mais pour avoir le centre de gravité de la figure ABCDE; il faut diviſer XO en deux parties XZ, ZO, réciproques au triangle AED & à la ſomme des deux triangles ABC, ACD : & pour avoir le centre de gravité de la figure *abcde*, il faut diviſer la droite *xo* en deux parties *xz*, *zo*, réciproques au triangle *aed* ſemblable au triangle AED, & à la ſomme des deux *abc*, *acd*, ſemblables aux deux ABC, ACD : donc XZ. ZO :: *xz*. *zo*. Ainſi XZ. XZ+ZO ou XO :: *xz*. *xz*+*zo* ou *xo*, ou XZ. *xz* :: XO. *xo*. Mais XO. *xo* :: AO. *ao* :: ED. *ed* :: BC. *bc* : donc XZ. *xz* :: ED. *ed* :: BC. *bc*; & par conſéquent les centres de gravité Z, *z*, ſont ſemblablement poſés dans les deux figures; & ainſi des autres.

300. THÉORÊME III. *Le centre de gravité de toute pyramide & de tout cône eſt ſur la ligne droite menée du centre de la baſe au ſommet; & la diſtance de ce centre au ſommet eſt les trois quarts de la ligne menée au ſommet* (Fig. 125).

DÉMONSTRATION. Tous les plans MNHR, qui compoſent une pyramide, & qui ſont paralleles à ſa baſe BCDH, ſont ſemblables entre eux & à la baſe. Menant donc du centre de gravité X de la baſe la droite XA; cette droite doit paſſer par les centres de gravité de tous les plans MNHR, &c. Car les triangles ſemblables ACD, ANH, donnent CD. NH :: AC. AN : & menant dans la baſe DCDE, & dans le plan MNHR, les droites CX, NV; les triangles ſemblables ACX, ANV, donnent AC. AN :: CX. NV : donc CD. NH :: CX. NV; & partant, à cauſe des angles égaux VNH, XCD, les droites CX, NV, proportionnelles aux côtés homologues CD, NH, des deux plans, ſont ſemblablement poſées dans ces deux plans. Et comme le centre de gravité X de la baſe BCDE eſt poſé à l'extrémité X, il faut néceſſairement que le centre de gravité V du plan MNHR ſoit poſé ſur l'extrémité V de la droite NV, autrement ces deux centres de gravité ne ſeroient pas ſemblablement poſés dans leurs plans. Mais les points X, V, appartiennent à la droite XA : donc tous les centres de gravité des plans qui compoſent la pyramide ſont ſur la droite XA, menée du centre de gravité de la baſe au ſommet; & par conſéquent leur centre de gravité doit être ſur XA. Maintenant,

I°. Si la droite XA *eſt perpendiculaire ſur la baſe*, les diſtances VA, XA, des centres de gravité des plans au ſommet A, ſeront égales aux hauteurs des plans, c'eſt-à-dire aux diſtances des plans au ſommet. Or, les plans étant entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs, forment une ſuite dont l'expoſant eſt 2; & les diſtances de leur centre de gravité au ſommet A forment une autre ſuite dont l'expoſant eſt 1 : donc la ſomme des produits des plans par les diſtances de leurs centres de gravité ou par leurs hauteurs, formera une ſuite dont l'expoſant ſera 2+1 ou 3; & par conſéquent cette ſuite ſera à ſon dernier terme multiplié par le nombre des termes, comme 1 à 3+1 ou 1 à 4. Ainſi, nommant *aa* la baſe BCDE, & *b* la hauteur AX, la ſomme des produits ſera $\frac{1}{4}$ *aabb*. Mais la ſomme des plans eſt $\frac{1}{3}$ *aab* : diviſant donc $\frac{1}{4}$ *aabb* par $\frac{1}{3}$ *aab*, le quotient $\frac{3}{4}$ *b* ſera la diſtance du centre de gravité de la pyramide au ſommet A.

II°. Si la droite XA (*Fig.* 126) *n'eſt pas perpendiculaire ſur la baſe*, j'abaiſſe du ſommet A la perpendiculaire AP. Je tranſporte ſur cette perpendiculaire tous les centres de gravité, par des lignes paralleles à la droite XP qui eſt dans le plan de la baſe : & conſidérant tous les plans comme autant de poids attachés à tous les points du levier AP, je trouverai, comme ci-deſſus, que la ſomme des produits de chaque poids par ſa diſtance eſt $\frac{1}{4}$ *aabb*; & la

ſomme des poids $\frac{1}{3}$ *aab* : diviſant donc la premiere ſomme par la ſeconde, j'aurai $\frac{3}{4}$ *b* pour la diſtance AQ. Tranſportant donc le point Q ſur la droite AX, par une ligne QR parallele à XP, le point R ſera le centre de gravité de tous les plans, ou de la pyramide ; & nous aurons AR = $\frac{3}{4}$ AX : car à cauſe des triangles ſemblables AXP, ARQ, nous avons AP. AQ :: AX. AR. Mais AQ = $\frac{3}{4}$ AP : donc AR = $\frac{3}{4}$ AX.

301. REMARQUE. Comme tous les ſolides à pluſieurs faces peuvent ſe diviſer en pluſieurs pyramides, de même que tous les plans peuvent ſe diviſer en triangles, on trouvera le centre de gravité d'un corps irrégulier, en cherchant les centres de gravité de toutes les pyramides qui les compoſent, & enſuite le centre de gravité commun à toutes les pyramides.

302. THÉORÊME IV. *Le centre de gravité H de la ſurface d'un ſegment ABC de ſphere, eſt ſur le milieu de la ligne BR élevée perpendiculairement ſur le centre R de ſa baſe AC* (Fig. 127).

DÉMONSTRATION. La ſurface du ſegment ABC eſt égale à la ſurface FMNE de la partie FMNE du cylindre circonſcrit, laquelle partie a pour hauteur la droite FM égale à la hauteur RB du ſegment. Or, ſi l'on coupe la partie cylindrique FMNE en deux parties égales par un plan TV parallele à la baſe ; la ſurface cylindrique TMNV ſera égale à la ſurface TFEV, & par conſéquent ces deux ſurfaces ſeront en équilibre autour du plan coupant TV, & leur centre de gravité commun ſera ſur ce plan, c'eſt-à-dire au point H qui eſt le centre de ce plan. Mais la ſurface XBZ que le plan TV coupe ſur le ſegment, eſt égale à la ſurface TMNV, & l'autre ſurface AXZV eſt égale à la ſurface FTVF : donc les deux ſurfaces XBZ, AXZC, ſont égales entre elles ; & partant, elles ſont en équilibre autour du plan, & leur centre de gravité commun eſt ſur ce plan, c'eſt-à-dire au point H.

On prouvera de la même façon que le centre de gravité d'une zone ſphérique AXZC eſt ſur le milieu de la droite RH, menée du centre O du cercle AC qui ſert de baſe inférieure, au centre H du cercle XZ qui eſt la baſe ſupérieure.

303. THÉORÊME V. *Le centre de gravité X d'un ſecteur ABCD de ſphere eſt ſur la droite BP, menée du centre D de la ſphere par le centre P du cercle qui ſert de baſe au ſegment ABC ; & la diſtance DX de ce centre de gravité au centre D de la ſphere, eſt égale aux $\frac{3}{4}$ du rayon BD moins les $\frac{3}{8}$ de la droite PB compriſe*

entre la ſurface de la ſphere & le cercle qui ſert de baſe au ſegment (Fig. 128).

Démonstration. I°. Le ſecteur ſphérique ABCD n'eſt autre choſe qu'une infinité de pyramides qui ont toutes leurs ſommets au centre D de la ſphere, & leurs baſes ſur la ſurface de la ſphere. Ainſi toutes ces pyramides dont les baſes ſont infiniment petites, ont pour hauteur le rayon AD ou BD; & leurs centres de gravité ſont éloignés du ſommet commun A d'une quantité égale à $\frac{3}{4}$ AD ou $\frac{3}{4}$ BD. C'eſt pourquoi ſi je conçois une autre ſphere dont le centre ſoit le même centre D, & dont le rayon DH ſoit égal à $\frac{3}{4}$ AD; la ſurface du ſecteur HRLD, ſemblable au ſecteur ABCD, paſſera par tous les centres de gravité des pyramides: & comme toutes les pyramides ſont en équilibre autour de la droite DB, de même que toutes les parties de la ſurface HRL ſont en équilibre autour de la même droite; il eſt clair que ſi nous concevons les pyramides attachées à leur centre de gravité ſur la ſurface HRL, leur centre de gravité commun ſera le centre de gravité de la ſurface HRL; & par conſéquent ce centre ſera ſur le milieu X de la droite RV.

Or, à cauſe des ſecteurs ſemblables ABCD, HRLD, nous avons AD. HD :: AC. HL :: BP. RV: donc à cauſe de HD $=\frac{3}{4}$ AD, nous avons RV $=\frac{3}{4}$ BP; & par conſéquent RX $=\frac{1}{2}$ RV $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$ BP $=\times\frac{3}{8}$ BP. Mais XD $=$ RD $-$ RX, & RD $=\frac{3}{4}$ BD: donc XD $=\frac{3}{4}$ BD $-\frac{3}{8}$ BP.

II°. Pour *trouver le centre de gravité de l'autre ſecteur AMCD*, je meſure la ſphere entiere & le ſecteur ABCD; & retranchant ce ſecteur de la ſphere entiere, le reſte eſt la valeur du ſecteur AMCD. C'eſt pourquoi prolongeant la droite XD au-delà de P en Z, je dis par regle de trois: comme le ſecteur AMCD eſt au ſecteur ABCD, réciproquement la diſtance XD du centre de gravité X du ſecteur ABCD au centre D de la ſphere, eſt à un quatrieme terme qui ſera la diſtance DZ du centre de gravité Z du ſecteur AMCD au même centre D; car les deux ſecteurs compoſant la ſphere, doivent être en équilibre autour du centre D qui eſt leur centre de gravité commun.

304. Remarque I. Pour *trouver le centre de gravité d'un ſegment ABC* (Fig. 129), je meſure le ſecteur ABCD, & le cône ACD; puis retranchant le cône du ſecteur, le reſte eſt la valeur du ſegment. Je cherche le centre de gravité X du ſecteur, & le centre de gravité Z du cône; puis prolongeant ZX vers B, je dis par regle de trois: le ſegment ABC eſt au cône ACD, réciproque-

ment comme la diſtance ZX du centre de gravité du cône au centre de gravité X du ſecteur, eſt à un quatrieme terme qui ſera la diſtance XV du centre de gravité V du ſegment au même centre X du ſecteur : car le ſegment & le cône doivent être en équilibre autour du centre X du ſecteur qu'ils compoſent.

305. REMARQUE II. Pour *trouver le centre de gravité d'une zone ABCD de ſphere* (Fig. 130), dont la baſe AD eſt un cercle égal au grand cercle de la ſphere, je retranche d'abord de cette zone le cône BCP de même hauteur, & dont la baſe BC eſt égale à la baſe ſupérieure de la zone ; & le reſte eſt une eſpece de cuvette ou d'entonnoir ABPCD. Or, cet entonnoir eſt compoſé d'une infinité de pyramides égales qui ont le ſommet au centre P de la ſphere, & les baſes ſur la ſurface de la zone : ainſi ces pyramides ont toutes les hauteurs égales entre elles & au rayon PB ou AP ; & par conſéquent leurs centres de gravité ſont tous éloignés de leur ſommet commun P, d'une quantité égale à $\frac{3}{4}$ AP ou $\frac{3}{4}$ BP. C'eſt pourquoi ſi je conçois une ſphere dont le centre ſoit le point P, & dont le rayon ſoit PH $= \frac{3}{4}$ AP ; l'entonnoir HRPZV de cette ſphere ſera ſemblable à l'entonnoir ABPCD, & la ſurface de l'entonnoir HRPZV paſſera par tous les centres de gravité des pyramides qui compoſent l'entonnoir ABPCD. Concevant donc toutes ces pyramides comme autant de poids attachés à leur centre de gravité ſur la ſurface HRZV ; leur centre de gravité commun ſera le même que le centre de gravité de la ſurface HRZN : mais le centre de gravité de cette ſurface eſt ſur le milieu O de ſa hauteur TP ; donc le centre de gravité de l'entonnoir ABPCD ſera le point O.

Je cherche le centre de gravité L du cône BPC. Après quoi je partage la droite LO en deux parties LX, XO, qui ſoient entre elles réciproquement comme l'entonnoir ABPCD eſt au cône BPC ; & le point X eſt le centre de gravité de la zone ABCD. Car cette zone étant compoſée de l'entonnoir ABPCD & du cône BPC ; les diſtances des centres de gravité de ces deux parties à leur centre de gravité commun X, doivent leur être réciproques.

Mais ſi la baſe inférieure BC d'une zone BMNC n'eſt pas le grand cercle de la ſphere ; je cherche le centre de gravité L de la zone AMND qui a pour baſe le grand cercle de la ſphere, & le centre de gravité X de la zone ABCD qui a auſſi pour baſe le grand cercle de la ſphere. Je meſure la zone AMND, & la zone ABCD ; & retranchant la petite de la grande, le reſte eſt la zone BMNC.

C'eſt pourquoi je dis par regle de trois : la zone BMNC eſt à la zone ABCD, réciproquement comme la diſtance XL du centre de gravité de la zone ABCD au centre de gravité L de la zone AMND, eſt à un quatrieme terme qui ſera la diſtance LZ du centre de gravité Z de la zone BMNC au centre L de la zone AMND : car les deux zones ABCD, BMNC, doivent être en équilibre autour du centre L de la zone AMND qu'elles compoſent.

306. REMARQUE III. J'aurois encore beaucoup de choſes à dire touchant les centres de gravité des corps. Mais comme cette matiere eſt beaucoup plus épineuſe qu'elle n'eſt utile ; je renvoie les Curieux à la *Meſure des ſurfaces & des ſolides par l'Arithmétique des infinis, & par les centres de gravité*, que je fis imprimer à Paris, chez Jombert, Libraire, en 1740. J'y ai traité ce ſujet de façon à n'y laiſſer rien à deſirer.

DE LA DESCENTE DES CORPS SUR LES PLANS INCLINÉS.

307. Si deux ou pluſieurs corps A, B, C, D (*Fig.* 131), unis par des liens, ſont en équilibre autour d'un centre d'équilibre H, l'effort total de leur peſanteur eſt réuni dans ce point. Car puiſque ces corps ſe contrebalancent autour de H, c'eſt-à-dire que les forces d'un côté ſont égales aux forces de l'autre ; il eſt clair que le point H ſoutient tout leur effort, & qu'ils agiſſent autant ſur ce point que s'ils y étoient tous attachés ; & il faut dire la même choſe de l'effort que toutes les parties d'un corps font autour du centre de gravité de ce corps ; de ſorte qu'on peut conſidérer toutes ces parties comme réunies à ce centre, & faiſant autant d'effort pour le faire deſcendre vers le centre de la terre, qu'elles en font chacune en leur place.

308. THÉORÊME I. *Si un corps AB eſt mis ſur un plan horizontal, de façon que la ligne XQ menée de ſon centre X perpendiculairement à l'horizon, tombe dans la baſe AM, ſur laquelle le corps s'appuie ; ce corps ſubſiſtera ſur ſa baſe ſans tomber : mais ſi la verticale XQ tombe hors de la baſe AM, le corps tombera ſans pouvoir ſubſiſter ſur ſa baſe* (Fig. 132).

DÉMONSTRATION. Dans le premier cas, il eſt clair que ſi le centre de gravité X étoit ſoutenu par un pivot XQ perpendiculaire à l'horizon ; toutes les parties de ce corps étant en équilibre autour de ce point, leur effort ſe réuniroit au point X pour le faire deſcendre

deſcendre ſelon la direction XQ. Or, le pivot XQ réſiſtant ſelon la direction oppoſée à cet effort, le centre X ne ſauroit remuer; & par conſéquent toutes les parties du corps reſteroient en repos autour de lui. Mais le point X eſt ſoutenu par les parties inférieures du ſolide, de la même façon qu'il le ſeroit par le pivot XQ: donc, &c.

Dans le ſecond cas (*Fig.* 133), le centre de gravité X n'eſt ſoutenu par rien. Ainſi l'effort réuni de toutes les parties du corps ne trouvant point d'obſtacles, doit faire baiſſer ce point: ce qui ne peut arriver, à moins que le corps ne ſe renverſe vers MQ.

309. THÉORÊME II. *Si un corps AB* (Fig. 134) *eſt mis ſur un plan incliné MN, en ſorte que la ligne XO menée de ſon centre X perpendiculairement à l'horizon ne paſſe pas par ſa baſe AC; ce corps ſe culbutera ſur le plan incliné: mais ſi la verticale XO paſſe par la baſe AC* (Fig. 135), *le corps gliſſera ſur le plan ſans ſe culbuter.*

DÉMONSTRATION. Dans le premier cas, le corps tomberoit quand même il ſeroit appuyé ſur un plan horizontal MC; à plus forte raiſon tombera-t-il lorſque ſa baſe ſera ſur un plan incliné.

Dans le ſecond cas, l'effort de toutes les parties du corps pouſſe le centre X ſelon la direction verticale XO qui paſſe par la baſe: ainſi, ſi cette baſe étoit horizontale, le corps reſteroit debout ſans remuer. Mais comme la preſſion verticale XO, qui ſe fait ſur la baſe & ſur le plan incliné, eſt oblique à ce plan, je mene du point X la droite XR perpendiculaire ſur le plan incliné: & achevant le parallélogramme RXOS; la force verticale XO eſt compoſée de la force perpendiculaire XR, à laquelle le plan incliné réſiſte invinciblement, & de la force XS, laquelle n'agit point ſur le plan: ainſi le centre de gravité doit prendre la direction XS. Mais il ne ſauroit prendre cette direction, à moins que toutes les parties du corps ne le ſuivent: donc le corps doit gliſſer le long du plan incliné ſelon cette direction.

310. REMARQUE. Comme on peut mettre ſur un plan incliné toutes ſortes de corps, de quelque figure qu'ils ſoient, nous nous bornerons dans la ſuite aux corps ſphériques, tels que le corps A (*Fig.* 136), dont le mouvement doit ſe faire en roulant, à cauſe que la direction verticale AZ de ſon centre de gravité A, tombe toujours hors du point C, où la ſphere touche le plan.

PROPOSITION LII.

311. *Si un corps deſcend ſur un plan incliné BR, il deſcend moins vîte que s'il deſcendoit librement vers le centre de la terre* (*Fig.* 136).

Démonstration. La peſanteur d'un corps le pouſſe ſelon la verticale AZ, laquelle eſt inclinée au plan BR : ainſi menant du point A, la droite AC perpendiculaire au plan BR, & achevant le parallélogramme ACZD, la peſanteur AZ eſt compoſée de la force AC & de la force AD. Or, le plan réſiſte invinciblement à la force AC : donc la peſanteur n'agit plus ſur le corps qu'avec la direction & la force AD, laquelle eſt moindre que la force AZ; & par conſéquent le corps étant pouſſé avec une force moindre que celle qui le pouſſeroit vers le centre de la terre, doit auſſi aller moins vîte.

312. Définition. Nous nommerons *peſanteur abſolue*, la peſanteur d'un corps qui deſcend librement vers le centre de la terre ; & *peſanteur relative*, la force qui reſte à la peſanteur d'un corps pour le faire deſcendre le long d'un plan incliné. Ainſi dans la Figure 136, la peſanteur abſolue du corps B étant exprimée par la verticale AZ qui eſt la diagonale du parallélogramme CADZ, ſa peſanteur relative ſera la force AD, avec laquelle ce corps deſcend le long du plan incliné BR.

313. Corollaire I. *Si un corps A deſcend ſur un plan incliné BR, ſa peſanteur abſolue eſt à ſa peſanteur relative, comme le ſinus droit eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon BRO, que le plan BR fait avec ſa baſe OR horizontale ; ou comme le côté BR du plan incliné eſt à ſa hauteur BO* (Fig. 136).

Démonstration. Je prolonge AZ juſqu'à la baſe OR en S : & les triangles rectangles ACZ, SZR, ſont ſemblables ; à cauſe des angles aigus CZA, SZR, oppoſés au ſommet : donc AZ. CZ ou AD :: ZR. ZS. Mais à cauſe des triangles ſemblables SZR, OBR, nous avons ZR. ZS :: BR. BO : donc AZ. AD :: BR. BO ; c'eſt-à-dire, la peſanteur abſolue AZ eſt à la peſanteur relative AD, comme la longueur BR du plan incliné eſt à ſa hauteur BO.

Or, dans le triangle rectangle BRO, la longueur BR eſt à la hauteur BO, comme le ſinus de l'angle droit BOR eſt au ſinus de l'angle BRO de l'inclinaiſon du plan BR ſur ſa baſe : donc la peſanteur abſolue eſt à la peſanteur relative, comme le ſinus droit eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan ſur la baſe.

314. REMARQUE. Plus l'angle d'inclinaiſon BRO diminue, plus le ſinus de cet angle devient petit par rapport au ſinus droit; & par conſéquent plus la peſanteur relative AD diminue par rapport à la peſanteur abſolue, laquelle eſt toujours la même : ainſi, à meſure que BR eſt plus incliné à l'horizon, moins le corps deſcend vîte ſur ce plan.

315. COROLLAIRE II. *Si un corps A deſcend ſucceſſivement le long de différents plans diverſement inclinés à l'horizon BC, CD, EC, &c ; les peſanteurs relatives ſur ces différents plans ſont entre elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon BCH, DCH, ECH, des plans inclinés* (Fig. 137).

DÉMONSTRATION. Nommant P la peſanteur abſolue du corps, S le ſinus total, R la peſanteur relative du corps A ſur le plan DC, *r* ſa peſanteur relative ſur le plan BC, V le ſinus de l'angle d'inclinaiſon DCH du plan DC, & *u* le ſinus de l'angle d'inclinaiſon BCH du plan BC; nous aurons par rapport au plan DC, P. R :: S. V, ou P. S :: R. V; & par rapport au plan BC, P. *r* :: S. *u*, ou P. S :: *r*. *u* : donc R. V :: *r*. *u*; & partant R. *r* :: V. *u*; c'eſt-à-dire, la peſanteur relative ſur le plan DC, eſt à la peſanteur relative ſur le plan BD, comme le ſinus V de l'angle d'inclinaiſon du plan DC, eſt au ſinus *u* de l'angle d'inclinaiſon du plan BC; & ainſi des autres.

PROPOSITION LIII.

316. *Si une puiſſance P ſoutient un corps A ſur un plan incliné BC avec une direction PA parallele à BC, en ſorte que la puiſſance & le poids ſoient en équilibre, la puiſſance eſt au poids comme la peſanteur relative eſt à la peſanteur abſolue, ou comme la hauteur du plan incliné eſt à ſa longueur BC, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan eſt ou ſinus droit* (Fig. 138).

DÉMONSTRATION. Du centre A je mene la verticale AZ qui coupe le plan incliné en Z, & la droite AC perpendiculaire ſur ce plan; & achevant le parallélogramme ACZD, la peſanteur abſolue eſt à la relative, comme AZ eſt à AD. Ainſi puiſque le corps n'eſt mu que par la peſanteur relative AD, la puiſſance P qui tire le corps avec la direction AP directement oppoſée, & qui eſt en équilibre avec AD, doit être exprimée par la droite AM égale à AD; & par conſéquent MA. AZ :: AD. AZ; c'eſt-à-dire, la puiſſance P eſt à la peſanteur abſolue AZ, ou au poids A, comme la peſanteur relative AD eſt à la peſanteur abſolue AZ.

Or la peſanteur relative eſt à l'abſolue, comme la hauteur du plan

incliné eſt à ſa longueur, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus total : donc la puiſſance P eſt au poids A dans ces mêmes raiſons.

317. REMARQUE I. Si au lieu d'une puiſſance qui tire le corps de A vers P, on mettoit une puiſſance qui le repouſſât de D vers A ſelon la direction DA, & que la puiſſance & le poids fuſſent en équilibre ; la puiſſance ſeroit au poids encore, comme la peſanteur relative eſt à la peſanteur abſolue, &c : ce qui eſt évident.

318. REMARQUE II. Si au lieu d'une puiſſance qui ſoutient le corps, on met un poids R (*Fig.* 139) qui tire le corps ſelon la direction XA parallele au plan incliné BC, par le moyen d'une poulie X ſur laquelle paſſe la corde d'où le poids R pend ; & que le poids R & le poids A ſoient en équilibre ; le poids R eſt encore au poids A, comme la peſanteur relative de A eſt à ſa peſanteur abſolue, ou, &c. Car l'effet du poids R ſera encore exprimé par la droite MA égale à la droite AD qui exprime la peſanteur relative du corps A : ainſi comme le poids R, qui n'eſt ſur aucun plan incliné, tend vers le centre de la terre avec toute ſa force ou avec toute ſa peſanteur abſolue, il eſt clair que le poids total de R doit être au poids total de A, comme MA ou AD eſt à AZ.

PROPOSITION LIV.

319. *Soit ſur un plan incliné BC, un corps ſphérique A dont la peſanteur abſolue eſt exprimée par la verticale AZ, & la peſanteur relative par la droite AD parallele au plan incliné BC. Si l'on prolonge AD du côté oppoſé ; & qu'après avoir fait MA=AD, & mené par les points M, D, les droites PQ, ZK, paralleles à la droite EG perpendiculaire au plan BC au point d'attouchement G, on tire du point A des lignes droites ſur tous les points de PQ, & d'autres lignes ſur tous les points de ZK* (Fig. 140) :

Je dis que toutes ces lignes, à l'exception de celles qui paſſent par l'angle QAE, & par l'angle GAZ oppoſé au ſommet à l'angle QAE, exprimeront des puiſſances, chacune deſquelles dans ſa direction ſera en équilibre avec le corps A : c'eſt-à-dire que les puiſſances AH, AL, AF, &c, ſeront en équilibre en tirant le corps vers la droite PQ ſur laquelle elles ſe terminent ; & les puiſſances AK, AN, AD, &c, qui ſe terminent ſur ZK, ſeront auſſi en équilibre en pouſſant le corps vers la même droite PQ.

DÉMONSTRATION. I°. Nous ſavons que la peſanteur abſolue AZ eſt compoſée de la force AG à laquelle le plan réſiſte invinciblement,

& de la force AD parallele au plan incliné BC : or la direction de la puiſſance AH qui tire le corps vers H étant oblique à la force AD, eſt compoſée des deux HR, HM, ou des deux MA, AR, dont la premiere MA tirant de A vers M, eſt égale & oppoſée à la peſanteur relative AD ; & l'autre AR tirant de A vers R, eſt oppoſée à la force AG, mais moindre qu'elle. Ainſi la force MA eſt en équilibre avec la peſanteur relative AD ; & la force AR ne détruiſant qu'une partie de la force AG, ne peut empêcher le corps A de s'appuyer ſur le plan : donc la force AH, équivalente aux deux AM, AR, eſt en équilibre avec le corps A. On prouvera la même choſe de toutes les puiſſances qui ſont entre la direction AM parallele au plan incliné, & la direction verticale AQ, laquelle eſt égale à la peſanteur abſolue AZ, à cauſe qu'elle eſt compoſée de la force AE qui tire de A vers E, & de la force AM qui tire de A vers M ; & que ces deux forces AE, AM, ſont égales & oppoſées chacune à chacune aux deux forces AG, AD, qui compoſent la peſanteur abſolue AZ.

Les puiſſances AF, AP, &c, qui paſſent dans l'angle TAG, ſont auſſi en équilibre avec le corps A : car la puiſſance FA eſt compoſée de la force FM & de la force F*p*, ou de la force A*p* qui tire de A vers *p*, & de la force MA qui tire de M vers A. Or la force MA eſt en équilibre avec la peſanteur relative AD, & la force A*p* ne fait qu'affermir davantage le corps ſur le plan incliné : donc, &c.

Les puiſſances qui paſſent dans l'angle EA*t*, ſont égales chacune à chacune à celles qui paſſent dans l'angle TAG, & font le même effet en pouſſant le corps A, que les autres en le tirant : donc ces puiſſances ſont encore en équilibre avec le corps A. Par la même raiſon celles qui paſſent par l'angle *t*AZ, oppoſé au ſommet à l'angle TAQ, ſont auſſi en équilibre avec le corps A, puiſqu'elles font le même effet en pouſſant ce corps, que les puiſſances de l'angle TAQ en le tirant.

II°. Maintenant les puiſſances qui ſont dans l'angle QAE, ne ſauroient être en équilibre avec le corps A ; car la puiſſance AX eſt compoſée de la force XM ou AY qui tire de A vers Y, & de la force YX ou AM qui tire de A vers M : or MA eſt égale & oppoſée à la peſanteur relative AD. Mais AY eſt plus grande que AG ſon oppoſée : donc la force AX compoſée de deux forces AY, AM, eſt plus grande que la peſanteur abſolue ; & par conſéquent la force AX doit enlever le corps : & ainſi des autres.

Que ſi les puiſſances qui paſſent dans l'angle QAE pouſſoient le

corps A, au lieu de le tirer ; il arriveroit que ces puiſſances augmenteroient la preſſion du corps ſur le plan incliné BC, & que ce corps deſcendroit deux fois plus vîte. Car la puiſſance XA, pouſſant de X vers A, eſt compoſée de la force XM ou YA qui pouſſe de Y vers A, & de la force XY ou MA qui pouſſe de M vers A : ainſi XM augmenteroit la preſſion du corps A au point G, & MA joint à AD donneroit au corps une vîteſſe double de celle que la peſanteur relative AD lui donne. La même choſe doit ſe dire des puiſſances qui paſſent dans l'angle GAZ : car celles-ci ſont égales chacune à chacune à celles qui paſſent par l'angle QAE, & font le même effet en tirant le corps, que les autres feroient en le pouſſant.

Pour ce qui regarde la puiſſance AE en particulier, il eſt clair que ſi cette puiſſance, en tirant de A vers E, eſt égale à la force AG qui eſt l'une des compoſantes de la peſanteur ; la preſſion du corps A ſur le plan ceſſera : mais la force AD, qui eſt l'autre compoſante, agira toujours, & par conſéquent le corps A ne ceſſera de deſcendre. Que ſi la puiſſance AE eſt moindre que AG, la preſſion du corps A ſur le plan incliné diminuera, & le corps deſcendra encore. Enfin ſi AE eſt plus grande que AG, la puiſſance AE enlevera le corps A de deſſus le plan ; mais AD le fera toujours deſcendre ſelon ſa direction : car la force AE n'eſt compoſée d'aucune force qui ſoit contraire en tout ou en partie à la force AD. Que ſi AE pouſſoit le corps de E vers A, elle augmenteroit la preſſion du corps ſur le plan à proportion de ſa grandeur : mais quelque grande qu'elle pût être, elle n'empêcheroit jamais le corps de deſcendre ſelon la direction AD ; & il faut dire la même choſe de celle qui tireroit ſelon la direction GA.

320. COROLLAIRE I. *Si l'on prolonge les directions des puiſſances dont nous venons de parler juſqu'à ce qu'elles coupent le plan incliné ; par exemple, ſi l'on prolonge HA juſqu'à ce qu'elle coupe le plan incliné BC en* h, *où elle fera un angle* HhB *que nous nommerons* angle de traction :

Je dis que chaque puiſſance ſera à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon BCO du plan ſur ſa baſe, eſt au ſinus de complément à l'angle droit de l'angle HhB *de traction* (Fig. 141).

DÉMONSTRATION. I°. Je prolonge AZ juſqu'à la baſe OC en *a*. Les triangles GAZ, *a*ZC, étant ſemblables, à cauſe de l'angle aigu GZA, égal à l'angle aigu *a*ZC, qui lui eſt oppoſé au ſommet ;

l'angle GAZ eſt égal à l'angle d'inclinaiſon ZC*a* du plan BC, ſur la baſe OC; & dans le triangle rectangle GA*h*, l'angle GA*h* eſt l'angle du complément à un droit de l'angle de traction G*h*A. Ainſi, prenant pour ſinus total la droite AG, & menant du point G la perpendiculaire G*g* ſur AZ, & la perpendiculaire G*m* ſur A*h*, la droite G*g* ſera le ſinus de l'angle GAZ d'inclinaiſon du plan ſur ſa baſe; & la droite G*m* ſera le ſinus du complément GA*h* à un droit de l'angle de traction G*h*A. Cela poſé,

Le triangle rectangle HMA eſt ſemblable au triangle rectangle GA*h*, & celui-ci eſt ſemblable au triangle GA*m* : donc HMA eſt ſemblable à GA*m*; & nous avons HA. MA :: AG. G*m*. Mais MA =AD=GZ : donc HA. GZ :: AG. G*m*; & partant HA×G*m*= GZ×AG.

Les triangles ſemblables AZG, AG*g*, donnent AZ. GZ :: AG. G*g* : donc AZ×G*g*=GZ×AG. Mais nous venons de trouver HA× G*m*=GZ×AG : donc HA×G*m*=AZ×G*g*; & partant HA. AZ :: G*g*. G*m*; c'eſt-à-dire, la puiſſance H A eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A, comme le ſinus G*g* de l'angle d'inclinaiſon du plan eſt au ſinus G*m* de l'angle GA*m*, complément à l'angle droit de l'angle G*h*A de traction. Le même ſe prouvera de toutes les puiſſances compriſes entre la droite TA parallele au plan incliné, & la verticale ZQ; & auſſi de toutes celles qui paſſent par l'angle ZA*t* oppoſé au ſommet à l'angle TAQ; car celles-ci font le même effet en pouſſant le corps, que celles qui paſſent par l'angle TAQ, & qui tirent le corps.

II°. Quant aux puiſſances qui paſſent par l'angle TAH (*Fig.* 142), je mene de même la droite G*m* perpendiculaire ſur AL, & la droite G*g* perpendiculaire ſur AZ; & prenant pour ſinus total la droite AG, j'ai comme ci-deſſus la droite G*g* pour le ſinus de l'angle GA*g* égal à l'angle d'inclinaiſon BCO, & la droite G*m* pour le ſinus de l'angle GAL, complément à l'angle droit de l'angle ALG de traction. Or les triangles rectangles FAM, LGA, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle aigu MAF égal à l'angle aigu ALG qui lui eſt alterne; & le triangle rectangle LAG eſt ſemblable au triangle rectangle *m*GA, à cauſe de *m*G perpendiculaire ſur l'hypothénuſe LA : donc les triangles FMA, *m*GA, ſont ſemblables, & donnent FA. MA ou GZ :: AG. G*m*; & partant FA×G*m*=GZ×AG.

De même, les triangles rectangles ſemblables AGZ, AG*g*, donnent AZ. ZG :: AG. G*g* : donc AZ×G*g*=GZ×AG; & partant FA×G*m*=AZ×G*g*. D'où je tire FA. AZ :: G*g*. G*m*; c'eſt-à-dire encore, la puiſſance FA eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A,

comme le ſinus G*g* de l'angle d'inclinaiſon du plan ſur ſa baſe, eſt au ſinus G*m* de l'angle GA*m*, complément à l'angle droit de l'angle de traction ALG : & il eſt viſible que les puiſſances qui paſſent par l'angle EA*t* oppoſé au ſommet à l'angle TAG, ſont auſſi au poids, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus du complément à l'angle droit de l'angle de traction ; car ces puiſſances en pouſſant le corps, font le même effet que les autres en le tirant.

321. COROLLAIRE II. Il ſuit de là que quoiqu'on puiſſe dire que toutes les puiſſances obliques au plan incliné BC, & qui ſont en équilibre avec le corps A, ſont à ce corps, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus du complément de l'angle de traction ; cependant *il ne s'enſuit pas que toutes les puiſſances qui ſont au poids, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de complément de l'angle de traction, ſoient en équilibre avec le corps;* car nous avons vu que les puiſſances qui paſſent par les angles QAE, GAZ, ne peuvent être en équilibre avec A.

322. COROLLAIRE III. *Quand la direction FA eſt horizontale ou parallele à la baſe OC; la puiſſance FA eſt à la peſanteur abſolue AZ ou au poids A, comme la hauteur BO du plan incliné eſt à ſa baſe OC* (Fig. 143).

Car alors le ſinus G*m* de l'angle de complément de l'angle de traction eſt égal à la droite A*g*, laquelle dans le triangle AG*g* eſt le ſinus de l'angle AG*g*, complément à l'angle droit de l'angle GA*g* égal à l'angle d'inclinaiſon BCO. Ainſi l'angle AG*g* eſt égal à l'angle OBC du triangle OBC, lequel eſt auſſi le complément à l'angle droit de BCO : donc puiſque la puiſſance eſt au poids, comme G*g* eſt à A*g*, & que G*g*. A*g* :: BO. OC ; la puiſſance eſt auſſi au poids, comme la hauteur BO eſt à la baſe OC.

323. COROLLAIRE IV. *De toutes les puiſſances qui ſont en équilibre avec le corps A, la plus petite eſt celle dont la direction MA eſt parallele au plan incliné, & les autres ſont d'autant plus grandes qu'elles s'éloignent plus de part & d'autre de celle-ci.* Ce qui eſt évident par la ſeule inſpection de la Figure 140, après ce qui a été dit ci-deſſus (*Fig.* 140).

PROPOSITION LV.

324. *Si deux corps B, A, ſe tiennent en équilibre ſur deux plans inclinés CE, ED, avec des directions BH, HA, paralleles aux plans inclinés ; ces deux corps ſont entre eux réciproquement comme les ſinus*

ſinus des angles d'inclinaiſon de leurs plans; c'eſt-à-dire, B eſt à A, comme le ſinus de l'angle CDE eſt au ſinus de l'angle DEC (Fig. 144).

DÉMONSTRATION. Suppoſons qu'une puiſſance miſe en H ſoit en équilibre avec le corps A; & nommons V la puiſſance H, S le ſinus de l'angle d'inclinaiſon CDE, *s* le ſinus de l'angle d'inclinaiſon CED, & R le ſinus total; nous aurons V. A :: S. R (316); & partant V×R=S×A.

Les deux corps A & B étant en équilibre ont des forces égales; & par conſéquent la même V qui ſoutiendroit le corps A ſelon la direction HA, ſoutiendroit auſſi le corps B avec la direction HB: mettant donc cette puiſſance au lieu du corps A, nous aurons V. B :: *s*. R; & partant V×R=B×*s*. Mais nous venons de trouver V×R=S×A: donc B×*s*=S×A; d'où je tire B. A :: S. *s*.

Si les hauteurs de deux plans inclinés ſont égales, les deux corps ſont entre eux comme les longueurs des plans inclinés. Car, à l'égard du plan incliné CD, nous aurons S. R :: CP. CD (316); & partant V. A :: CP. CD, ce qui donne V×CD=A×CP, ou V=$\frac{A\times CP}{CD}$; & à l'égard du plan incliné CE, nous aurons *s*. R :: CP. CE: donc V. B :: CP. CE; ce qui donne V×CE=B×CP, ou V=$\frac{B\times CE}{CP}$: donc $\frac{A\times CP}{CD}=\frac{B\times CP}{CE}$, ou $\frac{A}{CD}=\frac{B}{CE}$. Ainſi multipliant par CD & par CE, nous aurons A×CE=B×CD: d'où je tire A. B :: CD. CE.

325. COROLLAIRE. *Si deux corps B, A, ſe tiennent en équilibre ſur deux plans inclinés EC, HD, avec une direction parallele à la baſe CD; les deux corps B, A, ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon inverſe des ſinus des angles C, D, d'inclinaiſon des plans, & de la raiſon directe des ſinus des angles de complément des angles de traction* (Fig. 145).

DÉMONSTRATION. Nommons S le ſinus de l'angle ECD, *s* le ſinus de l'angle HDC, T le ſinus de complément de l'angle de traction BMC, *t* le ſinus de complément de l'angle de traction AND, & V la puiſſance qui ſoutiendroit le corps A en équilibre avec la direction MA; nous aurons donc V. A :: *s*. *t*; & partant V*t*=A*s*, ou V=$\frac{As}{t}$. Or, la même puiſſance V ſeroit auſſi en équilibre avec B: donc V. B :: S. T (320); & par conſéquent VT=BS, & V=$\frac{BS}{T}$; donc $\frac{AS}{t}=\frac{BS}{T}$, ou A*s*T=BS*t*; d'où je tire B. A :: *s*T. S*t*. Or la raiſon T*s*, S*t*, eſt compoſée de

la raiſon s, S, qui eſt l'inverſe de la raiſon des ſinus S, s; & de la directe T, t, des ſinus des compléments des angles de traction. Donc, &c.

Si les hauteurs EP, HR, des plans inclinés ſont égales, les corps B, A, ſont entre eux comme les baſes CP, RD, de leurs plans inclinés. Car à l'égard du plan incliné HD, nous aurons V. A :: HR. RD (322): donc $V=\frac{A\times HR}{RD}$; & à l'égard du plan incliné EC, nous aurons V. B :: EP ou HR. PC; & partant $V=\frac{B\times HR}{PC}$: donc $\frac{A\times HR}{RD}=\frac{B\times HR}{PC}$, ou $\frac{A}{RD}=\frac{B}{PC}$; ou enfin, $A\times PC=B\times RD$: donc B. A :: PC. RD.

326. COROLLAIRE II. Si les deux corps B, A (*Fig.* 146), étoient en équilibre ſur les plans inclinés EC, ED, avec des directions HB, HA, obliques au plan; on trouveroit comme ci-deſſus (324), que les deux corps A & B ſeroient entre eux en raiſon compoſée de la raiſon inverſe des ſinus des angles d'inclinaiſon, & de la raiſon directe des ſinus des angles de complément des angles de traction.

PROPOSITION LVI.

327. *Un corps qui deſcend le long d'un plan incliné, deſcend avec un mouvement uniformément accéléré* (Fig 147).

DÉMONSTRATION. La peſanteur abſolue d'un corps A qui deſcend le long d'un plan incliné BC, eſt à ſa peſanteur relative, comme la longueur BC du plan eſt à ſa hauteur BO (313); c'eſt-à-dire que ſi le corps deſcendant librement vers le centre de la terre décrivoit dans un certain temps un eſpace égal à BO, cet eſpace ſeroit à l'eſpace BA que le même corps décriroit dans le même temps ſur le plan incliné, comme la longueur BC eſt à la hauteur BO.

Suppoſant donc que le corps tombant librement employât deux temps à parcourir BO; l'eſpace BP parcouru dans le premier temps, ſeroit à l'eſpace BO parcouru dans les deux premiers, comme le quarré 1 du premier temps eſt au quarré 4 des deux premiers. Or, leſpace BP parcouru dans le premier temps, eſt à l'eſpace BR que le corps parcourroit dans le même temps ſur le plan incliné, comme BC eſt à BO; c'eſt-à-dire BP. BR :: BC. BO : & l'eſpace BO parcouru dans les deux premiers temps, eſt à l'eſpace BA que le corps parcourroit dans les deux premiers temps, auſſi comme BC eſt à BO; c'eſt-à-dire, BO. BA :: BC. BO : donc BP. BR :: BO. BA,

ou BP. BO :: BR. BA. Mais BP. BO :: 1. 4 : donc BR. BA :: 1. 4 ; & par conſéquent le mouvement du corps A le long du plan incliné BC eſt accéléré, puiſque les eſpaces parcourus BR, BO, ſont entre eux comme les quarrés 1, 4, des temps 1, 2, employés à les parcourir.

328. COROLLAIRE I. Donc, *tout ce que nous avons dit à l'égard du mouvement accéléré des corps qui deſcendent librement vers le centre de la terre doit ſe dire auſſi du mouvement accéléré des corps qui deſcendent le long des plans inclinés.* Ainſi,

I°. Les eſpaces parcourus à la fin d'un premier temps, des deux premiers, des trois premiers, &c, ſont entre eux comme les quarrés des temps employés à les parcourir.

II°. Les vîteſſes acquiſes à la fin des eſpaces, ſont entre elles comme les racines quarrées des eſpaces, ou comme les temps employés à parcourir les eſpaces.

III°. Si le corps ſe mouvoit avec une vîteſſe uniforme, égale à la vîteſſe acquiſe à la fin d'un eſpace parcouru pendant un certain temps ; ce corps dans un temps égal à celui-là, parcourroit un eſpace double.

IV°. Enfin, ſi le corps avec la vîteſſe acquiſe à la fin du plan incliné, remontoit le long de ce plan ; il monteroit auſſi haut qu'il ſeroit deſcendu dans un temps égal à celui qu'il auroit employé à deſcendre.

329. COROLLAIRE II. *La vîteſſe qu'un corps A a acquiſe en parcourant ſur un plan incliné BC un eſpace BA dans un temps déterminé, eſt à la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en deſcendant librement vers le centre de la terre dans un temps égal, comme la hauteur BO du plan incliné eſt à ſa longueur BC* (Fig. 147).

DÉMONSTRATION. L'eſpace BO que le corps auroit parcouru en deſcendant librement, eſt à l'eſpace BA parcouru dans le même temps ſur le plan incliné, comme BC eſt à BO. Or avec la vîteſſe acquiſe à la fin de l'eſpace BO, le corps mu uniformément parcourroit un eſpace double de BO dans un temps égal à celui qu'il a employé à deſcendre le long de BO (par les regles du mouvement accéléré) ; & avec la vîteſſe acquiſe à la fin de BA, il parcourroit uniformément un eſpace double de BA : donc les eſpaces parcourus dans un même temps dans ces deux mouvements uniformes, ſeroient entre eux comme 2BO eſt à 2BA, ou comme BO eſt à BA ; & par conſéquent comme la longueur BC eſt à la hauteur BO. Mais dans le mouvement uniforme les vîteſſes ſont comme les eſpaces parcourus

dans les mêmes temps : donc les deux vîteſſes uniformes ſeroient entre elles comme BC eſt à BO. Or ces deux vîteſſes ſont les mêmes que les vîteſſes acquiſes à la fin des eſpaces BO, BA : donc la vîteſſe acquiſe à la fin de BA eſt à la vîteſſe à la fin de BO parcouru dans un même temps que BA, comme la hauteur BO du plan eſt à ſa longueur BC, ou comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus total (316).

330. PROBLÊME I. *Connoiſſant l'eſpace BP qu'un corps parcourroit en deſcendant librement vers le centre de la terre pendant un certain temps ; connoître l'eſpace qu'il doit parcourir ſur un plan incliné BC pendant le même temps* (Fig. 147).

SOLUTION. Du point P, j'abaiſſe ſur le plan incliné la perpendiculaire PR ; & l'eſpace BR eſt l'eſpace demandé. Car les triangles rectangles PBR, OBC, ſont ſemblables, à cauſe de l'angle aigu commun PBR. Donc PB. BR :: BC. BO.

331. PROBLÊME II. *Connoiſſant l'eſpace AH qu'un corps parcourroit en deſcendant librement vers le centre de la terre pendant un certain temps ; connoître les eſpaces qu'il parcourroit s'il deſcendoit ſucceſſivement ſur des plans inégalement inclinés AM, AN, AP, &c, pendant des temps égaux à celui qu'il a employé à deſcendre* (Fig. 148).

SOLUTION. Du point H, je mene ſur les plans inclinés les perpendiculaires HR, HS, HT, &c ; & les droites AR, AS, AT, &c, ſont les eſpaces demandés. Car les triangles ſemblables AMH, ARH, donnent AR. AH :: AH. AM : donc l'eſpace AR eſt parcouru ſur le plan incliné AM, dans un temps égal à celui que le corps a employé à parcourir AH : & on prouvera de même à l'égard du plan incliné AN, que AS. AH :: AH. AN ; & ainſi des autres.

332. COROLLAIRE I. *Les vîteſſes acquiſes à la fin des eſpaces AR, AS, AT, &c, ſont entre elles comme ces eſpaces* (Fig. 148).

DÉMONSTRATION. Nommant V la vîteſſe acquiſe à la fin de AH, T la vîteſſe acquiſe à la fin de AR, & X la vîteſſe acquiſe à la fin de AS ; nous aurons à l'égard du plan incliné AM, T. V :: RA. AH (329), & T × AH = V × RA ; & à l'égard du plan incliné AN, nous aurons X. V :: AS. AH, ce qui donne X × AH = V × AS : donc T × AH. X × AH :: V × RA. V × AS, ou en diviſant par AH la premiere raiſon, & par V la ſeconde, T. X :: AR. AS.

Et on prouvera de la même façon que ces vîteſſes ſont entre elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon des plans. Car nommant

R le ſinus total, M l'angle d'inclinaiſon du plan AM, & *m* l'angle d'inclinaiſon du plan AN ; nous aurons à l'égard du plan AM, T. V :: M. R (329), ou TR = VM ; & à l'égard du plan AN, nous aurons X. V :: *m*. R, ou XR = V*m* : donc TR. XR :: VM. V*m*, ou T. X :: M. *m*.

333. Corollaire II. Tous les triangles HAR, HAS, HAT, &c, étant rectangles ſur la même baſe AH, le cercle décrit avec le diametre AH paſſe par tous les ſommets R, S, T, &c, de ces triangles : ce qui nous fait voir que ſi de l'extrémité A du diametre AH d'un cercle AHB on mene tant de cordes AR, AS, AT, &c, que l'on voudra ; *un corps n'emploieroit pas plus de temps à deſcendre le long du diametre AH, qu'à deſcendre le long de la corde AR, ou de corde AS, ou de la corde AT, &c ;* c'eſt-à-dire que *toutes les cordes ſeroient parcourues dans des temps égaux à celui que le corps emploieroit à tomber de la hauteur AH* (Fig. 148).

Bien plus, ſi de l'autre extrémité H du diametre, on mene tant de cordes HR, HS, HT, &c, que l'on voudra ; *chacune de ces cordes ſera encore parcourue dans un temps égal à celui que le corps emploieroit à tomber de la hauteur AH :* ce que je démontre ainſi.

Du point A je mene la tangente AL : je prolonge la corde HR juſqu'à ce qu'elle coupe la tangente en L ; & du point L j'abaiſſe la perpendiculaire LI ſur HM. Quand le corps mis au point R du plan incliné LH aura parcouru l'eſpace RH ; cet eſpace ſera à celui qu'il auroit parcouru dans le même temps s'il étoit deſcendu librement vers le centre de la terre, comme la hauteur LI ou AH du plan incliné eſt à ſa longueur LH : or les triangles rectangles LAH, RAH, étant ſemblables, donnent AH. LH :: RH. AH : donc l'eſpace RH que le corps a parcouru ſur LH, eſt à celui qu'il auroit parcouru dans le même temps en deſcendant librement vers le centre de la terre, comme RH eſt à AH. Ainſi nommant *x* l'eſpace que le corps auroit parcouru librement, nous aurons RH. *x* :: RH. AH ; & par conſéquent *x* = AH ; c'eſt-à-dire AH, eſt l'eſpace que le corps auroit parcouru en tombant vers le centre de la terre pendant un temps égal à celui qu'il a employé à parcourir la corde RH ; & on prouvera la même choſe à l'égard des autres cordes AS, AT, &c.

PROPOSITION LVII.

334. *La vîteſſe qu'un corps a acquiſe lorſqu'il eſt deſcendu le long d'un plan incliné AM eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé librement de la hauteur AH de ce plan* (Fig. 148).

DÉMONSTRATION. Pour abréger le diſcours, je nommerai uAR la vîteſſe acquiſe à la fin de l'eſpace AR, uAM la vîteſſe acquiſe à la fin de l'eſpace AM, & uAH la vîteſſe acquiſe par la chûte AH. Nous avons uAR. uAH :: AR. AH (329); & à cauſe que les eſpaces AR, AM, ſont parcourus d'un mouvement accéléré, nous avons auſſi uAR. uAM :: $\sqrt{}$AR. $\sqrt{}$AM. Or les triangles ſemblables RAH, MAH, donnent RA. AH :: AH. AM, donc $\overline{\text{RA}}$. $\overline{\text{AH}}$:: RA. AM; & tirant la racine quarrée, nous avons RA. AH :: $\sqrt{}$AR. $\sqrt{}$AM: donc uAR. uAM :: RA. AH. Or nous avons auſſi trouvé uAR. uAH :: RA. AH: donc uAR. uAM :: uAR. uAH; & par conſéquent uAM=uAH.

335. COROLLAIRE I. De là il ſuit que ſi un ou pluſieurs corps deſcendent le long de pluſieurs plans diverſement inclinés AM, AN, AP, &c, dont la hauteur AH eſt la même; *les vîteſſes acquiſes à la fin de ces plans ſont toutes égales entre elles*, puiſqu'elles ſont égales chacune à la vîteſſe acquiſe par la chûte AH.

336. COROLLAIRE II. De là il ſuit encore que ſi un corps deſcend le long de pluſieurs plans diverſement inclinés AM, MN, NR, &c; *la vîteſſe acquiſe à la fin du dernier plan en R eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur AV égale à la ſomme des hauteurs des plans* (Fig. 149).

DÉMONSTRATION. Du point A je mene AT parallele à l'horizon, & je prolonge les plans NM, RN, juſqu'à ce qu'ils coupent AT aux points H, T. La vîteſſe acquiſe à la fin du plan AM eſt égale à la vîteſſe qu'il auroit acquiſe en deſcendant le long du plan MH, dont la hauteur AS eſt la même que celle du plan AM. Ainſi ce corps continuant à ſe mouvoir le long de MN, la vîteſſe acquiſe à la fin des deux plans AM, MN, ſera la même que la vîteſſe qu'il auroit acquiſe s'il étoit deſcendu le long de NH. Mais celle-ci eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit deſcendu le long du plan NT, à cauſe que les deux plans NT, NH, ont la même hauteur AP: donc la vîteſſe acquiſe le long des deux plans AM, MN, eſt égale à celle qui auroit été acquiſe le long du ſeul plan TN. C'eſt pourquoi ce corps continuant à ſe mouvoir le long de NR, ſa vîteſſe

acquiſe en R le long des trois plans AM, MN, NR, eſt égale à la vîteſſe qu'il auroit acquiſe le long de TR. Mais celle-ci eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de la hauteur AV du plan TR. Donc, &c.

337. COROLLAIRE III. Toute courbe AM (*Fig.* 150) n'étant autre choſe qu'un polygone d'une infinité de côtés qui ſont des plans diverſement inclinés, il s'enſuit que *la vîteſſe qu'un corps a acquiſe en deſcendant le long d'une courbe, eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe s'il étoit tombé de la hauteur AV de cette courbe.*

PROPOSITION LVIII.

338. *Le temps qu'un corps emploie à parcourir un plan incliné AM, eſt au temps qu'il emploieroit à parcourir la hauteur AH, comme la hauteur AM du plan incliné eſt à la hauteur AH* (Fig. 148).

DÉMONSTRATION. Du point H, je mene ſur le plan la perpendiculaire HR, & l'eſpace AR eſt l'eſpace que le corps parcourroit ſur le plan incliné dans un temps égal à celui qu'il emploieroit à tomber de la hauteur AH (330). Or à cauſe que le mouvement ſur le plan incliné eſt uniformément accéléré, le temps employé à parcourir l'eſpace AR, eſt au temps employé à parcourir l'eſpace AM, comme $\sqrt{AR}$ eſt à $\sqrt{AM}$: donc le temps employé à tomber de la hauteur AH, eſt auſſi au temps employé à parcourir la longueur AM, comme $\sqrt{AR}$ eſt à $\sqrt{AM}$.

Mais à cauſe des triangles ſemblables RAH, MAH, nous avons AR. AH :: AH. AM : donc $\overline{AR}$. $\overline{AH}$ :: AR. AM; & partant AR. AH :: $\sqrt{AR}$. $\sqrt{AM}$. Ainſi le temps employé à parcourir la hauteur AH, eſt au temps de la deſcente le long de AM, comme AR eſt à AH, ou comme AH eſt à AM; & par conſéquent le temps de la deſcente le long de AM, eſt au temps de la chûte AH, comme la longueur AM eſt à la hauteur AH.

339. COROLLAIRE. *Donc les temps employés à parcourir divers plans inclinés qui ont la même hauteur AH, ſont entre eux comme les longueurs de ces plans* (Fig. 148).

DÉMONSTRATION. Nommant T le temps de la chûte AH; X, le temps de la deſcente le long du plan AM; & x, le temps de la deſcente le long du plan AN; nous aurons, par rapport au plan AM, X. T :: AM. AH : donc $X \times AH = T \times AM$; & par rapport au plan AN, nous aurons x. T :: AN. AH : ce qui donne $x \times AH =$

T×AN. Donc X×AH. x×AH :: T×AM. T×AN ; ou X. x :: AM. AN, & ainſi des autres.

DES PUISSANCES QUI TIRENT DES POIDS AVEC DES CORDES.

PROPOSITION LIX.

340. *Si deux puiſſances A, B, qui tirent un poids P avec des cordes MC, NC, ſont exprimées par les parties MC, NC, de leurs directions qui forment le parallélogramme MENC, dont la diagonale CE, priſe ſur la direction du poids, exprime la force de ce poids P ; les deux puiſſances & le poids ſont en équilibre : & ſi les deux puiſſances ne ſont pas exprimées par les côtés MC, NC, du parallélogramme MENC, il ne ſauroit y avoir d'équilibre entre les puiſſances & le poids* (Fig. 151).

Démonstration. I°. La force MC, qui tire de C en M, & la force NC, qui tire de C en N, compoſent la force CE qui tireroit de C en E : car celle-ci leur eſt équivalente. Or, la force CE eſt égale & contraire à la force EC du poids, à cauſe que ce poids tire ſelon la direction contraire EC : donc la force EC eſt en équilibre avec le poids P ; & par conſéquent les deux forces MC, NC, c'eſt-à-dire les deux puiſſances A & B, ſont auſſi en équilibre avec le poids P.

II°. Maintenant ſi les deux puiſſances A & B ne ſont pas exprimées par les côtés MC, NC, du rectangle ; elles ſeront exprimées par des lignes moindres ou plus grandes que les deux MC, NC, qui ſeront ou proportionnelles à MC, NC, ou non proportionnelles.

Suppoſons d'abord (*Fig.* 152) qu'elles ſoient exprimées par les droites RC, CS, *moindres, mais proportionnelles* aux deux MC, NC. J'acheve le parallélogramme RTSC, lequel ſera ſemblable au parallélogramme MENC ; & par conſéquent la diagonale CT ſera auſſi moindre que la diagonale EC : mais l'une & l'autre auront la même direction. Or, les forces compoſantes RC, CS, agiront ſur le poids de la même façon que la compoſée TC, qui tireroit de T en C ; & celle-ci étant moindre que la force contraire EC du poids, ne ſauroit être en équilibre avec le poids : donc les puiſſances A & B ne ſauroient non plus ſoutenir le poids.

Si au contraire les puiſſances A & B ſont exprimées par les droites HC, CL, *plus grandes, mais proportionnelles* aux deux MC,

MC, NC, la diagonale XC de leur parallélogramme HXLC ſera plus grande que EC, & l'une & l'autre auront encore la même direction. C'eſt pourquoi les puiſſances agiſſant ſur le poids avec la force XC, contraire & plus grande que la force EC du poids, l'enleveront; & il n'y aura point d'équilibre.

Si les deux puiſſances A, B (*Fig.* 153), étoient exprimées par les lignes RC, SC, *moindres que les deux MC, NC, ſans leur être proportionnelles;* alors achevant le parallélogramme RTSC, les forces RC, SC, ſeroient équivalentes à la force TC qui tireroit de C en T. C'eſt-à-dire que les deux forces RC, SC, agiroient autant ſur le poids P, que la ſeule force TC qui tireroit de C en T. Or la direction TC étant oblique à la direction du poids P, je mene TH perpendiculaire ſur la direction du poids; & achevant le parallélogramme THCX, la force TC eſt compoſée de la force CX, qui tire de C en X, & de la force CH qui tire de C en H. Mais dans le cas préſent, la force CH eſt moindre que la force EC du poids: ainſi le poids entraînera la force CH; & quant à la force CX, rien ne l'empêchera d'agir: & par conſéquent il n'y aura point d'équilibre entre les deux puiſſances & le poids.

Et par de ſemblables raiſonnements, on prouvera toujours que l'équilibre ne ſauroit ſubſiſter entre les puiſſances & le poids, ſoit que les lignes RC, SC, ſoient chacune plus grandes que les deux MC, NC, ſans leur être proportionnelles; ſoit que l'une ſoit plus grande & l'autre plus petite.

Que ſi l'on veut que les directions AC, BC (*Fig.* 154), des puiſſances A, B, ſoient *ſur une même ligne droite, & contraires l'une à l'autre;* il n'y aura pas non plus d'équilibre entre les deux puiſſances & le poids P. Car ſi les deux forces MC, NC, des puiſſances ſont horizontales, & qu'elles ſoient égales, elles ſeront en équilibre entre elles; & pendant ce temps là le poids P, tirant de E en C, & ne trouvant rien qui lui réſiſte, ne s'arrêtera pas: ainſi il n'y aura point d'équilibre. Que ſi la force MC eſt plus grande que NC, la force MC entraînera NC avec elle: mais comme elle n'eſt compoſée d'aucune force oppoſée à la force EC du poids, ce poids agira toujours, & l'équilibre manquera non ſeulement du côté des deux puiſſances, mais encore du côté du poids.

Enfin, ſi les deux puiſſances A, B (*Fig.* 155), tirent avec des directions contraires MC, NC, qui ſont *ſur une ligne droite oblique à l'horizon,* il n'y aura pas non plus d'équilibre entre les puiſſances & le poids. Car menant des points M, N, les droites MR, NT, perpendiculaires ſur la direction du poids; & achevant les parallé-

logrammes rectangles MRCX, & NZCT, la force MC ſera compoſée de la force RC qui tire de C en R, & de la force CX qui tire de C en X; & la force NC ſera compoſée de la force CT qui tire de C en T, & de la force CZ qui tire de C en Z. C'eſt pourquoi ſi CT eſt égal à CR, ces deux forces ſeront en équilibre, & ne pourront empêcher le poids de deſcendre; & dans ce cas les forces CX, CZ, ſeront égales auſſi & en équilibre, à cauſe qu'elles ſont contraires: car les triangles ſemblables MRC, CTN, ayant par la ſuppoſition le côté RC égal au côté CT, ſeront parfaitement égaux; & l'on aura MR ou CX=TN ou CZ: il n'y aura donc point d'équilibre, puiſque rien n'arrêtera la peſanteur du poids.

Si la force RC eſt moindre que la force CT, le mouvement du poids P ſera augmenté par l'excès de la force CT ſur la force CR. Ainſi le poids ne ſera pas retenu; & de plus la force CX étant en ce cas moindre que la force CZ, toujours par la raiſon des triangles ſemblables MCX, ZCN; la force CZ entraînera par conſéquent la force CX: il n'y aura donc point d'équilibre, ni du côté des puiſſances, ni du côté du poids.

Et on prouvera la même choſe, ſi la force RC étoit plus grande que la force CT: car quoiqu'il pût arriver que l'excès de la force RC ſur CT fût égal à la force du poids, auquel cas la force RC ſeroit en équilibre avec le poids; cependant la force CX qui ſeroit alors plus grande que la force CZ, entraîneroit CZ: il n'y auroit par conſéquent point d'équilibre entre les puiſſances & le poids.

341. COROLLAIRE I. *Si deux puiſſances A, B, ſont en équilibre avec un poids P, qu'elles ſoutiennent avec des cordes, ces deux puiſſances ſont entre elles réciproquement comme les ſinus des angles ECN, ECM, que leurs directions font avec la direction EC du poids* (Fig. 151).

DÉMONSTRATION. Dans le triangle ENC, le côté EN eſt au côté NC comme le ſinus de l'angle ECN eſt au ſinus de l'angle CEN ou de l'angle ECM qui lui eſt alterne. Or, EN=MC: donc la puiſſance A exprimée par MC, eſt à la puiſſance B exprimée par NC, réciproquement comme le ſinus de l'angle ECN fait par la direction BC de la puiſſance B avec la direction EC du poids, eſt au ſinus de l'angle MCE fait par la direction AC de la puiſſance A avec la direction EC du même poids.

342. COROLLAIRE II. Donc ſi du point E on mene ER perpendiculaire ſur BC, & ES perpendiculaire ſur AC, *la puiſſance A*

eſt à la puiſſance B, comme la perpendiculaire ER eſt à la perpendiculaire ES. Car prenant pour ſinus total la droite EC, la perpendiculaire ER eſt le ſinus de l'angle ECB, & la perpendiculaire ES eſt le ſinus de l'angle ECA.

343. COROLLAIRE III. *Si deux puiſſances A, B, ſoutiennent un poids P avec des cordes, la puiſſance A eſt au poids P, comme le ſinus de l'angle BCE fait par la direction de l'autre puiſſance B avec la direction EC du poids, eſt au ſinus de l'angle ACB fait par les directions des deux puiſſances* (Fig. 151).

DÉMONSTRATION. Dans le triangle ECN, le côté EN ou MC eſt au côté EC, comme le ſinus de l'angle ECB eſt au ſinus de l'angle ENC ou de l'angle ACB qui eſt le complément à deux droits de l'angle ENC. Donc la force MC, ou la puiſſance A, eſt à la force EC ou au poids P, comme le ſinus de l'angle ECB eſt au ſinus de l'angle MCN ou ACB.

Et on prouvera de même que la puiſſance B eſt au poids, comme le ſinus de l'angle ECM eſt au ſinus de l'angle BCA.

344. COROLLAIRE IV. On peut remarquer en paſſant une choſe aſſez ſinguliere, qui eſt que *ſi deux puiſſances, quelque grandes qu'elles puiſſent être, tirent un poids avec des cordes, quelque petit que puiſſe être ce poids; ces deux puiſſances ne pourront jamais tendre leurs cordes de façon qu'elles ſoient en ligne droite* (Fig. 154, 155). Car en ce cas l'équilibre ſera toujours rompu, comme on a vu ci-deſſus.

345. COROLLAIRE V. On peut encore obſerver que *ſi un poids P eſt attaché à un point fixe E* (Fig. 156), *d'où il pend librement, c'eſt-à-dire en ſorte que ſa direction EP ſoit perpendiculaire à l'horizon; la plus petite puiſſance qu'on puiſſe imaginer peut le déranger de ſa direction* (Fig. 156).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que la force du poids ſoit exprimée par la droite EC, & qu'une puiſſance, quelque petite qu'elle ſoit, pouſſe le poids ſelon la direction horizontale CR, qui exprime la force de cette puiſſance. J'éleve du point C la perpendiculaire CR; & du point R je mene la droite RE, & j'acheve le parallélogramme CRXE: la force ER tirant de R en E, eſt compoſée de la force CR tirant de R en C, ou pouſſant de C en R, & de la force CE tirant de C en E: or la force CE, c'eſt-à-dire la réſiſtance du point fixe E, eſt égale à la force EC du poids; & par conſéquent ces deux forces étant en équilibre, rien n'empêche la force CR d'agir

de C juſqu'en R où elle ſe trouvera en équilibre avec la force RX du poids, & la force ER qui ſera alors la force réſiſtante du point E; & on prouveroit la même choſe, ſi RC étoit oblique à l'horizon.

346. PROBLÊME. *Deux puiſſances A & B ſoutenant un poids P avec des cordes AC, BC, trouver la partie du poids que chacune d'elles ſoutient* (Fig. 157).

SOLUTION. Je décris le parallélogramme AEBC, qui exprime les forces des puiſſances & celle du poids. Du point C je mene la droite horizontale TV : des points A & B je mene les droites AT, BV, perpendiculaires ſur l'horizontale TV; & les droites AS, BR, perpendiculaires ſur la direction CE du poids : ce qui me donne les triangles rectangles ATC, ERB, ſemblables & égaux, à cauſe de AC=EB, & par conſéquent TC=RB ou CV, & AT ou SC=ER.

I°. La force AC, tirant de C en A, eſt compoſée de la force AS ou TC tirant de C en T, & de la force CS tirant de C en S : & la force BC, tirant de C en B, eſt compoſée de la force CV tirant de C en V, & de la force CR tirant de C en R. Or, la force TC étant égale & contraire à la force CV, ces deux forces ſont en équilibre & n'agiſſent point ſur le poids : donc il n'y a que les forces AT ou ER & CR qui ſoutiennent le poids; & par conſéquent la partie que la puiſſance A ſoutient eſt exprimée par ER, & celle que la puiſſance B ſoutient eſt exprimée par RC.

II°. Si l'une des puiſſances B tire avec une direction horizontale BC (*Fig.* 158), l'autre puiſſance eſt compoſée de la force CE qui tire de C en E, & de la force CT qui tire de C en T. Or, CT étant égale & contraire à la force CB, eſt par conſéquent en équilibre avec la puiſſance B; & par la même raiſon, la force CE eſt en équilibre avec la force EC du poids : ainſi la puiſſance A ſoutient toute ſeule le poids P.

III°. Si l'une des puiſſances B tire le poids avec une direction CB en deſſous de l'horizontale TV (*Fig.* 159), la force AC eſt compoſée de la force CT qui tire de C en T, & de la force CS qui tire de C en S : & la force CB eſt compoſée de la force CV qui tire de C en V, & de la force CR qui tire de C en R. Or, la force CT eſt égale à la force CV, à cauſe des triangles rectangles ſemblables & égaux ASE, CBV, qui donnent CV=AS=CT : & par conſéquent ces deux forces étant contraires, ſe tiennent en équilibre.

Mais à cauſe des triangles ſemblables & égaux ASE, CBR, nous avons CR=ES : donc la partie ES de la force CS eſt en équi-

libre avec la force CR ; & l'autre partie CE de la même force CS, eſt en équilibre avec la force EC du poids. Ainſi la puiſſance qui agit ſur le poids avec la force CS, eſt égale à la force EC de ce poids, & à la force RC : c'eſt-à-dire que cette puiſſance ſoutient non ſeulement le poids, mais encore l'effort RC que l'autre puiſſance B fait ſelon la direction RC.

347. REMARQUE. On pourroit aiſément conclure de là que *deux puiſſances qui ſoutiennent un poids avec des cordes & des directions obliques à celles du poids, ſont enſemble plus grandes que le poids :* mais on le prouvera plus aiſément en faiſant attention que ces deux puiſſances doivent toujours être exprimées par les côtés AC, BC, d'un parallélogramme ACBE (*Fig.* 157, 158, 159), dont la diagonale EC exprime la force du poids. Or, les deux côtés AC, CB, ou AC, AE, d'un parallélogramme, ſont enſemble plus grands que la diagonale : donc, &c.

DES LEVIERS.

348. DÉFINITION. Toute barre de fer ou de bois en ligne droite ſe nomme *levier*, comme nous avons déja dit ailleurs, & ordinairement on le conſidere comme n'ayant aucune peſanteur.

Il y a trois eſpeces de leviers, ſelon les trois différentes poſitions dans leſquelles la puiſſance & le poids, ou deux puiſſances, ou deux poids, peuvent ſe trouver à l'égard du point ſur lequel le levier eſt appuyé.

I°. Si la puiſſance A & le poids P (*Fig.* 160) ſont poſés de ſorte que le point d'appui C ſoit entre deux, le levier ſe nomme *levier de la premiere eſpece.*

II°. Si le poids P (*Fig.* 161) ſe trouve entre la puiſſance A & le point d'appui C, le levier ſe nomme *levier de la ſeconde eſpece.*

III°. Enfin, ſi la puiſſance A ſe trouve entre le poids P (*Fig.* 162) & le point d'appui C, le levier ſe nomme *levier de la troiſieme eſpece.*

Et comme on ne peut pas trouver d'autres différentes poſitions de la puiſſance & du poids à l'égard du point, il n'y a pas non plus d'autre eſpece de levier droit. Mais il y a un autre levier ACP (*Fig.* 163) qu'on nomme *levier coudé*, à cauſe qu'il fait un angle ou un coude au point d'appui C ; de façon que la puiſſance A eſt à l'un des bras AC, & le poids P à l'autre bras PC.

PROPOSITION LX.

349. *Dans les trois leviers des trois différentes eſpeces, ſi la puiſſance A & le poids P agiſſent avec des directions perpendiculaires au levier, & qu'il y ait équilibre entre eux; la puiſſance eſt au poids réciproquement comme la diſtance PC du poids P au point d'appui C, eſt à la diſtance AC de la puiſſance A au même point C* (Fig. 160, 161, 162).

Démonstration. La puiſſance ne peut décrire l'arc AH, à moins que dans le même temps le poids P ne décrive l'arc PR : ainſi les vîteſſes de la puiſſance & du poids ſont entre elles comme les arcs AH, PR, décrits en même temps; ou comme les rayons AC, CP, qui ſont proportionnels aux arcs AH, PR, à cauſe des ſecteurs ſemblables ACH, PCR : donc la force que la puiſſance emploie, eſt à celle du poids, comme A×AC eſt à P×PC. Mais par la ſuppoſition, A×AC=P×PC, puiſqu'il y a équilibre entre les deux forces : donc A. P :: PC. AC.

350. Remarque I. Dans les leviers de la premiere & de la ſeconde eſpece (*Fig.* 160, 161); plus le point C eſt proche du poids, plus la puiſſance A qui ſoutient le poids devient moindre à l'égard du poids : & par conſéquent ces deux machines ſont très utiles pour enlever de grands poids avec de petites forces, en leur ajoutant quelque choſe de plus qu'il ne leur faut pour être en équilibre avec les poids.

Mais quant au levier de la troiſieme eſpece (*Fig.* 162), la puiſſance A eſt toujours plus grande que le poids P, puiſque PC eſt toujours plus grande que AC. Ainſi ce levier, loin d'aider la puiſſance, la ſurcharge; & par conſéquent cette machine eſt inutile à cet égard.

351. Remarque II. Si la puiſſance & le poids tirent avec des directions AE, PH (*Fig.* 164), paralleles entre elles, mais obliques au levier; ou plutôt ſi deux puiſſances A & P tirent le levier avec des directions paralleles AE, PH, & obliques au levier, & que ces deux puiſſances ſoient en équilibre : en ſuppoſant que le levier AP eſt attaché fixement au point d'appui C, en ſorte qu'il puiſſe tourner autour de ce point ſans pouvoir gliſſer de C en A ou de C en P; je dis que *ces deux puiſſances ſont encore entre elles réciproquement comme leurs bras de levier;* c'eſt-à-dire, A. P :: CP. PA (*Fig.* 164).

Démonstration. Je prends ſur les directions AE, PH, les parties AE, PH, telles que l'on ait AE. PH :: PC. CA; & je

ſuppoſe que les forces que les puiſſances A & P emploient en tirant le levier ſoient exprimées par les droites AE, PH : du point E je mene ER parallele au levier, & du point A la droite AR perpendiculaire au même levier. Ainſi la force AE qui tire de A en E, eſt compoſée de la force AR qui tire de A en R, & de la force RE ou EL qui tire de E en L : c'eſt-à-dire que ſi la puiſſance A tire avec une corde AE, & une direction exprimée par AE, elle fera le même effet que deux forces, dont l'une tireroit avec une corde & une direction exprimée par AR, & l'autre tireroit avec une corde & une direction exprimée par AL.

Faiſant la même conſtruction par rapport à la puiſſance P, nous trouverons que la puiſſance P tirant avec une corde & une direction égale à PH, fait le même effet que deux forces, dont l'une tireroit avec une corde & une direction exprimée par PQ, & l'autre tireroit avec une corde & une direction exprimée par PS. Or, les triangles rectangles AER, PHR, étant ſemblables, donnent AE. PH :: AR. PQ ; & nous avons AE. PH :: PC. AC : donc AR. PQ :: PC. AC ; & par conſéquent les forces AR, PQ, perpendiculaires ſur le levier, ſont en équilibre entre elles, puiſqu'elles ſont réciproquement comme leurs bras de levier (349).

Or les forces AL, PS, qui tirent d'un même côté, & qui trouvent un obſtacle invincible au point d'appui C, ſont en équilibre avec cet obſtacle : donc les puiſſances A & P doivent être en équilibre autour du point fixe C.

352. REMARQUE III. Ce ne ſeroit pas la même choſe ſi le levier étoit ſimplement appuyé ſur le point C ſans y être fixement attaché, & que la puiſſance & le poids tiraſſent avec des cordes ; car alors la force réſiſtante réſiſteroit ou avec une direction TC perpendiculaire au levier, ou avec une direction XC parallele aux directions des puiſſances.

Si elle réſiſtoit avec une direction TC perpendiculaire ſur le levier, elle réſiſteroit avec une force égale aux deux AR, PQ, & par conſéquent elle ſeroit en équilibre avec ces deux forces. Mais comme les deux AL, PS, qui tirent d'un même côté, ne trouveroient point de réſiſtance de la part de cette force TC qui appuie ſimplement le levier AP ſans y être attachée en aucune façon ; ces deux forces pouſſeroient le levier vers A, & dans l'inſtant l'équilibre ſe romproit.

Que ſi la force réſiſtante réſiſte avec une direction XC parallele aux directions AE, PH, des puiſſances A, P ; cette force ſera

compoſée de la force XZ qui repouſſe le levier de X en Z, & qui ſera égale aux deux AR, PQ ; & de la force XT, ou ZC, qui pouſſeroit le levier de Z en C dans un ſens contraire aux forces AL, PS, ſi l'on ſuppoſoit que ZC entrât dans quelque échancrure du levier, ou qu'elle y fût attachée de façon que le levier ne pût pas gliſſer : mais comme nous ſuppoſons que cela n'eſt pas, les deux forces AL, PS, feront encore gliſſer le levier vers L, & l'équilibre ceſſera.

353. Perſonne juſqu'ici n'a fait la remarque que nous venons de faire, & cependant il me paroît qu'elle mérite attention, ſi l'on ne veut pas ſe tromper dans la pratique.

354. Remarque IV. La même remarque n'auroit pas lieu, ſi au lieu d'un ſoutien en C (*Fig.* 165), on ſuppoſoit qu'une puiſſance M tirât le point C avec une corde & une direction MC parallele & contraire aux directions AE, PH, des puiſſances A & P. Car en ce cas, *ſi la puiſſance M étoit égale aux deux A & P, & que les deux A & P fuſſent entre elles réciproquement comme PC eſt à AC, l'équilibre ſubſiſteroit entre les trois puiſſances.* Ce que je prouve ainſi (*Fig.* 165).

Démonstration. Je fais AE. PH :: PC. AC ; & CM = AE + PH : je mene des points E, H, M, des droites ER, HQ, MX, paralleles au levier ; & des points A, P, C, des droites AR, PQ, CR, perpendiculaires au même levier : puis achevant les parallélogrammes ALER, PSHQ, CNMX ; la puiſſance A eſt compoſée de la force AR tirant avec une corde de A en R, & de la force AL tirant avec une corde de A en L : la puiſſance P eſt compoſée de la force PQ tirant avec une corde de P en Q, & de la force PS tirant avec une corde de P en S : enfin la puiſſance M eſt compoſée de la force CX tirant avec une corde de C en X, & de la force CN tirant avec une corde de C en N.

Or, les triangles rectangles AER, PHQ, MCN, étant ſemblables ; & l'hypothénuſe MC du triangle MCN étant égale à la ſomme des hypothénuſes AE, PH, des deux autres ; le côté MN ou CX du même triangle MCN ſera égal à la ſomme des côtés homologues AR, PQ, des deux autres triangles. Ainſi CX tirant de C en X ſera en équilibre avec les deux AR, PQ, qui tirent avec des directions contraires ; & de même le côté CN du triangle CMN ſera égal à la ſomme des deux autres côtés homologues ER ou AL, HQ ou PS, des deux autres triangles : c'eſt pourquoi la force CN tirant de C en N, ſera auſſi en équilibre avec les deux forces AL, PS,

PS, qui lui ſont contraires ; & par conſéquent l'équilibre ſubſiſtera entre les trois puiſſances.

La différence donc qui ſe trouve entre ce cas & le précédent, c'eſt qu'ici la force MC tirant avec une corde fait le même effet que les deux CX, CN, qui tireroient avec des cordes : au lieu que dans le cas précédent (*Fig.* 164), la force réſiſtante XC, compoſée de XZ, XT, ne réſiſte que comme XZ ; tandis que la force XT n'agit point ſur le levier, à cauſe qu'il n'y a rien qui attache cette force au levier.

355. REMARQUE V. Si les deux puiſſances A & P (*Fig.* 166) tirent l'une & l'autre avec des cordes & des directions qui ne ſoient pas paralleles, je prolonge ces directions juſqu'à ce qu'elles ſe coupent en un point C : & ſuppoſant que ces puiſſances ſoient exprimées par CA, CR, j'acheve le parallélogramme AHRC ; & menant la diagonale CH qui coupe le levier AP en O, je dis que *ſi une puiſſance exprimée par CH tire le levier avec une corde attachée en O, & avec la direction OH ; cette puiſſance ſera en équilibre avec les deux autres A & P.* Ce que je prouve ainſi (*Fig.* 166).

DÉMONSTRATION. Du point C, je mene XM parallele au levier, & CT perpendiculaire ſur XM ; puis achevant autour de AC le parallélogramme rectangle CXAT, la puiſſance A tirant avec une corde de A en C fait le même effet que la force AX qui tireroit avec une corde de A en X, jointe à la force AT qui tireroit avec une corde de A en T.

De même du point R, j'abaiſſe RM perpendiculaire ſur XM ; & achevant le parallélogramme rectangle RVCM autour de CR, la force tirant de R en C fait le même effet que les forces qui tirent de R en M, & de R en V ; c'eſt-à-dire qu'en menant PZ parallele à RM, la puiſſance qui tire de P en C avec une corde fait le même effet que la force qui tireroit avec une corde de P en Z, & qui ſeroit exprimée par RM, jointe à la force qui tireroit avec une corde de P en O, & qui ſeroit exprimée par RV ou CM.

Enfin, du point H, j'abaiſſe HN perpendiculaire ſur XM ; & achevant le parallélogramme rectangle CNHE autour de CH, la force CH eſt compoſée de la force CE & de la force CN ; c'eſt-à-dire qu'en menant OY parallele à CE, la puiſſance qui tireroit avec une corde de O en H, & qui ſeroit exprimée par CH, feroit le même effet que la force qui avec une corde tireroit de O en Y, & qui ſeroit exprimée par CE ou HN, jointe à la force qui

avec une corde tireroit de O en L & qui ſeroit exprimée par CN.

Or, à cauſe des triangles rectangles AHL, CRM, ſemblables & égaux, nous avons RM=HL; & à cauſe des paralleles, nous avons auſſi AX=LN: donc RM+AX=HL+LN=HN; c'eſt-à-dire, les deux forces AX, RM, ſont enſemble égales à la force HN: & à cauſe que les deux premieres AX, RM, ſont contraires à HN; il s'enſuit qu'il y a équilibre entre ces trois forces.

Maintenant les triangles rectangles ſemblables & égaux ACT, HSR, donnent AT=SR; & par conſéquent la force RV, contraire à la force AT, détruit cette force par ſa partie RS, & il lui reſte la partie SV, laquelle eſt en équilibre avec la force CN qui lui eſt égale & contraire. Ainſi puiſque toutes les forces qui compoſent les puiſſances AC, CR, CH, ſont en équilibre; il s'enſuit que ces trois puiſſances le ſont auſſi.

Ce ſeroit la même choſe, ſi au lieu de la puiſſance qui tire de O en H, on mettoit un point d'appui en O, en ſorte que le levier y fût attaché fixement ſans pouvoir gliſſer de O en A ou de O en P.

Mais ſi le levier étoit ſimplement appuyé ſur le point O; alors quand même ce point d'appui réſiſteroit ſelon la direction CH de la puiſſance CH, ſa réſiſtance compoſée de la force CE & de la force CN, agiroit ſelon la force FO égale & parallele à CE, & nullement ſelon la force CN qui n'auroit aucune priſe ſur le levier; & par conſéquent la force RV, plus grande que ſon oppoſée AT, feroit gliſſer le levier vers A, & il n'y auroit point d'équilibre.

356. REMARQUE VI. Lorſqu'on ſe ſert du levier pour ſoulever un corps B (*Fig.* 167), qui eſt par terre, ſans l'enlever entiérement; alors le levier eſt incliné à l'horizon: la puiſſance A, c'eſt-à-dire les mains qu'on appuie en A, tirent avec une direction perpendiculaire AT; & le corps B peſant ſur le levier avec la direction RB perpendiculaire à l'horizon, fait le même effet ſur le levier que la force RS ou HB qui eſt perpendiculaire; car l'autre force compoſante RH n'eſt pas ſupportée par le levier, mais par le terrein.

C'eſt pourquoi, plus l'angle CBT d'inclinaiſon du levier avec l'horizon devient grand, ſans cependant devenir droit, plus le poids que la même puiſſance peut ſoutenir devient grand; car à meſure que cet angle augmente, le côté RS du parallélogramme

RSBH devient moindre. Ainſi ſuppoſé que ſous un angle égal à l'angle ABT, la puiſſance A ſoit en équilibre avec la force RS ; la même puiſſance ſous un angle plus grand ſera plus forte que la force RS du parallélogramme RSBC correſpondant à cet angle ; & par conſéquent il faudroit augmenter le poids B, afin que l'équilibre ſubſiſtât.

357. THÉORÊME. *Dans le levier recourbé, ſi la puiſſance A & le poids P ſont perpendiculaires ſur leur bras de levier, & qu'il y ait équilibre ; la puiſſance A eſt au poids P, réciproquement comme le bras CP eſt au bras AC* (Fig. 168).

DÉMONSTRATION. La puiſſance A ne peut pas décrire l'arc AE, à moins que le poids P ne décrive l'arc PH. Or, l'angle ACP étant égal à l'angle ECH, à cauſe de l'inflexibilité du levier ; ſi de ces deux angles on retranche l'angle commun ACH, l'angle reſtant ECA ſera égal à l'angle reſtant HCP ; & le ſecteur ECA ſera ſemblable au ſecteur HCP : donc EA. HP :: AC. CP. Or, les arcs EA, HP, étant parcourus dans des temps égaux, ſont entre eux comme les vîteſſes de A & P : donc les vîteſſes ſont auſſi entre elles comme AC, CP ; & par conſéquent les forces A & P ſeront entre elles comme A×AC, P×PC. Mais à cauſe de l'équilibre, ces forces ſont égales : donc A×AC=P×PC ; & partant, A. P :: PC. AC.

358. REMARQUE. Si la puiſſance ou le poids P, ou les deux enſemble, ſont obliques au levier recourbé, on trouvera leurs rapports en cette ſorte (*Fig.* 169).

Suppoſons que la puiſſance A tire ſelon la direction AX, & le poids P ſelon la direction PT ; & que le point d'appui ſoit attaché fixement au levier, en ſorte qu'il puiſſe tourner autour de ce point ſans gliſſer : j'éleve en A & P les droites AM, PQ, perpendiculaires aux bras AC, CP, & je fais AM. PQ :: PC. CA. Du point M je mene MX parallele à AC, & qui coupe la direction AX en X, & j'acheve le rectangle AMXZ. Du même point Q je mene QT parallele à PC ; & achevant le parallélogramme rectangle PQTV, je dis que A eſt à P, comme la diagonale AX eſt à la diagonale PT. Car la force AX, compoſée de AM qui tire de A en M, & de AZ qui tire de A en Z, ne peut faire mouvoir le levier que ſelon AM, à cauſe que la réſiſtance du point fixe C eſt en équilibre avec AZ. De même, la force PT, compoſée de PQ qui tire de P en Q, & de PV qui tire de P en V, ne peut faire mouvoir le levier que ſelon PQ, à cauſe que la réſiſtance du point C eſt en équilibre avec PV. Or, les forces MA, PQ, ſont en équilibre, puiſqu'elles ſont

entre elles réciproquement comme leurs bras de levier : donc les forces AX, PT, ſont auſſi en équilibre ; & ainſi des autres.

359. PROBLÊME I. *Connoiſſant la peſanteur du levier AB, le point C autour duquel la puiſſance & le poids ſeroient en équilibre avec des directions perpendiculaires au levier, ſi le levier ne peſoit point ; connoître le point H autour duquel il doit y avoir équilibre, en ayant égard à la peſanteur du levier* (Fig. 170).

SOLUTION. Le levier AB étant ſuppoſé de même groſſeur partout, & compoſé de parties homogenes, ſon centre de gravité eſt ſur le point du milieu M. Ainſi nous pouvons conſidéter ce levier peſant AB, comme un poids attaché au point M d'un levier AB qui n'auroit point de peſanteur ; & de même nous pouvons conſidérer la puiſſance A & le poids B comme ne faiſant enſemble qu'un ſeul poids mis au point C qui eſt leur centre d'équilibre. C'eſt pourquoi coupant la diſtance MC en deux parties CH, HM, réciproques à la peſanteur du levier miſe en M & au poids A équivalent à la puiſſance A & au poids B ; le point H ſera le centre d'équilibre cherché.

360. De là il eſt aiſé de voir que ſi le centre de gravité M du levier eſt du côté de la puiſſance A par rapport au point d'appui C, cette puiſſance eſt aidée par la peſanteur du levier, & doit enlever le poids : & ſi au contraire le centre de gravité M du levier eſt du côté du poids, le poids entraînera la puiſſance ; & dans l'un & l'autre cas, la peſanteur du levier que l'on négligeroit, empêcheroit qu'il n'y ait équilibre.

361. PROBLÊME II. *Connoiſſant la peſanteur d'un levier AB, les diſtances AC & CB du centre C de mouvement aux extrémités A & B du levier, & le poids B attaché à l'extrêmité B ; connoître la puiſſance A qu'il faut appliquer à l'autre extrémité pour faire équilibre, en ayant égard à la peſanteur du levier* (Fig. 170).

SOLUTION. Je nomme P la peſanteur du levier ; & ſuppoſant que le centre de gravité M du levier ſoit ſur le bras CA, je cherche la partie du poids B qui pourroit être en équilibre autour de C, avec la peſanteur P réunie au point M, en faiſant CB. MC :: P. $\frac{MC \times P}{CB}$. Ainſi $\frac{MC \times P}{CB}$ eſt la partie du poids qui ſeroit en équilibre avec la peſanteur ; & par conſéquent la puiſſance miſe en A doit être en équilibre avec le reſte du poids B, lequel reſte eſt $B - \frac{MC \times P}{CB}$, ou $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$. C'eſt pourquoi je fais CA. CB :: $\frac{CB \times B - MC \times P}{CB}$. $\frac{CB \times B - MC \times P}{CA}$;

& ce quatrieme terme exprime la puiſſance ou le poids qu'il faudroit mettre en A pour faire équilibre avec B autour du point C. Par exemple,

Soit AB=20, AC=12, BC=8, B=60 livres, & la peſanteur P=5 livres: donc AM=10, & MC=2. Ainſi dans la premiere proportion ci-deſſus, nous aurons 8. 2 :: 5. $\frac{10}{8}$; c'eſt-à-dire, la peſanteur du levier ſera en équilibre avec les $\frac{10}{8}$ ou les $\frac{5}{4}$ d'une livre. Ainſi le poids B peſant 60 livres, la puiſſance A, ou le poids qu'il faudroit mettre en A, ne doit plus ſoutenir que 60 livres $-\frac{5}{4}$, c'eſt-à-dire 58 $\frac{3}{4}$: nous aurons donc dans la ſeconde proportion ci-deſſus, 12. 8 :: 58 $\frac{3}{4}$. $\frac{8\times 58\frac{3}{4}}{12}$, & ce dernier terme $\frac{8\times 58\frac{3}{4}}{12}=\frac{2\times 58\frac{3}{4}}{3}=\frac{117\frac{1}{2}}{3}=\frac{239}{6}$ $=39\frac{1}{6}$, fait voir qu'une puiſſance équivalente à 39 livres $\frac{1}{6}$ ſeroit en équilibre avec le poids B.

Si le centre de gravité M du levier eſt du côté B (*Fig.* 171), ſuppoſons AB=20, AC=8, BC=12, le poids B=60, & la peſanteur du levier =5. Le moment ou la force du poids B, par rapport au centre du mouvement, ſera B×CB=60×12=720; le moment de la peſanteur P ſera P×MC=5×2=10. Donc les deux moments pris enſemble ſont 730; & ces deux moments doivent être égaux au moment de la puiſſance A, lequel eſt A×AC=A×8: donc 730=A×8, & $\frac{730}{8}$ = A, ou $91\frac{1}{4}$=A; c'eſt-à-dire que la force A devroit être équivalente à un poids de 91 livres $\frac{1}{4}$, pour être en équilibre avec B & la peſanteur P.

362. Remarque I. Si la puiſſance ou le poids, ou tous les deux, avoient des directions qui ne fuſſent pas perpendiculaires au levier, on trouveroit encore aiſément les mêmes choſes que ci-deſſus (Fig. 172).

Suppoſons, par exemple, qu'une puiſſance A tire ſelon une direction AF, & que cette puiſſance ſoit exprimée par la droite AF. Du point F, je mene FT parallele au levier, & du point A, je mene AT perpendiculaire au même levier; & achevant le parallélogramme ATFL, la puiſſance AF eſt compoſée de la force AT qui tire de A en T, & de la force AL qui, tirant de A en L, eſt en équilibre avec la réſiſtance du point fixe C, autour duquel le levier tourne. C'eſt pourquoi la puiſſance AF fait le même effet par rapport au poids qu'il faut mettre en B, que la puiſſance CT qui ſeroit perpendiculaire au levier. Or, dans le triangle rectangle AFT, dont la baſe AF eſt connue, & dont l'angle AFT ou FAL eſt connu, on peut connoître aiſément le côté AT: ainſi ſi l'on veut connoître le poids qu'il faut mettre en B, afin que la puiſſance

AT & le poids ſoient équilibre en ayant égard à la peſanteur du levier, on fera comme il a été dit ci-deſſus.

363. Tout ce qui a été dit dans les articles précédents par rapport au levier de la premiere eſpece, peut s'appliquer à celui de la ſeconde eſpece.

364. REMARQUE II. Quant au *levier recourbé*, dont les deux bras ſont dans un plan perpendiculaire à l'horizon, ſuppoſons que l'un des bras CB (*Fig.* 173) ſoit horizontal; que la puiſſance A ſoit perpendiculaire en A, & qu'on veuille connoître le poids qu'il faut mettre en B pour faire équilibre, en ayant égard à la peſanteur du levier.

Du milieu M du bras CA, je mene la droite MN au milieu N de l'autre bras CB; je coupe CB en deux parties MR, RN, réciproques aux deux bras; c'eſt-à-dire, je fais AC. CB :: NR. RM, & le point R eſt le centre de gravité du levier. Abaiſſant donc du point R, la verticale RS qui coupe le bras CB en S; la peſanteur du levier peut être conſidérée comme un poids attaché au point S. C'eſt pourquoi on cherchera, comme ci-deſſus, la partie de la puiſſance A, avec laquelle la peſanteur du levier peut être en équilibre autour du point C; & enſuite le poids B, convenable pour être en équilibre avec le reſte de la puiſſance A; & de même des autres cas.

365. PROBLÊME III. *Conſtruire une balance romaine* (Fig. 174).

SOLUTION. On prend un long levier AE, de bois ou de fer, qui ſoit d'égale épaiſſeur par-tout: ſur ce levier, on prend pour centre du mouvement un point C, à une petite diſtance de l'une des extrémités A: au deſſus du point C, on met perpendiculairement une languette ou lame de fer, qui paſſe dans le fléau CD, attaché fixement au centre C de mouvement: à l'extrémité A, on attache un crochet duquel pend un baſſin ou une planche attachée au crochet avec quatre cordes, de façon que le crochet & la planche ou le baſſin ſoient en équilibre avec l'autre bras CE du levier; ce que l'on connoît en ſuſpendant toute la machine par le fléau: car ſi la languette ne ſort ni d'un côté ni d'autre hors du fléau, & que le mouvement ceſſe, il y a équilibre. Enfin, on prend la diſtance AC, & la portant ſur le bras CE, de C en 1, de 1 en 2, & ainſi de ſuite, la balance eſt conſtruite.

Pour ſe ſervir de cette balance, on met dans le baſſin la marchandiſe que l'on veut peſer; & l'on prend un poids d'une livre, qu'on fait gliſſer le long du bras CE juſqu'à ce que la marchandiſe & le poids ſe contrebalancent. Si, lorſque l'équilibre ſe trouve,

le poids P eſt ſur le point 1 du bras CE, la marchandiſe peſe une livre, c'eſt-à-dire autant que le poids, à cauſe des diſtances égales AC, C1. Si le poids P eſt ſur le point 2, la marchandiſe peſera deux livres; puiſqu'elle ſera au poids P réciproquement comme la diſtance C2 du poids au centre de mouvement, eſt à la diſtance AE du même centre à la marchandiſe; & ainſi des autres.

Lorſque la marchandiſe qu'on veut peſer eſt d'une peſanteur conſidérable, on met, au lieu du poids P d'une livre, un autre poids plus conſidérable, par exemple, de 100 livres; & alors ſi l'équilibre ſe trouve au point 1, la marchandiſe peſe 100 livres; s'il ſe trouve au point 2, la marchandiſe peſe 200 livres, & ainſi de ſuite.

366. Comme il n'eſt guere poſſible de trouver des leviers qui ſoient parfaitement homogenes dans toutes leurs parties, on trouvera les diviſions 1, 2, 3, &c, du bras CE, beaucoup plus juſtes, en mettant ſucceſſivement dans le baſſin un poids d'une livre, un de deux, un de trois, &c; & cherchant pour chacun d'eux, le point où il faut mettre le poids P pour faire équilibre: ce que l'on trouve en faiſant gliſſer ce poids le long de CE, juſqu'à ce qu'on ait l'équilibre demandé.

C'eſt ainſi que les Ouvriers conſtruiſent les balances romaines: mais comme ils peuvent fort bien y commettre des inexactitudes, je crois qu'il vaut mieux ſe ſervir de la balance ordinaire dont nous allons parler.

PROPOSITION LXI.

367. *Si le centre C de mouvement eſt ſur le milieu d'un levier AB, & qu'aux extrémités A, B, on attache deux poids égaux P, Q, qui, par conſéquent, ſeront en équilibre, je dis qu'en quelque poſition qu'on mette le levier, ſoit horizontalement ou obliquement, l'équilibre ſubſiſtera toujours, & le levier reſtera en repos* (Fig. 175).

Démonstration. Cette Propoſition eſt évidente, lorſque le levier eſt dans la poſition horizontale AB, à cauſe de l'égalité des poids & des bras AC, CB: & elle n'eſt guere moins claire lorſque le levier eſt dans la poſition oblique FH. Car ſi l'on ſuppoſe que le poids *p* ſoit exprimé par la droite F*p* qui tire de F en *p*, & qu'on faſſe autour de F*p* le parallélogramme rectangle FV*p*T, le poids *p* fera le même effet qu'un poids exprimé par FT & qui tireroit ſelon la direction TF, joint à un autre poids exprimé par FV & qui tireroit ſelon la direction FV. Par la même raiſon, le poids *q* fait

le même effet qu'un poids qui ſeroit exprimé par HM, & qui tireroit ſelon la direction HM, joint à un autre poids exprimé par HN, & qui tireroit ſelon la direction HN.

Or les diagonales F*p*, H*q*, étant égales, puiſqu'elles expriment des poids égaux, & l'angle *p*FV égal à l'angle *q*HN; les triangles rectangles FV*p*, HN*q*, ſont égaux: donc V*p* ou FT=N*q* ou HM. Ainſi, à cauſe de l'égalité des bras FC, CH, les poids égaux FT, HM, ſont en équilibre: & les poids ou forces FV, HN, étant retenus par la réſiſtance du point fixe, ſont auſſi en équilibre avec cette réſiſtance; & par conſéquent le levier doit reſter en repos.

PROPOSITION LXII.

368. *Mais ſi le centre de mouvement C eſt au-deſſus du milieu H du levier AC, & qu'après avoir attaché aux deux extrémités A, B, deux poids égaux P, Q, on mette le levier dans une ſituation oblique EF; je dis que ce levier ſe mouvra juſqu'à ce qu'il ſe ſoit remis dans la poſition horizontale AB où les deux corps ſe trouveront en équilibre* (Fig. 176).

Démonstration. Afin que le levier puiſſe être mis dans la poſition oblique EF, il faut néceſſairement que ſon centre de gravité monte en décrivant l'arc HR: or ce centre étant en R, n'eſt plus ſoutenu ſelon ſa direction verticale: ainſi il doit deſcendre juſqu'à ce qu'il ſe retrouve directement ſous le point fixe C, qui l'empêchera de deſcendre plus bas; & alors l'égalité des poids & des deux bras établit l'équilibre.

PROPOSITION LXIII.

369. *Enfin ſi le centre C du mouvement eſt en deſſous du milieu M du levier AC, & qu'après avoir mis deux poids égaux aux extrémités A, B, du levier, on le mette dans une poſition oblique EF; je dis que le levier ne ceſſera de deſcendre juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à la poſition horizontale HS parallele à la poſition AB* (Fig. 177).

Démonstration. Le levier ne peut être mis dans la poſition EF, à moins que ſon centre de gravité M ne décrive l'arc MR: or ce centre étant en R, ne trouve rien qui le ſoutienne ſelon ſa direction verticale. Donc il doit deſcendre juſqu'à ce qu'il ſe trouve directement ſous le point d'appui C qui l'empêchera de deſcendre plus bas; & alors il y aura équilibre entre les deux poids.

La

La Balance ordinaire.

370. La balance ordinaire (*Fig.* 178) n'eſt autre choſe qu'un levier A, B, dont le centre de mouvement eſt un peu au-deſſus du point M du milieu. On y attache aux deux extrémités deux baſſins égaux C, E, qui ſoient en équilibre : après quoi, quand on veut peſer quelque marchandiſe, on la met dans l'un des baſſins C, & l'on met dans l'autre des poids connus, tels qu'ils ſoient en équilibre avec la marchandiſe ; ainſi, ſi le poids qui fait équilibre eſt de deux livres, la marchandiſe peſe deux livres, &c.

371. La balance ordinaire eſt trompeuſe, quand l'un des bras eſt plus long que l'autre : & alors le baſſin qui eſt à l'extrémité de ce long bras, ne peſe pas autant que l'autre ; car autrement ces deux baſſins ne ſeroient pas en équilibre, & l'on pourroit par ce moyen connoître aiſément la fripponnerie. Ceux qui ſe ſervent de ces ſortes de balances, mettent toujours la marchandiſe qu'ils vendent du côté du plus long bras, afin qu'elle faſſe équilibre avec un poids plus grand qu'elle : & au contraire, s'ils achetent, ils mettent la marchandiſe du côté du moindre bras, afin qu'elle faſſe équilibre avec un poids moindre ; & par cette ruſe ils vous trompent toujours, ſoit qu'ils vendent, ou qu'ils achetent de vous.

372. Pour n'être pas la dupe de ces ſortes de gens, il faut après avoir mis la marchandiſe dans l'un des baſſins, & trouvé le poids qui lui fait équilibre dans l'autre, tranſporter la marchandiſe dans le baſſin du poids, & le poids dans celui de la marchandiſe ; & ſi la balance eſt fauſſe, l'équilibre ne ſubſiſtera plus.

373. Pour connoître le véritable poids d'une marchandiſe qui a été peſée dans une balance trompeuſe, je mets dans le baſſin C (*Fig.* 179) la marchandiſe que je nomme m, & dans le baſſin E un poids p qui faſſe équilibre avec la marchandiſe ; je tranſporte dans le baſſin E la marchandiſe, & je mets dans le baſſin C un autre poids q qui ſoit en équilibre avec elle ; je multiplie le poids p par le poids q, & tirant la racine quarrée du produit pq, cette racine eſt le véritable poids de la marchandiſe. Car quand cette marchandiſe eſt en C, nous avons BM. AM :: $m. p$; & quand elle eſt en E, nous avons BM. AM :: $q. m$: donc $q. m :: m. p$; & $pq = mm$, & $m = \sqrt{qp}$.

Soit $p = 9$, $q = 10$: donc $qp = 90$, & $\sqrt{qp} = \sqrt{90} = 9\frac{48}{100} = 9\frac{12}{25}$: ainſi la marchandiſe étant miſe en C, peſe $9\frac{12}{25}$, au lieu de 9 livres ; & par conſéquent celui qui a acheté cette marchandiſe, a gagné $\frac{12}{25}$ d'une livre ſur ſon achat, ſuppoſé qu'il ait mis la marchan-

diſe dans le baſſin C. Mais s'il avoit voulu vous tromper en vous vendant la même marchandiſe, il l'auroit miſe dans le baſſin E, & alors elle auroit fait équilibre avec $q = 10$; & par conſéquent il auroit gagné ſur le poids $\frac{12}{25}$ d'une livre; puiſque la marchandiſe n'auroit peſé réellement que $9\frac{12}{25}$, au lieu de 10.

De là il eſt aiſé de connoître le rapport des deux bras AM, MB; car puiſque la marchandiſe $9\frac{12}{25}$ étant en C, ſe trouve en équilibre avec $p = 9$, nous avons MB. AM :: $9 + \frac{12}{25}.9$.

De la Roue dans son Aissieu.

374. La *roue dans ſon aiſſieu* eſt une roue dont les rayons ſont attachés fixement à un cylindre nommé aiſſieu ou treuil aux deux extrémités duquel ſont deux pieces de fer qui s'enchâſſent dans deux pivots ou ſoutiens ſur leſquels le cylindre & la roue tournent enſemble: la Figure 180 repréſente cette machine. Le poids R qu'on veut enlever eſt attaché au treuil avec une corde, & la puiſſance P eſt attachée à la circonférence de la roue.

PROPOSITION LXIV.

375. *Si une puiſſance A, qui tire avec une direction AH tangente à la roue, tient en équilibre un poids P; la puiſſance eſt au au poids, comme le rayon CE de l'aiſſieu eſt au rayon AC de la roue* (Fig. 181).

Démonstration. Si le rayon AC de la roue auquel la puiſſance A eſt perpendiculaire, eſt en ligne droite avec le rayon CE du treuil, auquel la direction du poids eſt perpendiculaire; on peut conſidérer la droite AE comme un levier dont le centre du mouvement eſt le point C: ainſi dans le cas de l'équilibre entre la puiſſance & le poids, nous avons A. P :: CE. AC.

Si la puiſſance tire avec une direction BX, perpendiculaire au rayon BC qui n'eſt pas en ligne droite avec le rayon CE, auquel le poids eſt perpendiculaire, nous regarderons les droites BC, CE, comme les bras d'un levier recourbé, auquel la puiſſance & le poids ſont perpendiculaires; & par conſéquent nous aurons encore A. P :: CE. BC.

376. Si la puiſſance ne tire pas avec une direction tangente à la roue, il eſt aiſé d'appliquer à cette machiue ce que nous avons dit des leviers auxquels la puiſſance eſt oblique.

377. Lorſqu'on veut élever des poids extrêmement grands par le moyen de cette machine, il faudroit augmenter prodigieuſe-

ment le rayon de la roue ; ce qui deviendroit trop incommode : c'eſt pourquoi on ſe ſert alors des roues dentées, dont nous allons parler.

Des Roues dentées.

378. Les roues dentées ne different de la roue dans ſon aiſſieu, qu'en ce que leurs circonférences & celles de leurs aiſſieux ont des dents. On en met ordinairement pluſieurs, comme on voit ici (*Fig.* 182). La premiere, qui eſt celle à laquelle la puiſſance s'attache, n'a point de dents à ſa circonférence, & ſon aiſſieu en a : celles qui ſont entre la premiere & la derniere, ont des dents à leurs circonférences & à celles de leurs aiſſieux ; & la derniere, qui eſt celle à l'aiſſieu de laquelle le poids eſt attaché, n'a point de dents à ſon aiſſieu. Tandis que la premiere roue tourne de B vers A, les dents de ſon aiſſieu C font tourner la ſeconde de F vers E ; & les dents de l'aiſſieu G de cette ſeconde font tourner la troiſieme de L vers I : ainſi ſi celle-ci eſt la derniere, la corde du poids P attachée à l'aiſſieu O, s'entortille autour de cet aiſſieu, & le poids monte.

PROPOSITION LXV.

379. *Si une puiſſance A, perpendiculaire au rayon AC de la premiere roue, eſt en équilibre avec le poids P attaché à l'aiſſieu de la derniere ; la puiſſance & le poids ſont en raiſon compoſée des raiſons des rayons des aiſſieux aux rayons des roues ; c'eſt-à-dire, la puiſſance eſt au poids, comme le produit des rayons des aiſſieux multipliés les uns par les autres, eſt au produit des rayons des roues* (Fig. 182).

Démonstration. Suppoſons d'abord qu'il n'y ait que la roue OL, à laquelle le poids eſt ſuſpendu. La puiſſance qui tireroit de L en X, perpendiculairement au rayon LO de la roue, & qui tiendroit le poids en équilibre, ſeroit à ce poids, comme le rayon OR de l'aiſſieu eſt au rayon LO de la roue ; car les deux rayons OR, LO, forment un levier recourbé, dont le centre de mouvement eſt le point O. Ainſi nous aurions LO. OR :: P. $\frac{P \times OR}{LO}$; & ce quatrieme terme ſeroit l'expreſſion de la puiſſance miſe en L.

Suppoſons maintenant qu'il y ait une ſeconde roue GF, & qu'une puiſſance tirant de F en Z, perpendiculairement au rayon FG de cette roue, ſoit en équilibre avec le poids. Il eſt clair que les dents de l'aiſſieu G de cette roue doivent faire le même effet ſur la roue

qui ſoutient le poids, que ſeroit la puiſſance $\frac{P \times OR}{LO}$. Ainſi la puiſſance miſe en F, étant en équilibre avec le poids P, ſeroit auſſi en équilibre avec la puiſſance $\frac{P \times OR}{LO}$ qui ſeroit en L; & par conſéquent à cauſe du levier FL dont le centre de mouvement eſt le point G, nous aurions FG. LG :: $\frac{P \times OR}{LO}$. $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$; & ce quatrieme terme exprimeroit la puiſſance miſe en F, qui ſeroit en équilibre avec le poids.

Mettant de même une troiſieme roue CA, & une puiſſance qui tire de A en V perpendiculairement au rayon AC, & qui ſoit en équilibre; nous prouverons auſſi que cette puiſſance ſeroit en équilibre avec la puiſſance $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$ qui ſeroit en F. C'eſt pourquoi à cauſe du levier AF, dont le centre de mouvement eſt en C, nous aurons AC. CF :: $\frac{P \times OR \times LG}{LO \times FG}$. $\frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$; & ce quatrieme terme ſera l'expreſſion de la puiſſance miſe en A. Ainſi la puiſſance miſe en A eſt au poids P, comme $\frac{P \times OR \times LG \times CF}{LO \times FG \times AC}$ eſt à P; ou comme P×OR×LG×CF eſt à P×LO×FG×AC; ou enfin comme OR×LG×CF eſt à LO×FG×AC; c'eſt-à-dire comme le produit des rayons OR, LG, CF, des aiſſieux, eſt au produit des rayons LO, FG, AC, des roues.

DES POULIES.

PROPOSITION LXVI.

380. *Si une puiſſance A & un poids P ſont en équilibre autour d'une poulie; la puiſſance & le poids ſont égaux* (Fig. 183).

Démonstration. Si les directions BA, CP, ſont paralleles, elles toucheront la circonférence de la poulie aux extrémités B, C, du diametre BC. Or le point fixe de la poulie étant le centre D, la puiſſance & le poids font le même effet que ſi on les avoit attachés aux extrémités B, C, du levier BC; & par conſéquent le moment ou la force de la puiſſance A eſt A×BD; & le moment du poids eſt P×CD. Mais par la ſuppoſition A×BD=P×CD, puiſque la puiſſance & le poids ſont en équilibre : donc A. P :: CD. BD; & partant A=P à cauſe de CD=BD.

Si la puiſſance tire avec la direction EF tangente de la poulie, mais non parallele à la direction CP du poids, je mene du point E la droite ED au centre de la poulie, & j'ai un levier recourbé EDC, dont les bras ED, DC, ſont égaux : ainſi le moment de

A eſt A×ED ; & le moment du poids eſt P×DC. Or, par la ſuppoſition, nous avons A×ED=P×DC : donc A. P :: DC. EC ; & partant A=P.

381. REMARQUE. La poulie ne fait donc rien gagner du côté de la puiſſance ; mais l'avantage qu'on en tire, c'eſt qu'on peut changer la direction de la puiſſance, & la rendre plus commode. Par exemple, pour ſoutenir le poids P ſans la poulie, il faudroit que la puiſſance tirât ce poids avec la direction CR oppoſée à la direction CP du poids ; au lieu que par le moyen de la poulie, elle peut le ſoutenir avec la direction BA qui eſt beaucoup moins fatigante ; & ainſi des autres.

La poulie dont on vient de parler, eſt une *poulie immobile*, c'eſt-à-dire une poulie qui n'a de mouvement qu'autour de ſon centre immobile D. La même poulie ſera une *poulie mobile*, quand ſon centre pourra monter ou deſcendre avec la puiſſance, ou avec le poids, en tournant ſur lui-même.

PROPOSITION LXVII.

382. *Si un poids P, ſuſpendu au centre E d'une poulie, eſt en équilibre avec une puiſſance A qui tire avec une direction AB tangente à la poulie par le moyen d'une corde ABVCR attachée fixement au point R ; la puiſſance eſt au poids, comme* 1 *eſt à* 2 (Fig. 184).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le diametre BC de la poulie ſoit dans la poſition HI ; & que par conſéquent le centre E ſoit en V : ce centre ne pourra monter de V en E, à moins que le poids & la puiſſance ne parcourent chacun un eſpace égal à VE. Or quand le centre ſera parvenu en E, la corde RI ſe ſera abrégée de la quantité CI=VE, laquelle aura paſſé du côté de la puiſſance : donc cette puiſſance aura parcouru un autre eſpace égal à VE, & par conſéquent elle aura parcouru 2VE, tandis que le poids n'aura parcouru que VE. Mais les eſpaces 2VE & VE, parcourus dans le même temps par la puiſſance & le poids, marquent leurs vîteſſes ; & par la ſuppoſition, les moments de la puiſſance & du poids ſont égaux, puiſqu'il y a équilibre : donc A×2VE=P×VE ; & partant, A. P :: VE. 2VE :: 1. 2.

383. REMARQUE I. On peut faire qu'une même puiſſance ſoit à un même poids, comme 1 à 1, comme 1 à 2, comme 1 à 4, comme 1 à 8, & ainſi de ſuite ſelon la progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, &c ; en diſpoſant les poulies O, E, C, &c, de façon que leurs cordes

ſoient attachées aux points fixes H, M, N; & que la corde HRSZA paſſe ſur une poulie B, afin que la puiſſance tire ſelon la direction FA (*Fig.* 185).

Car s'il n'y avoit que la poulie B, & que la puiſſance A ſoutînt le poids attaché en S, la puiſſance & le poids ſeroient en équilibre, & par conſéquent on auroit A. P :: 1. 1. Mais ſi le poids eſt ſuſpendu au centre O de la poulie O; alors, à cauſe du levier SR dont les bras SO, OR, ſont égaux, la puiſſance & le point fixe H ne ſoutiendroient chacun que la moitié du poids; & partant, on auroit A. P :: 1. 2.

De même, ſi le poids étoit ſuſpendu au centre E de la poulie E, la corde MT & la corde OX ſoutiendroient chacune la moitié du poids: or cette moitié étant ſoutenue par le point fixe H & par la puiſſance A, la puiſſance n'en ſoutiendroit que la moitié, c'eſt-à-dire le quart du poids, & par conſéquent on auroit A. P :: 1. 4.

Que ſi on ſuſpendoit le poids au centre C de la poulie C, la corde NV ſoutiendroit la moitié, & la corde EL ſoutiendroit l'autre moitié. Or cette moitié étant ſoutenue par les cordes MT, OX, il eſt clair que OX n'en ſoutiendroit encore que la moitié, c'eſt-à-dire le quart du poids; & que ce quart étant ſoutenu par le point fixe H & par la puiſſance A, celle-ci ne ſoutiendroit que la moitié de ce quart, c'eſt-à-dire le huitieme du poids; & partant, on auroit A. P :: 1. 8, & ainſi de ſuite.

384. REMARQUE II. Soient pluſieurs poulies immobiles A, B, C, D, miſes en ligne droite horizontale & à égale diſtance les unes des autres (*Fig.* 186): ſoit auſſi un même nombre de poulies mobiles M, N, X, Z, diſpoſées de façon qu'une corde attachée à un point fixe T, paſſe ſucceſſivement ſous les poulies mobiles & ſur les fixes, juſqu'à ce qu'ayant paſſé ſur la premiere fixe A, une puiſſance H qui tire cette corde tienne en équilibre des poids égaux P, Q, R, S, attachés aux centres M, N, X, Z, des poulies mobiles. Je dis que cette puiſſance ſera égale à la moitié de l'un de ces poids: ce que je prouve ainſi.

Si la corde *ab* étoit retenue par un point fixe *b*, la puiſſance H ſoutiendroit la moitié du poids P, & le point *b* ſoutiendroit l'autre moitié. De même ſi les cordes *dc*, *fm*, de la poulie N, étoient ſoutenues par des points fixes *c*, *m*, ces points ſoutiendroient chacun la moitié du poids Q, & ainſi des autres. Or la moitié du poids P & la moitié du poids Q ſont en équilibre autour de la poulie B: donc cette poulie fait le même effet que les deux points fixes *b*, *c*; & par conſéquent elle doit ſoutenir la moitié du poids P & la moitié de Q.

On prouvera de la même façon que la poulie C ſoutient la moitié du poids Q, & la moitié du poids R; que la poulie D ſoutient la moitié du poids R, & la moitié du poids S; & qu'enfin le point fixe T ſoutient l'autre moitié du poids S: donc, puiſque la puiſſance H ne ſoutient que la moitié de P, nous avons $H = \frac{1}{2}P$.

385. REMARQUE III. Maintenant, ſi nous ſuppoſons que les poulies mobiles ſoient attachées fixement à une chape ou piece de bois FL (*Fig.* 187), & qu'au lieu des quatre poids égaux attachés aux centres des poulies mobiles, on ſuſpende du milieu O de la chape un poids Y égal à la ſomme des quatre: je dis que la puiſſance H qui tient ce poids en équilibre, eſt au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies mobiles, ou comme l'unité eſt au nombre des brins de corde que le poids tire.

Car le poids Y étant attaché au centre de gravité de la chape FL des poulies mobiles, fait le même effet que les quatre poids égaux qui étoient attachés à égale diſtance de part & d'autre de ce centre: or dans la ſuppoſition des quatre poids attachés à chaque poulie mobile, nous avons trouvé que la puiſſance étoit égale à la moitié de l'un des quatre poids: donc la puiſſance étoit aux quatre poids comme 1 eſt à 8; c'eſt-à-dire comme 1 eſt au nombre 8, double du nombre des poulies mobiles; ou comme l'unité eſt au nombre 8 des brins de corde que les poulies mobiles tiroient. Ainſi puiſque le poids Y eſt égal aux quatre poids, & qu'il fait le même effet, nous avons A. Y :: 1. 8.

Des Mouffles.

386. Lorſqu'on attache fixement pluſieurs poulies à une même chape, cette machine s'appelle *mouffle.*

387. HYPOTHESE I. Soient deux ou pluſieurs poulies A, B, attachées fixement à une chape TR, & autant d'autres poulies C, D, attachées fixement à une autre chape VL, ayant à ſon extrémité V un poids P ſuſpendu, & qu'une corde attachée au crochet R de la chape TR, paſſe alternativement ſous les poulies d'en-bas D, C, & ſur les poulies d'en-haut B, A; de ſorte qu'une puiſſance H tienne en équilibre le poids P: je dis que *cette puiſſance eſt au poids comme l'unité eſt au double du nombre des poulies D, C, d'en-bas; ou comme l'unité eſt au nombre des brins de corde que le poids tire* (Fig. 188).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le centre *c* de la poulie C ſoit en V, & que par conſéquent ſon diametre MN ſoit en XZ; ce centre C ne peut monter de V en C, à moins que la corde qui

paſſe par cette poulie ne ſe raccourciſſe des deux parties égales MX, NZ; & par la diſpoſition de cette machine, il eſt viſible que les cordes qui paſſent par la poulie D ſe ſeront raccourcies chacune d'autant, quand le centre V ſera parvenu en C. Ainſi ces quatre parties égales de corde auront paſſé du côté de la puiſſance H; & par conſéquent cette puiſſance aura parcouru quatre eſpaces égaux à CV, tandis que le poids P ne ſe ſera élevé que de la hauteur VC.

Or les eſpaces parcourus dans des temps égaux marquent les viteſſes: donc le moment de la puiſſance ſera H×4CV, & celui du poids ſera P×CV. Mais par la ſuppoſition, ces moments ſont égaux: donc H×4CV=P×CV; & partant H. P :: CV. 4CV::1. 4: c'eſt-à-dire, la puiſſance eſt au poids, comme l'unité eſt au nombre 4, double du nombre des poulies d'en-bas, ou comme l'unité eſt à 4, nombre des cordes que le poids tire.

388. HYPOTHESE II. Si au lieu de faire paſſer la corde que la puiſſance tire par la premiere poulie d'en-haut, on la faiſoit paſſer ſous la derniere poulie C d'en-bas, *la puiſſance H ſeroit au poids comme* 1 *eſt au nombre de toutes les cordes* (Fig. 189).

DÉMONSTRATION. Car tandis que le centre C monteroit de V en C, les cordes qui paſſent par la poulie C, ſe raccourciroient de deux parties MX, NZ, égales à VC; & les cordes qui paſſent par la poulie D ſe raccourciroient chacune d'autant, de même que la corde attachée au crochet L. C'eſt pourquoi il paſſeroit du côté de la puiſſance cinq parties de corde égales chacune à CV; & par conſéquent l'eſpace parcouru par la puiſſance, étant à l'eſpace VC dont le poids ſe ſeroit élevé, comme 5 eſt à 1, le moment de la puiſſance ſeroit H×5CV, & celui du poids P×CV; & à cauſe de l'équilibre nous aurions H×5CV=P×CV: donc H. P :: CV. 5CV:: 1. 5: ce qui fait voir que cette diſpoſition eſt plus favorable à la puiſſance que celle de la Figure 188, puiſque nous avons vu que dans celle-là la puiſſance ſeroit au poids comme 1 à 4.

389. REMARQUE I. Si on joignoit enſemble la diſpoſition de la Figure 188 avec la diſpoſition de la Figure 189, & qu'on n'en fît qu'une ſeule machine, on gagneroit beaucoup davantage du côté de la puiſſance (*Fig.* 190).

Car ſi cette puiſſance étoit en S, elle ſeroit au poids P, comme 1 eſt à 5, à cauſe qu'il y a cinq cordes tirées par les deux poulies inférieures C, D, dans la diſpoſition CDBA. Ainſi cette puiſſance étant ſoutenue par l'autre diſpoſition RXTV, n'agit ſur cette diſpoſition que comme un poids qui ſeroit la cinquieme partie du

poids

poids P. Or la puiſſance H eſt au poids S, comme 1 eſt à 4, à cauſe qu'il y a quatre cordes tirées par les deux poulies inférieures R, X; donc la puiſſance H n'eſt que la quatrieme partie de la puiſſance S: & comme celle-ci n'eſt que la cinquieme partie du poids P, il s'enſuit que la puiſſance H ne ſeroit que la vingtieme partie du poids P; car le quart du cinquieme eſt un vingtieme. Les deux poulies M, N, ſont des poulies fixes qui ne font autre choſe que faciliter l'uſage de la machine.

La Chevre, inſtrument.

390. HYPOTHESE. *Si on joint à la diſpoſition de la Figure 188, l'effort d'un levier par le moyen d'une chevre, on gagnera conſidérablement du côté de la puiſſance* (Fig. 193).

La *chevre* eſt un inſtrument compoſé de trois pieds AB, BC, BD, qui ſe joignent à un même ſommet B. A ce ſommet ſont attachées des mouffles, ſelon la diſpoſition de la Figure 188: la corde qui paſſe par la poulie ſupérieure, vient s'entortiller à un treuil MN, attaché aux deux pieds BC, BD, qui, à cauſe de cela, font deux petits coudes au-deſſus de M & N: le treuil eſt percé de deux ou pluſieurs trous, dans leſquels on paſſe des leviers tels que HR; & c'eſt à l'aide de ces leviers qu'une ou pluſieurs puiſſances font tourner le treuil & enlevent le poids ſuſpendu à la mouffle inférieure.

Or, ſuppoſant que la mouffle inférieure n'ait que deux poulies (*Fig.* 188 & 193), la puiſſance qui tireroit en H, ſans le ſecours du treuil MN, ſeroit au poids comme 1 à 4: ainſi elle feroit le même effet qu'un poids qui ne ſeroit que le quart de P. Mais comme cette puiſſance eſt attachée au treuil, & qu'une autre puiſſance attachée au levier HR en R, eſt en équilibre avec elle; ſi nous ſuppoſons que la longueur HR du levier ſoit dix fois plus grande que le rayon du treuil, la puiſſance en R ſera à l'autre puiſſance $\frac{1}{4}$ P, comme 1 à 10; & par conſéquent elle ſera $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{4}$ P, c'eſt-à-dire $\frac{1}{40}$ P. D'où l'on voit que la puiſſance en R pourroit tenir en équilibre une force 40 fois plus grande qu'elle; & ainſi des autres.

390. S'il eſt donc vrai, comme quelques-uns le diſent, qu'un homme qui tire par le moyen d'un levier, tire comme un poids de 25 livres; cet homme, par le moyen d'une chevre, pourra tenir en équilibre un poids quarante fois plus grand, c'eſt-à-dire un poids de 1000 livres.

Du Cric.

391. Le *cric* eſt une large barre de fer AB faite à dents, dans leſquelles s'engrenent les dents d'un aiſſieu CF d'une roue dentée CE. Dans les dents de celle-ci s'engrenent les dents d'un rouet OH, au centre duquel eſt une manivelle OMNI qui tient lieu d'une roue dont le rayon ſeroit MN, & dont l'aiſſieu ſeroit le rouet OH (*Fig.* 192).

Pour faire uſage de cette machine, la puiſſance s'applique ſur NI, & par le moyen de la manivelle elle fait tourner le rouet OH de E H : ce qui fait tourner la roue CE, de E en L, de même que ſon aiſſieu CF, lequel fait monter le cric AB, & ſouleve le poids qui eſt mis en A.

Le calcul de cette machine eſt le même que celui des roues dentées : c'eſt-à-dire que la puiſſance eſt au poids comme le produit des rayons CF, OH, des aiſſieux, eſt au produit des rayons CE, MN, des roues. Suppoſant donc que le rayon CF ſoit au rayon CE comme 1 eſt à 4, & le rayon OH, au rayon MN, comme 1 eſt à 5 ; la puiſſance ſera au poids comme 1 eſt à 20. On pourroit augmenter conſidérablement la force du cric, en y mettant un plus grand nombre de roues dentées & d'aiſſieux.

La Figure 191 repréſente la caiſſe AC, dans laquelle on met le cric lorſqu'on s'en ſert ; la manivelle ſort hors de la caiſſe, & eſt repréſentée en MRTV.

De la Vis.

392. Si l'on conçoit qu'un priſme triangulaire AMBR (*Fig.* 194), incliné ſur ſa baſe AHR, ſoit flexible de façon à pouvoir s'entortiller autour d'un cylindre, le ſolide qui en proviendra ſera ce qu'on appelle une *vis* (*Fig.* 195). Cette machine eſt enchâſſée dans une piece de bois nommée *écrou*, laquelle eſt faite en dedans auſſi à vis, de ſorte que les élévations de la vis cylindrique s'engrenent dans le creux de la vis de l'écrou. Au haut du cylindre, & quelquefois au bas, eſt une piece de bois percée de façon à pouvoir faire paſſer un levier MV, par le moyen duquel une puiſſance en M fait tourner la vis cylindrique, & enleve un poids P attaché à l'extrémité du cylindre. La diſtance EF d'une élévation du cylindre à l'autre ſe nomme *pas de la vis*, parceque le poids ne ſe trouve être monté à cette hauteur, que lorſque le cylindre a fait une révolution entiere autour de ſon axe.

PROPOSITION LXVIII.

393. *Si une puiſſance M eſt en équilibre avec un poids P par le moyen d'une vis, la puiſſance eſt au poids, comme la hauteur EF de l'un des pas de la vis, eſt à la circonférence dont le rayon ſeroit la longueur MV du levier* (Fig. 195).

Démonstration. Le poids ne peut s'élever de la hauteur EF, à moins que la puiſſance M ne faſſe une révolution entiere autour du cylindre : ainſi la hauteur EF, & la circonférence décrite par le point M, ſont les vîteſſes du poids & de la puiſſance. Par conſéquent, nommant c la circonférence décrite par M; le moment de la puiſſance M ſera $M \times c$, & celui du poids P ſera $P \times EF$: or, par la ſuppoſition, nous avons $M \times c = P \times EF$: donc M. P :: EF. c.

394. On dira peut-être que la puiſſance M, s'élevant de même que le poids, décrit autour du cylindre une ſpirale & non pas une circonférence de cercle ; & que par conſéquent la vîteſſe de la puiſſance devoit être exprimée par cette ſpirale. Mais il faut prendre garde que la puiſſance M étant perpendiculaire au levier, tend par elle-même à décrire la circonférence d'un cercle ; & que ſi pendant ſon mouvement elle décrit une ſpirale, cela vient de la diſpoſition de la machine, ce qui ne change rien : de même, que, quoique ſur un plan incliné le poids parcoure la longueur de ce plan, cependant ce poids n'eſt deſcendu dans la direction de ſa peſanteur que de la hauteur du plan.

Du Coin.

395. Le coin dont on ſe ſert pour fendre le bois, eſt un ſolide de bois ou de fer, fait en forme de priſme triangulaire : l'une de ſes faces ABEF (*Fig.* 196) eſt moindre que les deux autres AFDC, BEDC, leſquelles ſont égales & également inclinées ſur la face AFEB : la ligne CD s'appelle la pointe du coin ; & la face AFEB en eſt la tête. On diſpoſe le coin dans le bois qu'on veut fendre, de façon qu'il repréſente un triangle iſoſcele ABC (*Fig.* 197).

PROPOSITION LXIX.

396. *Si une puiſſance qui pouſſe la tête d'un coin avec une direction RC, eſt en équilibre avec la réſiſtance des parties du bois que l'on veut fendre ; cette puiſſance eſt à la réſiſtance, comme la moitié AR du côté AB de la tête du coin, eſt à la longueur AC de l'un des côtés égaux* (Fig. 197).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que la puiſſance ſoit exprimée par la ligne OC ; la réſiſtance des parties du bois de part & d'autre du coin, ſera perpendiculaire ſur les côtés AC, BC, du coin. C'eſt pourquoi achevant autour de la droite OC priſe pour diagonale, le parallélogramme OHCV ; les deux réſiſtances égales de part & d'autre ſeront exprimées par les droites égales HO, VO ; & la puiſſance OC ſera à la ſomme des deux réſiſtances, comme OC eſt à OH+OV, ou OH+HC.

Or les triangles rectangles ARC, XOC, étant ſemblables, à cauſe de l'angle aigu commun ACR ; l'angle XOC eſt égal à l'angle CAR : c'eſt pourquoi les triangles iſoſceles OHC, ACB, ſont ſemblables entre eux : ainſi OC. OH+HC ou 2OH :: AB. AC +CB ou 2AC. Or en nommant P la puiſſance, & R la ſomme des réſiſtances ; nous avons P. R :: OC. OH+HC ou 2OC : donc P. R :: AB. AC+CB ou 2AC ; ou P. R :: $\frac{1}{2}$ AB ou AR. AC.

397. Quand on veut employer le coin pour élever un poids, alors ce coin eſt fait comme un plan incliné dont la baſe BC (*Fig.* 198) eſt horizontale ; & dans le cas d'équilibre, la puiſſance eſt au poids, comme la hauteur AC du coin eſt à ſa baſe CB. Car le coin ne peut parvenir à la poſition *a*B*c*, à moins que le poids ne ſe ſoit élevé de la hauteur *a*B ou AC : c'eſt pourquoi la droite CB exprime la vîteſſe de la puiſſance, & la droite AC exprime la vîteſſe du poids. D'où il ſuit qu'en nommant la puiſſance A, & le poids P, le moment de la puiſſance eſt A × BC ; & celui du poids, en ſuppoſant que quelque choſe l'empêche de gliſſer & de deſcendre le long du coin, eſt P × AC. Mais dans le cas de l'équilibre, nous avons A × BC = P × AC : donc A. P :: AC. BC.

398. REMARQUE. Dans tout ce que nous venons de dire touchant les machines, nous n'avons conſidéré que le cas de l'équilibre ; mais de là il eſt aiſé de conclure que pour peu qu'on augmente le rapport de la puiſſance au poids, cette puiſſance enlevera le poids & le fera mouvoir. Je ne m'arrête point ici à parler d'un plus grand nombre de machines : ſi on a bien compris la maniere de calculer celles-ci, on calculera aiſément toutes les autres plus compliquées, puiſqu'elles ne ſont que des différentes combinaiſons de celles qu'on vient de voir.

DE L'HYDROSTATIQUE.

399. L'Hydroſtatique eſt la ſcience qui apprend de quelle maniere

les corps peſent dans les fluides, & quel eſt le rapport des peſanteurs des différents fluides.

400. Les corps fluides ſont ceux dont les parties ne ſont pas unies entre elles, & ſe ſéparent ſans peine. On en diſtingue de deux ſortes; les uns, dont les ſurfaces ſe mettent de niveau lorſque rien ne les empêche, comme l'eau, & tout ce que nous nommons *liqueurs*; & les autres, dont les ſurfaces ne ſe mettent pas de niveau, comme la flamme, la fumée, &c. Nous ne parlons ici que des fluides de la premiere eſpece.

401. Le volume d'un corps eſt ſon étendue en longueur, largeur, & profondeur.

402. Lorſque deux corps ont deux volumes égaux & des peſanteurs inégales; celui qui peſe davantage, eſt dit avoir plus de *peſanteur ſpécifique* que l'autre. Ainſi pour trouver les peſanteurs ſpécifiques de deux ou pluſieurs différentes matieres, il faut les mettre ſous des volumes égaux.

403. Lorſque deux corps ont des volumes égaux & des peſanteurs inégales; celui qui peſe le plus, eſt dit être plus *denſe*; c'eſt-à-dire avoir ſes parties plus proches les unes des autres: car ſi les parties de l'un ou de l'autre étoient également reſſerrées entre elles, il y en auroit autant dans l'un & dans l'autre, à cauſe du volume égal; & les peſanteurs ſeroient égales.

404. On entend donc par le plus ou le moins de denſité des corps, le plus ou moins de maſſe, c'eſt-à-dire le plus ou moins de matiere qu'ils contiennent ſous un même volume. D'où il ſuit,

I°. Que ſi deux corps ont des volumes égaux & des maſſes inégales, celui qui a plus de maſſe a plus de denſité; & comme une plus grande maſſe ou une plus grande quantité de matiere peſe plus que celle qui en a moins, celui qui a plus de maſſe a plus de peſanteur que celui qui en a moins.

II°. Que ſi les volumes ſont égaux, les peſanteurs ou les denſités ſont comme les maſſes.

III°. Que ſi les denſités ſont égales, les maſſes ou les peſanteurs ſont comme les volumes.

IV°. Que les volumes étant égaux, les peſanteurs ſpécifiques ſont entre elles comme les peſanteurs abſolues: car les peſanteurs ſpécifiques viennent de la différence des maſſes ou des denſités, leſquelles cauſent les peſanteurs abſolues.

PROPOSITION LXX.

405. *Les maſſes A & B de deux corps qui ont des volumes différents, ſont en raiſon compoſée des denſités & des volumes.*

DÉMONSTRATION. Soit le volume de A triple du volume de B, & ſa denſité double de la denſité de B. Je diviſe le volume de A en trois volumes égaux chacun au volume de B; & par conſéquent dans chacun de ces trois volumes, la maſſe eſt double de la maſſe du volume de B; puiſque ſous des volumes égaux, les maſſes ſont plus ou moins grandes à proportion du plus ou moins de denſité. Donc dans les trois volumes pris enſemble, c'eſt-à-dire dans le volume de A, la maſſe eſt trois fois double, ou ſextuple, de la maſſe de B : ainſi A. B :: 6. 1. Or, la raiſon 6. 1, eſt compoſée de la raiſon 2. 1, des denſités, & de la raiſon 3. 1, des maſſes. Donc, &c.

406. COROLLAIRE. Si l'on nomme M la maſſe A, D ſa denſité, V ſon volume, & m, d, u, la maſſe, la denſité, & le volume de B; on aura M. m :: D×V. d×u : d'où l'on peut tirer les Corollaires ſuivants.

407. D'abord M. m :: D×V. d×u : donc M×d×u=m×D×V; & partant D. d :: M×u. m×V ; c'eſt-à-dire, *les denſités ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes, & de la raiſon inverſe des volumes.*

De même à cauſe de M×d×u=m×D×V, nous avons V. u :: M ×d. m×D ; c'eſt-à-dire, *les volumes ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes & de l'inverſe des denſités.*

PROPOSITION LXXI.

408. *Si deux corps A, B, peſent également, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entre elles réciproquement comme leurs volumes.*

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le volume de A ſoit triple du volume du corps B. Je diviſe A en trois volumes qui ſeront égaux chacun au volume de B : ainſi chacun de ces volumes ne peſera que le tiers de ce que peſe B, puiſqu'on ſuppoſe que A & B peſent également. Or, nous avons dit ci-deſſus (401) que pour juger des peſanteurs ſpécifiques de deux différentes matieres, il faut prendre des volumes égaux de ces matieres : donc puiſque le volume du tiers de A eſt égal au volume de B, & que le volume de ce tiers ne peſe que le tiers du volume de B ; il s'enſuit que la peſanteur ſpécifique de A eſt à la peſanteur ſpécifique de B, comme 1 eſt à 3 ;

c'eſt-à-dire, réciproquement comme le volume de B eſt au volume de A : & ainſi des autres.

PROPOSITION LXXII.

409. *Les peſanteurs abſolues des corps A, B, ſont en raiſon compoſée de la raiſon de leurs volumes, & de celle de leurs peſanteurs ſpécifiques.*

DÉMONSTRATION. Suppoſons que le volume de A ſoit triple du volume de B, & que la peſanteur ſpécifique de A ſoit double de la peſanteur ſpécifique de B. Je diviſe A en trois volumes égaux, dont chacun ſera égal au volume de B. Ainſi le tiers du volume de A peſera deux fois plus que le volume de B, puiſque les peſanteurs ſpécifiques de A & B ſont comme 2 à 1, & que ces peſanteurs ſont les peſanteurs de deux volumes égaux de A & de B : donc les trois volumes qui compoſent A, peſeront trois fois deux fois plus, c'eſt-à-dire ſix fois plus que le volume de B ; & par conſéquent la peſanteur abſolue de A ſera à la peſanteur abſolue de B, comme 6 eſt à 1. Or, la raiſon 6. 1, eſt compoſée de la raiſon 3. 1, des volumes de A & B, & de la raiſon 2. 1, des peſanteurs ſpécifiques. Donc, &c.

DE L'ÉQUILIBRE DES LIQUEURS.

410. Dans les corps ſolides toutes les parties ſont tellement liées entre elles que ſi leur centre de gravité eſt empêché de deſcendre, elles reſtent toutes en repos autour de lui. Mais il n'en eſt pas de même des parties des corps fluides : comme elles n'ont aucun lien fixe entre elles, elles ſe meuvent en tout ſens vers le haut, vers le bas, à droite, à gauche, &c, & leur ſurface ſe met toujours de niveau.

L'expérience conſtante & uniforme confirme ce que nous venons de dire. Que l'on verſe peu à peu du vin dans de l'eau, on voit que les parties du vin ſe diſperſent de tous les côtés, juſqu'à ce que les deux liqueurs ſe ſoient parfaitement mêlées ; & alors ſi l'on ne s'apperçoit plus de ce mouvement, cela provient de l'uniformité de la couleur, qui fait qu'on ne diſtingue plus ce que l'on voyoit auparavant. Si l'on jette du ſel dans de l'eau, toutes les parties de l'eau deviennent ſalées en peu de temps, &c (*).

(*) Les parties de l'eau deviennent ſalées, non en vertu de l'équilibre des liqueurs, mais en vertu de l'affinité de l'eau avec le ſel, quelle que ſoit & la

PROPOSITION LXXIII.

411. *Si l'on verſe d'une même liqueur dans deux tubes, ou cylindres creux verticaux AB, CD, qui ſe communiquent par un tube horizontal EF, & que les deux liqueurs ſoient de niveau, elles ſeront en équilibre entre elles* (Fig. 199 & 200).

DÉMONSTRATION. I°. Si les baſes EB, PD, des deux tubes ſont égales (*Fig.* 199), les colonnes MB, ND, de la liqueur ſont égales, & par conſéquent également peſantes; donc elles preſſent également la liqueur du tube horizontal, & l'équilibre doit ſe trouver entre elles.

II°. Si les baſes EB, PD, ſont inégales (*Fig.* 200), les colonnes MB, ND, ſont entre elles comme leurs baſes EB, PD; à cauſe des hauteurs égales BI, PN. Or, ſi la colonne ND deſcendoit d'une hauteur quelconque NS, il faudroit qu'il paſſât dans l'autre tube, une quantité d'eau égale à NX; & pour cela il faudroit que la hauteur IT, à laquelle la colonne MB s'éleveroit, fût à la hauteur NS, réciproquement comme la baſe SX ou PD eſt à la baſe MI ou EB: car deux cylindres égaux NX, MT, doivent avoir les hauteurs réciproques aux baſes. Ainſi la vîteſſe NS avec laquelle la colonne ND deſcendroit, étant à la vîteſſe IT avec laquelle la colonne MB monteroit, réciproquement comme la colonne MB eſt à la colonne ND; il s'enſuit que ces deux colonnes ont des forces égales, & que par conſéquent elles doivent ſe tenir en équilibre.

III°. Si l'un des tubes AB (*Fig.* 201) eſt incliné à l'horizon, & l'autre vertical, j'en conçois un autre *a*B vertical ſur la même baſe EB. Or, dans celui-ci, la colonne ZB ſeroit en équilibre avec la colonne ND du tube CD: donc la colonne MB du tube AB doit être auſſi en équilibre avec ND, puiſqu'elle eſt égale à la colonne ZB, à cauſe de la baſe commune EB, & de la hauteur égale; & que ſi la colonne ND pouvoit deſcendre, la hauteur à laquelle MB devroit s'élever, ſeroit égale à la hauteur à laquelle ZB devroit s'élever.

---

nature & la cauſe de cette affinité. On peut voir un morceau très curieux ſur les *affinités chymiques*, dans le premier volume de la *Théorie des Etres ſenſibles*, depuis la page 105 juſqu'à la page 158: cette connoiſſance n'eſt point étrangere aux phénomenes de l'Hydroſtatique, qui ſuppoſe toujours que les corps ſolides ou liquides dont on compare les actions réciproques, n'ont entre eux aucune affinité marquée qui les décompoſe & les dénature, ou qui faſſe paſſer les parties de l'un dans les parties de l'autre.

412. COROLLAIRE. De là il ſuit que *ſi deux liqueurs de même eſpece ſont en équilibre dans deux tubes verticaux, elles doivent être de niveau;* car pour peu que le niveau ceſſât, l'équilibre ceſſeroit auſſi.

PROPOSITION LXXIV.

413. *Si l'on remplit le tube horizontal EF de mercure ou vif-argent, & que l'on verſe dans les deux tubes verticaux & égaux deux liqueurs différentes qui ſoient en équilibre, les peſanteurs ſpécifiques de ces liqueurs ſont entre elles réciproquement comme leurs hauteurs* (Fig. 202).

DÉMONSTRATION. A cauſe que les baſes des colonnes MB, ND, ſont égales, l'une ne peut deſcendre d'une certaine hauteur, que l'autre ne monte à une hauteur égale; ainſi les vîteſſes de ces deux colonnes étant égales, de même que leurs forces le ſont, à cauſe de l'équilibre, il faut que leurs maſſes ſoient égales. Car les forces ne ſont autre choſe que les maſſes multipliées par leurs vîteſſes; & comme les maſſes égales ont des peſanteurs abſolues égales, il s'enſuit que les colonnes MB, ND, peſent également.

Suppoſant donc que le volume de la colonne MB ſoit triple du volume de la colonne ND, le tiers du volume de MB ne peſera que le tiers du volume ND. Or, le tiers du volume de MB eſt égal au volume de ND; & quand les volumes ſont égaux, les peſanteurs ſpécifiques des matieres ſont comme les peſanteurs abſolues de ces volumes égaux: donc la peſanteur ſpécifique de MB eſt à la peſanteur ſpécifique de ND, comme 1 à 3; c'eſt-à-dire, réciproquement comme le volume de ND eſt au volume de MD, ou comme la hauteur de ND eſt à la hauteur de MB; car à cauſe des baſes égales, les volumes ND, MB, ſont comme leurs hauteurs.

414. COROLLAIRE. Donc *ſi l'on connoît la peſanteur ſpécifique d'une liqueur, on pourra connoître aiſément, par le moyen de ces tubes, la peſanteur ſpécifique d'une autre liqueur.*

PROPOSITION LXXV.

415. *Si deux vaſes AB, CD, dont les côtés ſont perpendiculaires, ſont remplis d'une même liqueur; les preſſions que leurs fonds ſouffrent, ſont entre elles en raiſon compoſée de la raiſon des hauteurs & de celle des baſes* (Fig. 203).

DÉMONSTRATION. Les liqueurs qui ſont dans les deux vaſes

étant de même nature, leurs maſſes ou leurs peſanteurs ſont entre elles comme leurs volumes. Or, les volumes ſont en raiſon compoſée de la raiſon des hauteurs & de celle des baſes : donc puiſque les maſſes preſſent les fonds avec toute leur peſanteur, à cauſe des côtés perpendiculaires; ces fonds ſont preſſés en raiſon compoſée de la raiſon des hauteurs & de celle des baſes.

416. COROLLAIRE. *Si les baſes ſont inégales & les hauteurs égales ; les preſſions ſont comme les baſes : ſi les baſes ſont égales & les hauteurs inégales, les preſſions ſont comme les hauteurs ; & ſi les baſes ſont égales & les hauteurs auſſi, les preſſions ſont égales.*

417. REMARQUE I. Il eſt bon de prévenir une objection qu'on pourroit me faire. J'ai dit ci-deſſus que ſi l'on verſe de l'eau dans deux tubes inégaux AB, CD (*Fig.* 200), qui ſe communiquent par un tube horizontal ED, & que l'eau des deux tubes ſoit de niveau, les deux colonnes MB, ND, ſont en équilibre. Ainſi l'eau du tube inférieur EF qui ſoutient les deux colonnes MB, ND, fait le même effet que ſi l'on mettoit un fond EB qui ſoutînt la colonne MB, & un fond PD qui ſoutînt la colonne ND. Or, à cauſe des hauteurs égales BI, PN, les deux fonds EB, PD, ſeroient preſſés dans la raiſon de leurs baſes; & comme ces baſes ſont inégales, les preſſions des deux colonnes ſeroient inégales : donc, dira-t-on peut-être, puiſque les deux colonnes preſſent inégalement l'eau du tube inférieur EF ; il ne peut y avoir d'équilibre entre les deux colonnes : ce qui eſt oppoſé à ce que j'ai démontré (411).

Pour répondre donc à cette objection, il s'agit de faire voir que quoique les preſſions des deux colonnes MB, ND, ſoient inégales, il y a cependant équilibre entre ces deux colonnes : ce que je vais démontrer indépendamment de ce que j'ai dit ci-deſſus (411). Suppoſons que la baſe EB de la colonne MB ne ſoit que le tiers de la baſe PD de la colonne ND. Je mets au lieu du tube AB un autre tube AX dont la baſe EX ſoit égale à la baſe PD : & verſant de l'eau dans ce tube AX, juſqu'à ce qu'elle ſoit de niveau avec l'eau du tube CD, les colonnes MX, ND, ſeront égales, & leurs preſſions auſſi, de façon qu'il y aura équilibre entre ces deux colonnes. Concevons que chacune de ces colonnes ſoit diviſée en trois colonnes égales, leurs baſes EX, PD, ſeront auſſi diviſées en trois baſes égales. Ainſi les trois colonnes qui compoſent la colonne MX, ſeront en équilibre avec les trois colonnes qui compoſent la colonne ND, chacune à chacune.

Mettons maintenant en EX une cloiſon égale à la baſe de deux des colonnes qui compoſent la colonne EM, & qui réſiſte autant à la preſſion des deux colonnes correſpondantes de la colonne ND, que les deux colonnes qui étoient au-deſſus de cette cloiſon : enfin ſur le reſte de l'ouverture EB, mettons le tube AB ; il eſt clair que la colonne qui eſt le tiers de la colonne ND, ſera en équilibre avec la colonne MB égale au tiers ; & que les deux autres tiers de la colonne ND trouvant autant de réſiſtance dans la cloiſon qu'on a miſe qu'elles en trouvoient dans les deux colonnes qui étoient au-deſſus de cette cloiſon, ſeront en équilibre avec elles ; & partant, ND ne pourra forcer MB ; & il y aura équilibre, quoique les deux preſſions de MB, ND, ne ſoient pas égales.

418. Remarque II. Si l'un des vaſes cylindriques AB (*Fig.* 201) étoit incliné à l'horizon & l'autre CD vertical, il ſeroit encore vrai de dire qu'en les rempliſſant l'un & l'autre d'une même liqueur, les fonds ſeroient preſſés dans la raiſon compoſée des hauteurs & des baſes. Car mettant au lieu de leur fond un tube horizontal EF, & verſant de l'eau dans l'un & dans l'autre, cette eau ſe mettra de niveau, & la colonne MB ſera en équilibre avec la colonne ND (411). Je mets au lieu du tube incliné AB, un tube vertical *a*B de même baſe ; & la colonne ZB ſera auſſi en équilibre avec la colonne NP : ainſi la colonne ZB, & la colonne MB, faiſant le même effet, preſſeront également l'eau du tube EF. Or, ſi au lieu du tube EF, nous mettons aux colonnes ZB, ND, deux fonds EB, PD, qui ſoutiennent les preſſions de ces colonnes, ces fonds ſeront preſſés en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs. Mais la colonne MB preſſe autant ſon fond que la colonne ZB : donc les fonds des vaſes MB, ND, ſont auſſi preſſés en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs.

Il eſt viſible que tout ce que nous avons dit à l'égard des vaſes ou tubes cylindriques, ſubſiſteroit ſi les vaſes ou tubes étoient priſmatiques, c'eſt-à-dire ſi les baſes ſupérieures étoient égales aux inférieures.

PROPOSITION LXXVI.

419. *Si l'on remplit d'eau un vaſe ABCDEFHL dont la baſe ſupérieure ABCD ſoit moindre que le fond HLEF : ce fond eſt autant preſſé, qu'il le ſeroit ſi la baſe ſupérieure étoit égale à l'inférieure* (Fig. 204).

Démonstration. Je conçois un vaſe priſmatique OE de même

hauteur & de même baſe que le vaſe ABCDEFHL : dans ce vaſe OE, que je conçois plein d'eau, je mets deux ſections ou cloiſons BCPQ, ADRS, perpendiculaires ſur la baſe, en ſorte que la partie QPSR de ſa baſe HLEF ſoit égale à la baſe ſupérieure ABCD du vaſe ABCDEFHL. Par cette conſtruction, le vaſe priſmatique OE ſera diviſé en trois vaſes priſmatiques OP, BR, AE; & les preſſions de l'eau ſur ces trois baſes ſeront entre elles comme les baſes, à cauſe des hauteurs égales (415) : & ôtant les cloiſons, ces trois baſes ſeront encore comprimées de la même façon; car il y aura toujours une même quantité d'eau ſur chacune d'elles. Je coupe la colonne d'eau OBQHLPCZ par une cloiſon diagonale BHLC, de façon qu'ôtant l'eau qui eſt au-deſſus, la cloiſon preſſe autant l'eau inférieure de cette colonne qu'elle étoit preſſée par l'eau ſupérieure : il eſt clair que la baſe HQPL ſera preſſée de même qu'elle l'étoit auparavant. De même ſi dans la colonne ATFSREXD je mets une cloiſon diagonale ADEF qui preſſe autant l'eau inférieure de cette colonne qu'elle étoit preſſée par l'eau ſupérieure ; la baſe RSFE de cette colonne ſera preſſée comme elle l'étoit auparavant. Or, les deux cloiſons BCLH, ADEF, forment avec le reſte du vaſe priſmatique OE, le vaſe donné ABCDEFHL : donc le fond de ce vaſe eſt autant preſſé que le fond du vaſe priſmatique OE qui ſeroit auſſi plein d'eau ; & par conſéquent le fond du vaſe donné eſt auſſi preſſé, que ſi ſa baſe ſupérieure étoit égale à l'inférieure.

420. REMARQUE. On dira peut-être que ſi cette propoſition étoit vraie, il s'enſuivroit que le vaſe priſmatique OE plein d'eau ne peſeroit pas plus que le vaſe ABCDEFHL, qui ſeroit auſſi plein d'eau, quoique celui-ci en contienne moins. Mais il faut bien diſtinguer entre la peſanteur de la maſſe totale d'un fluide enfermé dans un vaſe, & les preſſions de ce fluide contre le fond & les parois du vaſe. La peſanteur de la maſſe totale n'a d'autre direction que celle qui pouſſe vers le centre de la terre, au lieu que le fluide preſſe de tous côtés également les parois du vaſe. En effet, avant d'avoir mis dans le vaſe priſmatique OE, les cloiſons BCLH, ADEF, qui coupent diagonalement les colonnes latérales de ce vaſe; l'eau ſupérieure à ces cloiſons étoit en équilibre avec l'eau inférieure, puiſque la ſurface ſupérieure de l'eau du vaſe étoit de niveau : donc l'eau inférieure des colonnes latérales preſſoit autant de bas en haut l'eau ſupérieure, que la ſupérieure preſſoit l'inférieure de haut en bas. C'eſt pourquoi les cloiſons faiſant le même

effet que l'eau ſupérieure, doivent être preſſées par l'eau inférieure de bas en haut, de la même façon que l'eau ſupérieure en étoit preſſée.

Or cela étant, il eſt viſible que les preſſions d'un fluide renfermé dans un vaſe, pouſſant également de toutes parts, ne peuvent augmenter la peſanteur du liquide qui ne pouſſe que vers le centre de la terre; & que par conſéquent la maſſe d'eau contenue dans le vaſe priſmatique OE, étant plus grande que celle qui eſt contenue dans le vaſe ABCDEFHL, doit peſer plus que cette maſſe, quoique les preſſions ſur les fonds ſoient égales.

PROPOSITION LXXVII.

421. *Si l'on remplit d'eau un vaſe ABCDEFGH, dont la baſe ſupérieure ABCD eſt plus grande que la baſe inférieure EFGH; cette baſe ou fond n'eſt pas plus preſſée par la liqueur, que ſi la baſe ſupérieure étoit égale à l'inférieure* (Fig. 205).

Démonstration. Je conçois un vaſe priſmatique BO, dont la baſe inférieure PSRO ſoit égale à la baſe ſupérieure ABCD du vaſe donné : ce vaſe BO étant plein d'eau, je conçois deux ſections ZLHG, XQEF, perpendiculaires ſur la baſe, en ſorte que la partie HGEF du fond de ce vaſe compriſe entre les deux ſections ſoit égale au fond du vaſe donné. Ainſi le vaſe priſmatique BO eſt compoſé de trois vaſes priſmatiques BH, ZE, XO, & les fonds de ces trois vaſes ſont preſſés par les trois colonnes d'eau en raiſon de ces mêmes fonds, à cauſe des hauteurs égales des colonnes; & ôtant ces ſections ZLGH, XQEF, les preſſions des colonnes ſur leurs fonds ſont encore les mêmes.

Je conçois, dans les deux colonnes latérales, deux cloiſons CHGB, DAFE, qui les coupent diamétralement, de façon qu'ôtant l'eau inférieure, ces cloiſons ſoutiennent l'eau ſupérieure de la même façon que l'inférieure les ſoutenoit : il eſt clair que l'eau ſupérieure étant en équilibre avec ces cloiſons, n'agira point ſur le fond HGFE de la colonne du milieu. Or, les deux cloiſons, jointes avec le reſte du vaſe priſmatique BO, compoſent le vaſe donné ABCDEFGH : donc le fond de ce vaſe n'eſt pas plus preſſé par l'eau qu'il contient, que ſi ſa baſe ſupérieure étoit égale à l'inférieure; c'eſt-à-dire, s'il n'y avoit que la colonne du milieu qui le preſſât.

PROPOSITION LXXVIII.

422. *Toutes les parties de la ſurface d'un vaſe plein d'eau*

ſont preſſées en raiſon compoſée de leurs grandeurs & de leurs diſtances à la ſurface ſupérieure de l'eau compriſe dans le vaſe (Fig. 206).

DÉMONSTRATION. Soit un vaſe AB, ayant à l'un de ſes côtés un tube vertical HL, dont la baſe eſt HP. Si l'on remplit le vaſe d'eau, cette eau montera le long du tube & ſe mettra de niveau avec celle du vaſe; car on peut conſidérer le vaſe comme un tube qui communique avec le tube HL. Je mets en dedans du vaſe un tube HV, qui a pour baſe l'orifice HP ſur lequel il eſt perpendiculaire, & dont la hauteur HX ſoit égale à la diſtance de cet orifice à la ſurface ſupérieure de l'eau du vaſe, c'eſt-à-dire à la hauteur moyenne NT du cylindre d'eau. Ainſi les deux cylindres d'eau HV, HE, ayant même hauteur, ſont entre eux comme leurs baſes; & ces deux cylindres d'eau ſont en équilibre. Car s'il pouvoit paſſer dans le cylindre HE, une partie HS du cylindre XV, cette partie devroit occuper dans le tube HL un volume EL, égal au volume HS; & partant la hauteur du volume EL ſeroit à la hauteur du volume HS, réciproquement comme la baſe HP du volume HS, eſt à la baſe FE du volume EL. D'où il ſuit que les vîteſſes de ces deux colonnes étant entre elles réciproquement comme leurs volumes, ces deux colonnes ont des forces égales.

De même, ſi l'on ſuppoſe un autre tube extérieur MO, & un autre intérieur MQ, dont les hauteurs ſoient égales, je prouverai de la même façon que les deux colonnes d'eau contenues dans ces tubes ſont en équilibre. C'eſt pourquoi ſi à la place des orifices HP, MY, je mets deux cloiſons qui réſiſtent autant à l'eau des tubes intérieurs, que l'eau des tubes extérieurs leur réſiſtoit; il eſt clair que ces deux cloiſons ſeront preſſées dans la raiſon des deux colonnes d'eau HV, MQ. Or, ces deux colonnes ſont en raiſon compoſée de la raiſon de leurs baſes & de celle de leurs hauteurs; c'eſt-à-dire des diſtances de leurs baſes à la ſurface ſupérieure de l'eau du vaſe: donc les cloiſons ſeront preſſées dans la même raiſon. Mais ces cloiſons ſont des parties de la ſurface du vaſe: donc, &c.

423. COROLLAIRE. De tout ce que nous venons de dire, il ſuit qu'*on pourroit ſe ſervir aiſément de l'eau pour élever des poids conſidérables* (Fig. 207).

DÉMONSTRATION. Soit un grand baſſin AB, rempli d'eau, & exactement fermé de tous les côtés. J'adapte ſur ſon couvercle deux tubes PR, SX, dont l'orifice P de l'un ſoit petit, & l'autre

ST ſoit fort grand : ſi je verſe de l'eau dans l'un & l'autre tube, cette eau ſe mettra de niveau. Ainſi ſuppoſé que ce niveau ſoit à la hauteur PH d'un pied, & que l'orifice ST ſoit cent fois plus grand que l'orifice P, la colonne PH ſoutiendra la colonne SN cent fois plus peſante qu'elle : & ſi au lieu de la colonne SN on met un piſton ſur l'orifice ST ſur lequel ſoit un poids qui, avec le piſton, peſe autant que la colonne SN ; la colonne PH ſera en équilibre avec le piſton & le poids. C'eſt pourquoi ſi l'on verſe de nouveau de l'eau dans le tube PR, cette eau forcera le piſton & le poids de monter dans le tube SX.

Suppoſant donc que la colonne PH contienne un pied cubique d'eau, lequel, ſelon les expériences, peſe 70 livres ; cette colonne ſera en équilibre avec 100 fois 70 livres, c'eſt-à-dire avec 7000 livres ; & il n'y aura plus qu'à continuer à verſer de l'eau dans le tube PR, pour élever le poids auſſi haut qu'on voudra, mais avec beaucoup de lenteur.

Car, par exemple, ſi on veut que le poids s'éleve à la hauteur d'un pied, il faudra verſer 102 pieds cubiques d'eau ; puiſque la colonne SN en contiendra 100, & la colonne PH deux, dont l'un ſera en équilibre avec la colonne SN, & l'autre avec le poids qui ſera ſur cette colonne.

DES CORPS PLONGÉS DANS LES FLUIDES QUI ONT MOINS DE PESANTEUR SPÉCIFIQUE QUE CES CORPS.

PROPOSITION LXXIX.

424. *Si l'on plonge un corps dans un fluide qui ait moins de peſanteur ſpécifique que lui ; ce corps perd une partie de ſon poids, égale au poids d'un volume du fluide égal au volume du corps.*

Démonstration. Suppoſons qu'un pied cubique de plomb ſoit plongé dans l'eau ; il occupera la place d'un même volume d'eau. Or, le poids de ce volume étoit ſoutenu par celle qui l'environnoit : donc une même quantité de poids du pied cubique de plomb ſera auſſi ſoutenue par l'eau qui l'environne ; & par conſéquent le plomb peſera moins de toute cette quantité.

425. Corollaire. Donc *un corps plongé dans un fluide qui a moins de peſanteur ſpécifique que lui, ne deſcend au fond qu'avec*

une force égale à la différence de ſon poids au poids du fluide de même volume ; & par conſéquent la puiſſance qui peut tenir le corps en équilibre, c'eſt-à-dire l'empêcher de deſcendre juſqu'au fond, eſt égale à cette différence.

426. PROBLÊME I. *Trouver les peſanteurs ſpécifiques de différents fluides* (Fig. 208).

SOLUTION. Je prends une balance ordinaire AB : je mets à l'extrémité A un crochet E, qui ſoit en équilibre avec le baſlin C ſuſpendu à l'autre extrémité B. J'attache à ce crochet un crin de cheval d'où pend une balle de plomb P : je peſe cette balle dans l'air, & la plongeant enſuite ſucceſſivement dans chaque fluide, je la peſe de nouveau dans chacun d'eux. Les pertes de poids que cette balle fait dans les fluides, ſont les peſanteurs ſpécifiques de ces fluides.

Car les volumes des fluides dont la balle P occupe la place, ſont tous égaux entre eux, & au volume de la balle. Or, le poids de chacun de ces volumes de fluides eſt égal à la perte de poids que la balle fait lorſqu'elle eſt plongée dans le fluide correſpondant : donc les différents poids des volumes égaux de fluides dont la balle occupe la place, ſont égaux aux différentes pertes de poids que la balle fait lorſqu'elle eſt plongée dans ces différents fluides. Mais quand les volumes ſont égaux, les différents poids de ces volumes marquent les peſanteurs ſpécifiques : donc les peſanteurs ſpécifiques des différents fluides dans leſquels la balle eſt plongée, ſont exprimées par les différentes pertes de poids que la balle fait.

Par exemple, ſuppoſons que la balle P peſe 12 livres, & qu'étant plongée ſucceſſivement dans deux fluides, elle perde dans le premier trois livres de ſon poids, & dans le ſecond 4 ; les deux volumes égaux des fluides dont la balle occupera la place, peſeront donc l'un trois livres, & l'autre 4. C'eſt pourquoi à cauſe des volumes égaux, les peſanteurs ſpécifiques de ces deux fluides ſeront comme 3 eſt à 4; & ainſi des autres.

427. C'eſt de cette façon qu'on peut connoître le poids d'une liqueur contenue dans un vaiſſeau. Pour cela on meſure la capacité du vaiſſeau par les regles de la Géométrie ; puis ſuſpendant au crochet de la balance un pied cubique de plomb, on cherche combien ce pied cubique perd de ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans la liqueur : ainſi la perte de poids qu'il fait, eſt égale au poids d'un pied cubique de la liqueur. C'eſt pourquoi on dit, par

regle

regle de trois : ſi un pied cubique de la liqueur peſe tant, combien peſera le nombre de pieds cubiques contenus dans le vaſe ?

428. PROBLÊME II. *Trouver les peſanteurs ſpécifiques de deux ou pluſieurs différentes matieres ſolides* (Fig. 208).

SOLUTION. Je prends deux poids égaux des deux différentes matieres données : je mets l'un dans le baſſin C de la balance ; & ſuſpendant l'autre P au crochet E, ces deux poids ſont en équilibre. Je plonge P dans l'eau, & j'examine ce qu'il perd de ſon poids. Je retire P, & le mettant dans le baſſin C, je tranſporte l'autre poids en E ; & je cherche ce qu'il perd de ſon poids lorſqu'il eſt plongé dans l'eau : les deux pertes que ces deux poids ont faites, ſont entre elles réciproquement comme les peſanteurs ſpécifiques des deux matieres ; ce que je prouve ainſi.

Les deux poids égaux étant de matieres différentes, doivent avoir des denſités, & par conſéquent des volumes différents ; car ce qui conſtitue la différence des matieres, c'eſt la différence de leurs denſités : ainſi les volumes d'eau dont ces deux poids occupent la place, ſont différents. Mais l'eau étant de même nature ou de même denſité dans l'un & l'autre volume, les peſanteurs de ces volumes ſont entre elles comme les volumes : donc les pertes que les deux poids font dans l'eau, ſont auſſi comme les deux volumes d'eau, ou comme les deux volumes des deux poids. Or quand deux poids peſent également, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entre elles réciproquement comme leurs volumes : donc elles ſont auſſi réciproquement comme les pertes que les deux poids font dans l'eau.

Suppoſons que le premier des deux poids égaux ait perdu dans l'eau trois livres de ſon poids, & que l'autre en ait perdu quatre ; le volume d'eau dont le premier poids occupe la place, peſera donc 3 livres ; & le volume d'eau dont le ſecond occupe la place, peſera 4 livres : & ces deux volumes ſeront entre eux comme 3 à 4 ; de même que les deux volumes des deux poids. Ainſi la peſanteur ſpécifique du premier poids ſera à la peſanteur ſpécifique du ſecond, comme 4 eſt à 3.

429. C'eſt de cette maniere qu'on a trouvé les peſanteurs ſpécifiques des ſolides ſuivants, ayant tous un volume égal au volume d'une maſſe d'or peſant 100 livres.

Mercure.	71 lb ½	Etain pur	38 lb ½
Plomb	60 ½	Aimant	26
Argent.	54 ½	Marbre	21
Or	100	Pierre dure. . . .	14
Cuivre	47 ⅓	Soufre	12 ½
Fer	42	Cire	5
Etain commun. . . .	39	Eau	5 ⅓

Par le moyen de cette Table, ſi on veut trouver, par exemple, quelle eſt la peſanteur d'un ſolide de plomb dont le volume eſt égal à un volume d'eau peſant 200 livres; on dira par regle de trois: la peſanteur ſpécifique 5 ⅓ de l'eau eſt à la peſanteur ſpécifique 60 ½ du plomb, comme la peſanteur 200 livres d'eau eſt à un quatrieme terme qui ſera la peſanteur du volume propoſé du plomb; & ainſi des autres.

DES CORPS PLONGÉS DANS DES FLUIDES QUI ONT PLUS DE PESANTEUR SPÉCIFIQUE QU'EUX.

PROPOSITION LXXX.

430. *Si un corps eſt jetté dans un fluide qui a plus de peſanteur ſpécifique que lui, ce corps s'enfoncera dans le fluide juſqu'à ce que le volume d'eau, dont il occupera la place, peſe autant que le corps* (Fig. 209).

Démonstration. Puiſque le corps ABCD a moins de peſanteur ſpécifique que le fluide, un moindre volume ABC de ce fluide peſera autant que ce corps: donc quand le corps en s'enfonçant aura chaſſé ce moindre volume d'eau, les parties du fluide qui ſoutenoient ce moindre volume, ſoutiendront de la même façon le poids du corps, & par conſéquent la partie ADC ſurnagera.

431. La peſanteur ſpécifique d'un corps qui en a moins qu'un fluide, eſt à la peſanteur ſpécifique de ce fluide, comme le volume de la partie du corps qui s'enfonce dans le fluide, eſt au volume total du corps. Car puiſque le corps & le volume du fluide dont la partie ABC occupe la place, peſent également, les peſanteurs ſpécifiques du corps & du fluide ſont entre elles réciproquement comme leurs volumes (408); & par conſéquent la peſanteur ſpécifique du corps eſt à celle du fluide, réciproquement comme le

volume ABC du fluide, c'eſt-à-dire le volume de la partie enfoncée ABC, eſt au volume total du corps ABCD.

432. THÉORÊME I. *Si une puiſſance P tient en équilibre ſous la ſurface d'un fluide un corps ABCD, qui a moins de peſanteur ſpécifique que le fluide, la puiſſance eſt au poids du corps, comme la différence des peſanteurs ſpécifiques du fluide & du corps eſt à la peſanteur ſpécifique du corps* (Fig. 210).

DÉMONSTRATION. Je prends un volume du fluide égal au volume de la partie ABC du corps qui s'enfonceroit librement dans le fluide; & je nomme ce volume de fluide $= x$. Je prends de même un autre volume du fluide égal au volume total ABCD du corps, & je le nomme $= y$. Enfin je nomme $= z$ la différence ADC des deux volumes x, y. Il eſt clair que les deux volumes x, y, ayant des denſités égales, leurs peſanteurs ſont entre elles comme les volumes.

Or quand la puiſſance P tient en équilibre le corps ABCD ſous la ſurface du fluide, ce corps occupe la place du volume y qui étoit ſoutenu par le fluide qui l'environnoit: & comme le corps ABCD ne peſe pas plus que le volume x, il eſt évident que ce corps doit être repouſſé en haut par le fluide environnant avec une force égale à la différence des poids des volumes x, y, c'eſt-à-dire égale à la différence z de ces deux volumes, en exprimant les poids des volumes par x, y. Or, la puiſſance P eſt égale à la force qui repouſſe le corps en haut: donc P eſt égal au poids z. Mais les peſanteurs ſpécifiques du corps & du fluide ſont entre elles comme les volumes x, y (431), ou comme les poids x, y: donc leur différence eſt auſſi comme z; & par conſéquent la puiſſance P eſt au poids ABCD, comme la différence z des peſanteurs ſpécifiques du fluide & du corps eſt à la peſanteur ſpécifique x du corps ABCD.

433. THÉORÊME II. *Mais ſi la puiſſance empêche de deſcendre juſqu'au fond un corps qui a plus de peſanteur ſpécifique que le fluide, alors la puiſſance eſt au poids du corps, comme la différence des peſanteurs ſpécifiques du corps & du fluide eſt à la peſanteur ſpécifique du corps* (Fig. 210).

DÉMONSTRATION. Je nomme x le volume du fluide égal au volume du corps; y le volume du même fluide qui peſeroit autant que le corps; & z la différence de ces deux volumes. Ainſi à cauſe que ces volumes ſont de même denſité, leurs peſanteurs ou poids ſont exprimés par les volumes x, y; & la différence des poids eſt

exprimée par z. Or, l'eau qui environne le corps, ne peut ſoutenir que le poids x: donc le corps dont le poids eſt égal à y, deſcend vers le fond avec une force égale à z, & par conſéquent la puiſſance qui ſoutient ce corps eſt auſſi égale à z. C'eſt pourquoi cette puiſſance eſt au corps comme z eſt à y. Mais à cauſe que le volume y peſe autant que le corps, la peſanteur ſpécifique du corps eſt à la peſanteur ſpécifique du fluide, réciproquement comme le volume y du fluide eſt au volume du corps ou à ſon égal x. Donc les peſanteurs ſpécifiques du corps & du fluide ſont auſſi exprimées par y, x, & leur différence par z: & par conſéquent la puiſſance eſt au corps, comme la différence z des deux peſanteurs ſpécifiques eſt à la peſanteur ſpécifique y du corps.

434. PROBLÊME. *Connoiſſant le poids d'un corps, & le rapport de ſa peſanteur ſpécifique à celle d'un fluide qui a moins de peſanteur ſpécifique; connoiſſant auſſi la peſanteur ſpécifique d'une autre matiere qui a moins de peſanteur ſpécifique que le fluide; déterminer la quantité de cette ſeconde matiere qu'il faut joindre au premier corps, afin que les deux enſemble étant jettés dans le fluide, reſtent entre la ſurface du fluide & le fond.*

SOLUTION. I°. Soit la peſanteur du premier corps 60 livres, & le rapport de ſa peſanteur ſpécifique à celle du fluide comme 3 à 1. Donc la peſanteur ſpécifique de ce corps eſt à la différence des peſanteurs ſpécifiques du corps & du fluide, comme le poids du corps eſt à la puiſſance qui tiendroit ce corps entre la ſurface du fluide & le fond (432): faiſant donc 3. 3—1 ou 3. 2 :: 60. 40; ce quatrieme terme 40 exprimera la puiſſance qui empêchera le corps de deſcendre vers le fond.

II°. Maintenant ſoit le rapport de la peſanteur ſpécifique de l'autre matiere à la peſanteur ſpécifique du fluide, comme 1 à 4: donc la différence des deux peſanteurs ſpécifiques eſt à la peſanteur ſpécifique du corps, comme la puiſſance qui doit tenir ſubmergée la partie de cette matiere que je demande, eſt au poids de cette partie (432). Or, cette puiſſance ayant une direction contraire à la puiſſance qui tiendroit l'autre corps entre la ſurface du fluide & le fond, il eſt clair que ces deux puiſſances ne peuvent être en équilibre, à moins qu'elles ne ſoient égales: donc cette ſeconde puiſſance doit être auſſi=40. Faiſant donc 4—1 ou 3. 1 :: 40. $\frac{40}{3}$ ou $13\frac{1}{3}$; ce dernier terme $13\frac{1}{3}$ ſera le poids de la ſeconde matiere qu'il faut unir au premier corps, afin qu'en les plongeant dans le fluide, leur maſſe totale ſe tienne entre la ſurface & le fond: car

l'une tendant vers le fond par ſon poids, & l'autre étant repouſſée vers le haut avec des forces égales aux puiſſances qui les tiendroient entre la ſurface & le fond, elles ſe tiendront en équilibre.

Il eſt évident que pour peu qu'on augmente le poids qui a moins de peſanteur ſpécifique que le fluide, la maſſe totale montera juſqu'à la ſurface de l'eau; & qu'au contraire, ſi l'on augmente l'autre poids, la maſſe totale ira au fond : & de là on peut tirer aiſément la maniere de faire remonter ſur la ſurface de l'eau les corps ſubmergés.

DE L'AIROMÉTRIE OU MESURE DE L'AIR.

435. L'air eſt un fluide qui environne la terre, & qui ſe trouve dans tous les lieux d'ici-bas où il nous ſemble qu'il n'y a rien.

436. L'air peſe; il a du reſſort; il eſt capable d'être comprimé, de ſe dilater, d'être raréfié par la chaleur, ou condenſé par le froid : ce que l'on connoît par les expériences dont nous parlerons bientôt.

437. On entend donc par le mot d'*airométrie* ou de meſure de l'air, la ſcience qui nous apprend à connoître les différents degrés de peſanteur, de reſſort, de compreſſion, de dilatation, qui ſe trouvent dans le fluide qui environne la terre, ſelon les différents changements qui peuvent lui arriver.

438. Si l'on pouſſe la main rapidement vers le viſage, ſans cependant le toucher, on ſent un certain effort qui fait voir que quoiqu'il ſemble que la main ſe meuve dans un eſpace vuide, il faut cependant qu'elle pouſſe vers le viſage quelque corps, & c'eſt ce corps que nous nommons *air*.

439. EXPÉRIENCE I. Si l'on prend un vaſe exactement fermé de tous les côtés, & qu'après y avoir fait un petit trou ou orifice auquel on adapte un robinet bien fermé, on le peſe, & qu'enſuite par le moyen d'un cylindre creux avec un piſton en forme de ſeringue, on introduiſe dans ce vaſe une plus grande quantité d'air qu'il ne contient, on trouve en fermant le robinet, & remettant le vaſe dans la balance, qu'il peſe plus qu'il ne peſoit auparavant : que ſi on ouvre alors le robinet, & qu'on mette la main près de l'ouverture, on ſent ſortir l'air; après quoi ſi l'on peſe de nouveau le vaſe, on trouve qu'il n'a plus que ſon premier poids. Or de là il ſuit :

I°. Que *l'air a de la peſanteur*, puiſque l'augmentation du poids du vaſe ne peut être attribuée qu'à la plus grande quantité d'air qu'on y a fait entrer.

II°. Que *cette peſanteur tend vers le centre de la terre*, puiſqu'elle pouſſe le baſſin de la balance vers ce centre.

III°. Que *l'air peut ſe condenſer ;* car le volume du vaſe étant toujours le même, en contient tantôt plus, tantôt moins.

IV°. Qu'*il ſe peut dilater*, puiſqu'il ſort dès qu'on ouvre le robinet ; ce qui provient de ce que le premier air qui étoit dans le vaſe, tend à reprendre ſon volume.

V°. Enfin, que *l'air a du reſſort qui le pouſſe à ſe dilater de tous côtés ;* car ſoit qu'on mette la main vis-à-vis de l'orifice, ou en deſſus ou en deſſous, ou à droite ou à gauche, on ſent toujours ſortir l'air, à la différence des autres liquides qui, ſortant d'un vaſe, ne ſortent que d'un côté, c'eſt-à-dire vers le centre de la terre.

440. Expérience II. Si après avoir ſoufflé dans une veſſie de porc, juſqu'à ce qu'elle ſoit médiocrement enflée, & qu'ayant ſerré fortement ſon ouverture, pour empêcher l'air d'en ſortir, on l'approche du feu de plus en plus, elle crevera enfin en faiſant un grand bruit : mais ſi avant qu'elle creve on la retire d'auprès du feu, elle ſe déſenflera peu à peu, & ſe remettra dans ſon premier état : que ſi on la tranſporte dans un air beaucoup plus froid, elle ſe mettra dans un moindre volume que celui où on l'avoit miſe en ſoufflant dedans.

Or, ceci fait voir que la chaleur raréfie l'air, & augmente ſon reſſort ; & qu'au contaire le froid le condenſe & diminue la force de ſon reſſort, ſes parties ſe trouvant moins tendues dans le froid que la dans chaleur.

441. Expérience III. Si l'on prend un canon ou un cylindre creux AB (*Fig.* 211), & qu'après avoir mis deux bouchons aux extrémités A, B, on pouſſe le bouchon B vers le bouchon A ; on éprouve que le bouchon B étant parvenu à une certaine diſtance AE du bouchon A, celui-ci part rapidement & avec bruit.

Or, comme cela ne peut arriver que parceque l'air qui étoit compris entre le bouchon A & le bouchon B ſe trouve trop comprimé lorſque B eſt parvenu en E ; il s'enſuit qu'une trop grande compreſſion de l'air augmente ſon reſſort : ainſi un trop grand froid qui condenſeroit trop l'air, augmenteroit ſon reſſort au lieu de le diminuer ; & l'on peut dire de même qu'une trop grande chaleur feroit perdre à l'air tout ſon reſſort ; la raiſon en eſt que le reſſort de l'air n'étant pas d'une force infinie, une trop grande dilatation doit enfin le briſer.

442. L'air trop comprimé fait effort pour ſe dilater, & s'échappe

enfin par l'endroit qui lui réſiſte le moins. De même l'air dilaté par la chaleur faiſant effort contre les corps qui l'environnent, fait céder ceux qui lui réſiſtent moins ; & c'eſt pour cette raiſon que les Mineurs placent leurs mines de façon que les terres qu'ils veulent enlever, réſiſtent moins que les autres terres qui environnent leurs fourneaux. Si l'on pouvoit comprimer l'air dans la chambre d'une mine auſſi aiſément qu'on le dilate par le feu qu'on met à la poudre ; on feroit ſauter les terres qui ſont au-deſſus avec la même facilité. L'expérience du cylindre AB fermé par les deux bouchons A, B, en eſt une preuve ; de même que les arquebuſes à vent.

443. EXPÉRIENCE IV. Qu'on prenne un tube AC (*Fig.* 212), dont la longueur ſurpaſſe 32 pieds : qu'on bouche l'ouverture inférieure C ; & qu'après l'avoir rempli d'eau & plongé verticalement dans un vaſe DE auſſi plein d'eau, on débouche l'ouverture C : l'eau du tube deſcendra en forçant celle du vaſe de ſe répandre juſqu'à ce qu'elle ſoit parvenue en M, où ſa ſurface ſera de niveau avec celle de l'eau du vaſe, ainſi que nous l'avons démontré dans l'Hydroſtatique. Mais ſi avant de déboucher l'ouverture C, on ferme exactement l'ouverture A, & qu'enſuite on débouche C ; l'eau du tube deſcendra juſqu'à ce que la ſurface ſupérieure ſoit au-deſſus de la ſurface de l'eau du vaſe de la hauteur de 32 pieds ; après quoi elle ne deſcendra plus.

Or, ceci fait voir qu'une colonne d'air dont le diametre eſt égal au diametre du tube, & dont la hauteur s'étend depuis la ſurface de l'eau du vaſe juſqu'au lieu le plus élevé de l'air, ne peſe pas plus que la colonne d'eau du tube BN de 32 pieds de hauteur ; ce que je prouve ainſi (*Fig.* 212).

Suppoſons que les côtés du vaſe ſoient perpendiculaires ſur le fond, & qu'ils ſoient prolongés juſqu'à la hauteur de 32 pieds au-deſſus de la baſe ſupérieure DH : ſuppoſons auſſi que le fond VE ſoit cinquante fois plus grand que l'ouverture C du tube. Il eſt clair que ſi on remplit d'eau le vaſe ainſi prolongé, l'eau compriſe entre DH & RS, ſera cinquante fois plus grande que l'eau du tube ; c'eſt-à-dire que l'eau qui environnera le tube, eſt à l'eau du tube, comme 49 eſt à 1 ; & partant, cette eau peſera autant que 49 colonnes égales à la colonne d'eau du tube. Mais par les regles de l'Hydroſtatique, l'orifice A étant débouché, les 49 colonnes ſoutiennent la colonne du tube, ſans la faire monter au-deſſus de leur niveau ; & par l'expérience dont nous venons de parler, ſi on bouche A, & qu'on retranche les 49 colonnes, l'air qui peſe ſur DH ſou-

tient la colonne du tube à la même hauteur. Donc cet air peſe autant que les 49 colonnes ; & par conſéquent une colonne de cet air, de même baſe que l'orifice C, & dont la hauteur s'étend depuis la ſurface DH juſqu'au lieu le plus élevé de l'air, peſe autant que la colonne d'eau du tube de 32 pieds de hauteur.

On dira peut-être que les 49 colonnes d'eau ſoutiennent la colonne d'eau du tube non ſeulement par leur propre poids, mais encore par celui des colonnes d'air qui leur ſont perpendiculaires ; & que par conſéquent, quand on ſupprime les 49 colonnes d'eau, & que l'air qui prend leur place fait le même effet, il faut que ce ſoient les 49 colonnes d'air de même hauteur que les 49 colonnes d'eau qui peſent autant que ces colonnes. Mais il faut prendre garde que j'ai dit qu'en mettant les 49 colonnes d'eau on laiſſe l'orifice A ouvert, ce qui fait tomber l'objection : car ſi les 49 colonnes d'eau ſont preſſées par l'air qui peſe ſur elles, la colonne d'eau du tube eſt auſſi preſſée par l'air qui lui eſt vertical ; & comme l'air ſe met de niveau comme les autres fluides, & que par conſéquent ſa hauteur eſt par-tout à égale diſtance de la ſurface de la terre ; en concevant que cette ſurface ſoit par-tout à égale diſtance de ſon centre, il s'enſuit que l'air qui peſe ſur les 49 colonnes d'eau, eſt à celui qui peſe ſur la colonne du tube avec lequel il eſt en équilibre, comme 49 à 1 : & partant le poids de l'air qui eſt ſur les 49 colonnes d'eau, eſt au poids de l'air qui eſt ſur la colonne du tube, comme 49 eſt à 1 ; de façon que le poids des 49 colonnes d'eau, joint au poids de l'air ſupérieur, eſt au poids de la colonne du tube, joint au poids de l'air qui peſe ſur elle, encore comme 49 eſt à 1. Mais le poids des 49 colonnes d'eau & de l'air qui les charge, eſt en équilibre avec le poids de la colonne du tube & de l'air ſupérieur : donc ſupprimant de part & d'autre le poids de l'air, le poids ſeul des 49 colonnes d'eau ſoutiendroit le poids ſeul de la colonne d'eau du tube, à cauſe de la raiſon 49 à 1 qui ſeroit toujours la même. Or, de la maniere dont eſt faite l'expérience dont nous venons de parler, l'air qui eſt au-deſſus de la colonne du tube ne preſſe point cette colonne, puiſque l'orifice A eſt bouché exactement : donc l'air extérieur qui peſe ſur la baſe DH, ne ſoutient préciſément que le poids de cette colonne, lorſqu'elle eſt à la hauteur de 32 pieds ; & par conſéquent cet air peſe autant que le poids des 49 colonnes pris en lui-même, & indépendamment de l'air qui peſeroit ſur lui.

444. COROLLAIRE I. Une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur

teur eſt en équilibre avec une colonne de mercure de même baſe & d'environ 28 pouces de hauteur ; ainſi que les expériences journalieres le font voir : donc une colonne d'air de même baſe, & qui s'étend juſqu'au lieu le plus élevé de l'air, eſt en équilibre avec une colonne d'environ 28 pouces de mercure, & peſe autant qu'elle.

445. La maſſe totale de l'air qui environne la terre, ſe nomme *atmoſphere ;* & une colonne de cet air qui eſt en équilibre avec une colonne de même baſe, & qui contient 28 pouces de mercure ou 32 pieds d'eau, ſe nomme *poids de l'atmoſphere.*

446. COROLLAIRE II. L'air inférieur étant toujours comprimé par l'air ſupérieur, tend à ſe dilater avec une force égale à celle qui le comprime : car c'eſt la nature de tout reſſort de réſiſter autant qu'il eſt preſſé.

Si l'air eſt renfermé dans un vaſe, ſans être ni plus ni moins comprimé que l'air extérieur, ſon reſſort eſt le même que s'il n'étoit point renfermé ; car on ne voit pas ce qui pourroit l'avoir altéré : donc l'air renfermé preſſe la ſurface intérieure du corps qui le renferme, de même que l'air extérieur preſſe la même ſurface.

447. EXPÉRIENCE V. Soit un vaſe AB (*Fig.* 213) bien fermé de tous les côtés, ayant un orifice C auquel ſoit adapté un robinet R par l'ouverture duquel l'air entre dans le vaſe : ſoit adapté au tuyau du robinet un cylindre creux ayant une ouverture S avec ſon couvercle P, & un piſton IL : que le tout ſoit fait de façon que le piſton IL en avançant dans le cylindre ne donne point de paſſage à l'air, non plus que le robinet lorſqu'il eſt fermé, ni le couvercle P lorſqu'il eſt ſur l'ouverture S.

Je ferme le robinet, & je pouſſe le piſton juſqu'à ce qu'étant parvenu en H il ait chaſſé hors du cylindre l'air qui y étoit contenu : je ferme l'ouverture S, & ouvrant le robinet je retire le piſton juſqu'en I : alors l'air du vaſe qui ſe trouve comprimé entre ſes parois, de même qu'il le ſeroit par l'air ſupérieur au vaſe, ſe dilate du côté du cylindre où il ne trouve aucune réſiſtance. Je ferme de nouveau le robinet, afin que la partie d'air qui eſt paſſée du vaſe dans le cylindre ne puiſſe plus rentrer dans le vaſe ; & ouvrant le couvercle P, je repouſſe le piſton juſqu'en H pour chaſſer hors du cylindre la portion d'air qu'il contient ; j'ouvre de nouveau le robinet en fermant le couvercle P & retirant le piſton en I : l'air qui étoit reſté dans le vaſe ſe dilate de nouveau du côté du cylindre où il ne trouve aucune réſiſtance. C'eſt pourquoi ſi je ferme le robinet, &

qu'après avoir ôté le couvercle P, je pouſſe encore le piſton vers H, je mettrai hors du cylindre cette ſeconde portion d'air du vaſe qui y étoit paſſée ; & continuant de la même façon, il eſt clair que je puis épuiſer l'air du vaſe, de façon que la partie qui en reſtera ſoit ſi peu conſidérable qu'on puiſſe la compter pour rien.

Cette machine que je viens de décrire, & dont on vient de voir l'uſage, ſe nomme *Machine Pneumatique*, ou *Machine du Vuide*, où du moins elle n'en differe qu'en ce qu'on lui a ajouté des parties néceſſaires pour en faciliter le jeu ; & c'eſt par ſon moyen qu'on a fait grand nombre d'expériences dont on a tiré bien des théorêmes touchant les propriétés de l'air, de la lumiere, du ſon, &c. (*).

Par exemple, ſi dans le vaſe ou récipient dont on a fait ſortir l'air, on laiſſe tomber d'une même hauteur deux corps d'inégale peſanteur, on éprouve que *ces deux corps deſcendent avec la même vîteſſe, & parcourent dans le même temps des eſpaces égaux ;* & de là on a eu raiſon de conclure que la peſanteur d'un corps eſt toujours proportionnelle à ſa maſſe. Car, ſuppoſons que la maſſe du premier corps ſoit double de la maſſe du ſecond, les vîteſſes de ces corps étant égales, leurs quantités de mouvement ſeront entre elles comme leurs maſſes, & par conſéquent leurs forces ſeront auſſi dans la même raiſon. Or les forces motrices des corps peſants qui tendent vers le centre de la terre, ſont leurs peſanteurs : donc les peſanteurs des deux corps ſont entre elles comme les maſſes.

De même, ſi l'on ſuſpend une petite ſonnette dans le vaſe ou récipient, & qu'après en avoir fait ſortir l'air qu'il contient, on faſſe tinter la ſonnette, on n'entend aucun ſon : ce qui fait voir que *le ſon ne vient à nos oreilles que par l'ébranlement de l'air cauſé par le frémiſſement des parties du corps qu'on frappe pour le faire ſonner.*

De même encore, ſi l'on met de la poudre dans le récipient ; & qu'après en avoir fait ſortir l'air, on mette le feu à la poudre par le moyen d'un verre ardent, on éprouve que les grains de poudre s'embraſent avec peine & ne font aucune détonnation : ce qui fait voir que *les effets de la poudre viennent en grande partie du reſſort*

(*) M. l'Abbé Deidier ne donne ici qu'une idée fort imparfaite de la *machine pneumatique*. Mais comme cette machine eſt aſſez connue de tout le monde, & que l'experience qu'on rapporte ici, ſuffit pour établir les propriétés de l'air qu'explique ce Traité ; on s'abſtiendra d'en donner une plus ample connoiſſance, qu'on pourra prendre, ſi l'on veut, dans la Phyſique de M. l'Abbé Nollet, ou dans la Théorie des Êtres ſenſibles.

de l'air qui ſe trouve dilaté par la chaleur du feu qu'on y porte ; & il en eſt de même de grand nombre d'autres expériences qu'on peut lire dans tous les Ouvrages de Phyſique, & qu'il ſeroit inutile de rapporter ici.

448. COROLLAIRES. Puiſque la ſurface de l'atmoſphere eſt par-tout à égale diſtance du centre de la terre, & que l'air inférieur eſt comprimé par le poids de l'air ſupérieur, il s'enſuit :

I°. Que plus l'air inférieur ſera éloigné du ſommet de l'atmoſphere, plus il ſera comprimé.

II°. Que les différentes couches d'air ſont plus ou moins comprimées, ſelon leur plus ou moins de diſtance au ſommet de l'atmoſphere.

III°. Que la peſanteur de l'air devroit être égale dans tous les lieux de la terre qui ſont de niveau, & que par conſéquent ſa denſité devroit y être auſſi la même. Or ſi ceci ne ſe trouve preſque jamais, la raiſon en eſt que la chaleur ou le froid qui augmentent & diminuent le reſſort de l'air, varient ſelon les lieux, les ſaiſons & les climats ; & que les vapeurs & exhalaiſons qui ſortent du ſein de la terre, ne ſont pas en même quantité par-tout ; & c'eſt auſſi à ces variations qu'il faut rapporter l'*origine des vents.*

Par exemple, ſi ſur certaine partie de la terre l'air vient à ſe condenſer par le froid, & par conſéquent à perdre de ſa force élaſtique, l'air des parties voiſines ſe répandra de ce côté-là, & on ſentira un vent plus ou moins fort, ſelon que la condenſation ſera plus ou moins grande, ou ſe ſera faite plus ou moins vîte.

Si une portion d'air vient à être échauffée par le Soleil ou par quelque autre cauſe, ſon reſſort s'augmentant s'étendra ſur les parties voiſines qui en reſſentiront du vent : mais ſi ce même air, après avoir été échauffé, vient à ſe refroidir, ſon reſſort s'affaiſſera, & les parties voiſines reprenant le deſſus, le vent ſoufflera ſur l'air qui ſe ſera condenſé.

Lorſqu'il s'éleve de la terre un grand nombre d'exhalaiſons & de vapeurs aqueuſes, ces vapeurs ſoulevant l'air le rendent moins peſant. Mais ſi après qu'elles ſe ſont élevées elles ſe trouvent ſuſpendues ſans pouvoir s'élever davantage ni deſcendre, l'air qui en eſt chargé devient plus peſant juſqu'à ce que ces vapeurs trop multipliées viennent à tomber & à ſe réſoudre en pluie ou en roſée, & alors l'air redevient plus léger. Les vents contribuent auſſi beaucoup à rendre l'air plus ou moins peſant, ſelon qu'ils ſoufflent de

haut en bas ou de bas en haut; & il faut dire la même choſe de la chaleur & du froid.

449. Pour s'aſſurer & connoître mieux les différents degrés de peſanteur, de denſité, de chaleur, de froid, & d'agitation, qui ſe trouvent dans l'air, on a inventé pluſieurs inſtruments dont nous allons parler.

Du Barometre.

450. Le *Barometre* ou *Baroſcope* eſt un inſtrument dont on ſe ſert pour connoître les différentes peſanteurs de l'atmoſphere dans différents temps (*Fig.* 214).

Pour compoſer un barometre, on prend un tube AB dont la longueur ſurpaſſe 30 ou 31 pouces, & dont l'extrémité A ſoit exactement fermée. On le remplit de mercure par l'extrémité B: après quoi bouchant cette extrémité B avec le doigt, on plonge le tube verticalement dans un vaſe DE plein de mercure; & débouchant alors l'extrémité B, le mercure demeure ſuſpendu à 28 pouces de hauteur plus ou moins, ſelon que le poids de l'atmoſphere eſt plus ou moins grand: de façon que les variations des différentes hauteurs dans les contrées habitées de l'Europe, ſont compriſes dans l'eſpace de 26 à 30 pouces; c'eſt-à-dire que le mercure n'y deſcend guere plus bas que la hauteur de 26 pouces au-deſſus du mercure du vaſe DE, & qu'il ne s'éleve guere plus haut qu'à 30 pouces (*).

On adoſſe à côté du tube une planche où l'on marque des diviſions égales, pour marquer les différences des élévations du mercure. La plus grande hauteur étant en *n*, & la plus petite en *l*, la hauteur moyennne ſera en *m*.

(*) Le pavé de la ſalle de l'Obſervatoire de Paris eſt élevé de 45 toiſes au-deſſus du niveau de la mer à Breſt ou au Havre. La hauteur moyenne du mercure dans le barometre eſt, dans cette ſalle, de 28 pouces 6 lignes: elle eſt de 28 pouces 10 lignes au niveau de la mer à Breſt & au Havre. Cette hauteur moyenne du mercure dans le barometre, à laquelle on fait principalement attention, eſt d'autant plus petite, que le lieu où le barometre eſt placé, ſe trouve plus élevé au-deſſus de la ſurface de la mer. Sur certaines montagnes des Alpes, où l'on a porté des barometres dans ces dernieres années, le mercure ne ſe ſoutenoit qu'à la hauteur de 19 pouces 8 lignes. Dans la ville de Quito, au Pérou, ſituée dans une vallée élevée d'environ 1500 toiſes au-deſſus du niveau de la mer, la hauteur moyenne du mercure dans le barometre eſt, ſelon MM. Bouguer & de la Condamine, de 20 pouces 1 ligne.

Du Manometre, ou Manoscope (*).

451. Le *manometre* eſt un inſtrument qui ſert à faire connoître les différentes denſités de l'air inférieur.

Puiſqu'il peut ſe faire que l'air inférieur ſoit plus ou moins denſe ſans que le poids de l'atmoſphere diminue, il eſt clair que le barometre ne peut ſervir à découvrir les différentes denſités de l'air inférieur, & qu'il a fallu pour cela imaginer un autre inſtrument (*Fig.* 215).

Pour conſtruire donc cet inſtrument, on prend un grand vaſe de cuivre Q, dont on fait ſortir l'air: on peſe ce vaſe vuide, & l'on prend une matiere bien peſante, comme du plomb, & qui peſe autant que le vaſe: on attache le vaſe à l'extrémité B, & le poids à l'extrémité A d'un levier AB, dont les bras AD, DB, ſont égaux, & dont le centre C de mouvement ſoit un peu au-deſſus du milieu D du levier: enfin, on met, au-deſſus du centre C de mouvement, un quart de cercle gradué MN, dont le rayon ſoit la languette CL du levier; & l'inſtrument eſt fait.

Pour ſe ſervir de cet inſtrument, on peſe le vaſe & le poids dans l'air: & ſi le levier reſte dans une poſition horizontale, c'eſt marque que l'air eſt auſſi denſe qu'il l'étoit lorſqu'on a fait l'inſtrument; mais ſi le poids emporte le vaſe, l'air eſt plus denſe: & ſi au contraire le vaſe emporte le poids, ſa denſité eſt moins grande, & la languette marque ſur le quart de cercle les degrés du plus ou moins de denſité.

Pour rendre raiſon de ceci, il faut obſerver, 1°. que le vaſe Q a toujours plus de volume que le poids P, à cauſe du vuide que ce vaſe contient; & que, par conſéquent, à cauſe de l'égalité de poids, la peſanteur ſpécifique du poids P eſt plus grande que la peſanteur ſpécifique du vaſe: 2°. que de quelque denſité que l'air puiſſe être, le vaſe & le poids ont toujours chacun plus de peſanteur ſpécifique que l'air. Cela poſé,

Quand l'air devient plus denſe qu'il n'étoit dans le temps qu'on a fait la machine, & que le vaſe & le poids étoient en équilibre, il arrive la même choſe que ſi l'on plongeoit le vaſe & le poids dans un fluide qui eût moins de peſanteur ſpécifique qu'eux. Or en ce cas, le poids P perdroit une partie de ſon poids, égale au poids

(*) Le Manometre eſt un inſtrument de peu d'uſage, aſſez inutile dans la Phyſique, peu connu, & peu digne de l'être.

d'un volume de ce fluide égal au ſien; & la même choſe arriveroit au vaſe : ainſi, à cauſe du volume du vaſe plus grand que le volume du poids P, le poids P perd moins que le vaſe; & par conſéquent il doit deſcendre vers le centre de la terre & enlever le vaſe. Suppoſant donc que leur centre commun de gravité dans ce fluide ſoit en H, ce centre deſcendra juſqu'à ce qu'il ſoit dans la verticale CH; & comme il ne pourra deſcendre plus bas, il y aura alors équilibre, & le levier ſera dans la poſition oblique SV; & la languette ſe trouvant alors dans la poſition CI, ſon extrémité I marquera ſur le quart de cercle de combien de degrés l'air eſt plus denſe.

Si au contraire l'air devient moins denſe que dans le temps où le poids & le vaſe étoient en équilibre dans la ſituation horizontale du levier, il arrivera la même choſe que ſi l'un & l'autre étoient plongés dans un fluide qui auroit moins de peſanteur ſpécifique que celui dans lequel ils étoient auparavant. Suppoſant donc que la peſanteur ſpécifique de ce fluide fût à la peſanteur ſpécifique du précédent, comme 1 à 2, les volumes de ce ſecond fluide, dont le poids & le vaſe occuperoient la place, ne peſeroient que la moitié des volumes du premier fluide dont ils occupoient la place; & par conſéquent le poids & le vaſe peſeroient de cette moitié plus dans le ſecond fluide. D'où il ſuit que le poids du vaſe, à cauſe de ſon volume plus grand, deviendroit auſſi plus grand que le poids du plomb, & par conſéquent l'enleveroit. Donc, &c.

Du Thermometre.

Comme le *thermometre* eſt un inſtrument eſſentiel dans preſque toute la phyſique moderne, & que dans tout ce qu'en dit ici l'Auteur de ce Cours de Mathématiques, il n'y a rien abſolument qui puiſſe ſervir à faire connoître la conſtruction, la nature, & les uſages de cet important inſtrument; on a été obligé de ſupprimer tout cet article, & de lui en ſubſtituer un différent. Celui qu'on lui ſubſtitue eſt tiré tout entier, & mot pour mot, du premier volume de la *Théorie des Etres ſenſibles*, depuis la page 241, juſqu'à la page 247.

452. Description. Le *thermometre* eſt un inſtrument propre à meſurer la quantité préciſe du chaud & du froid. C'eſt une des belles découvertes de la phyſique moderne; découverte qui doit ſa perfection à M. de Réaumur. Avant ce célebre Phyſicien on avoit des thermometres plus ou moins exacts; mais chaque thermometre ne ſervoit qu'à l'obſervateur iſolé qui en faiſoit uſage, ſans

qu'il fût poſſible à cet obſervateur de communiquer ſes obſervations à d'autres obſervateurs qui n'avoient pas ſous les yeux le même thermometre avec lequel elles avoient été faites; parce-qu'on n'avoit pas de point fixe pour évaluer ce qu'on devoit entendre par un degré de dilatation & de condenſation. M. de Réaumur entreprit de faire des *thermometres de comparaiſon*, dont le langage ſe fît entendre uniformément à toute la terre; & il y réuſſit. Nous allons faire connoître lumineuſement & en peu de mots, ſur quels principes ſcientifiques eſt conſtruit cet inſtrument (*Fig.* 217).

I°. Soit une boule creuſe de verre A, ſurmontée d'une petit canal cylindrique AB, d'une capacité fort petite & parfaitement égale dans toute ſa longueur. Qu'on empliſſe d'un mercure très pur cette boule & le canal, juſqu'à une certaine hauteur D; & qu'après avoir mis la boule dans l'eau bouillante pour faire ſortir ce qu'elle peut avoir de mercure ſuperflu, on bouche hermétiquement le canal en B, en n'y laiſſant point d'air autant qu'il eſt poſſible. *Boucher hermétiquement* un vaſe, c'eſt le fermer de telle ſorte que l'air ne puiſſe s'y inſinuer en aucune maniere.

II°. Qu'on enveloppe de neige ou de glace pilée, la capacité emplie de mercure pendant environ une demi-heure: le mercure ſe *condenſant*, deſcendra dans le canal juſqu'à un point fixe, qu'on marquera avec un fil, & qu'on nomme le *point de la congélation.*

III°. Qu'on mette doucement & peu à peu ce même inſtrument dans l'eau bouillante, en ſorte que l'eau bouillante enveloppe à peu près toute la partie où ſe trouve le mercure: le mercure *ſe dilatant*, montera dans le canal juqu'à un certain point fixe, qu'on marquera également avec un fil, & qu'on nomme le *point de l'eau bouillante.*

IV°. Qu'on diviſe enfin exactement avec un compas, l'eſpace compris entre le point de la congélation & le point de l'eau bouillante, en quatre-vingts parties égales, qu'on nomme *degrés*, & qu'on tracera proprement ſur un papier à côté du canal cylindrique. Ayant diviſé en degrés exactement égaux, tout l'eſpace depuis le point de la congélation zéro, juſqu'au point de l'eau bouillante, & depuis le même point de la congélation juſqu'à la boule à peu près; on aura un thermometre de comparaiſon, qui marquera fidellement la température préſente du lieu où il ſe trouvera placé.

Au lieu de diviſer l'eſpace compris entre le point de la congélation

& le point de l'eau bouillante en quatre-vingts parties ou degrés, on pourroit prendre une autre diviſion quelconque. La diviſion de quatre-vingts degrés a été préférée par M. de Réaumur, & adoptée par la plupart des Phyſiciens, ſans doute parcequ'en donnant des degrés plus ſenſibles, elle eſt diviſible aſſez loin par moitiés, en 40, en 20, en 10, en 5; ce qui rend la graduation plus exacte & plus facile. Les remarques ſuivantes vont achever de faire connoître la théorie du thermometre de comparaiſon.

Remarques. I°. Le mercure a en lui-même, dans tous les pays du monde, une égale diſpoſition à ſe dilater ou à ſe condenſer ſous un même degré de chaleur ou de froidure.

Donc la quantité de chaleur qui, excédant le degré de la congélation, dilatera en France le mercure d'une quatre-vingtieme partie de la dilatation qu'il faudroit pour atteindre au point de l'eau bouillante, opérera la même dilatation en Chine, en Canada, au Bréſil, & donnera un degré au-deſſus de la congélation, en ces régions, comme en France.

Donc, par la même raiſon, un degré déterminé de froid, qui, excédant le froid de la glace pilée, condenſera en France le mercure de dix quatre-vingtiemes, ou de dix degrés, le condenſera également de dix degrés ou de dix quatre-vingtiemes, en Turquie & en Sibérie, & donnera préciſément en tous ces pays dix degrés au-deſſous de la congélation.

Il n'eſt point néceſſaire que dans les thermometres de comparaiſon les boules ſoient, de part & d'autre, proportionnelles à la capacité des tubes cylindiques, à côté deſquels on marque les degrés. Si, les boules étant égales, les cylindres ſont inégaux en capacité, les degrés auront plus d'étendue dans le plus petit tube, & moins d'étendue dans le plus grand tube: mais la quantité de la dilatation ou de la condenſation ſera toujours fidellement marquée par les deux tubes, dont les degrés, plus ou moins étendus, ſont toujours les quatre-vingtiemes de la dilatation totale qu'il faut pour atteindre depuis le point de la congélation juſqu'au point de l'eau bouillante, qui ſont les deux points fixes & invariables d'où part la diviſion dans tous les thermometres.

II°. Il conſte par mille & mille expériences, que l'eau de pluie & fontaine, arrivée au point d'ébullition dans un vaſe ouvert, a un degré de chaleur uniforme dans toute la terre: elle procure donc par-tout une dilatation uniforme au mercure. Après deux ou trois bouillons, l'eau a acquis le plus haut degré de chaleur qu'elle puiſſe atteindre dans un vaſe ouvert; & en bouillant enſuite pendant

pluſieurs

pluſieurs heures, elle ne fait que ſe conſerver dans le même degré de chaleur : ſans doute parceque les particules aqueuſes, qui ont acquis toute la chaleur dont elles ſont ſuſceptibles en vaſe ouvert, s'évaporent, & échappent à l'action du feu qui ne peut s'accumuler dans elles. L'eau en vaſe clos eſt ſuſceptible d'un degré de chaleur accumulée, qui va juſqu'à l'incandeſcence.

L'eau de mer, dans l'état d'ébullition en vaſe ouvert, a plus de chaleur que l'eau de fontaine ; l'huile beaucoup plus que l'eau de mer ; le mercure incomparablement plus que l'huile. Selon les obſervations d'un Académicien de Lyon, le thermometre qui, mis à l'épreuve de la glace & de l'eau bouillante commune, monte à 80 degrés, s'éleve dans l'eau de mer bouillante, à près de 82 ; dans le mercure bouillant, à 172.

III°. Il conſte également par l'expérience, que la glace pilée, ſoit en été, ſoit en hiver, a un égal degré de froid dans toutes les contrées de la terre : elle doit donc donner par-tout au mercure une égale condenſation.

L'uniformité de chaleur dans l'eau bouillante, l'uniformité de froidure dans la glace pilée, fourniſſent donc, comme on voit, le moyen de faire des thermometres de comparaiſon, ſelon la méthode que nous avons tracée. Les régions qui n'ont ni neige ni glace, ont de la grêle ; & la grêle fait préciſément le même effet que la glace pilée, laquelle a préciſément la même intenſité de froid que la neige. Ainſi, en tout pays du monde, on peut ſe procurer aiſément des thermometres de comparaiſon ; & ces thermometres, en quelque pays qu'ils ſoient conſtruits, qu'ils ſoient appliqués aux obſervations, dans la zone torride ou dans la zone glaciale, donneront des meſures de froid & de chaud, qui ſeront entendues, qui ſeront comparables dans toutes les contrées de la terre.

Un thermometre de comparaiſon, pour évaluer la température de l'atmoſphere, doit être expoſé au nord & à l'ombre, à l'abri de toute réverbération qui puiſſe altérer ſenſiblement la température de l'air environnant. Le plus grand degré de froid eſt communément à l'inſtant où le ſoleil va ſe lever : le plus grand degré de chaleur eſt communément vers les deux ou trois heures après midi.

Tandis que le mercure ſe ſoutient au-deſſus du point de la congélation, l'eau ne gele point. Le mercure vient-il à deſcendre juſqu'à ce point de la congélation ; l'eau commence à ſe geler, à moins que l'agitation du vent, ou quelque autre cauſe étrangere ne l'en empêche.

Dans les grands froids, le mercure deſcend de beaucoup au-

deſſous du point où le fixe la glace pilée. Il deſcendit à Paris à 15 degrés & un quart plus bas en 1709, pendant ce froid célebre qui déſola l'Europe. Dans les régions ſeptentrionales, en Laponie, en Norvege, en Sibérie, il deſcend aſſez communément pendant l'hiver juſqu'à 40 ou 50 degrés au-deſſous de la congélation : en ſorte que ces régions éprouvent habituellement chaque année un froid deux ou trois fois plus grand que celui qu'on eſſuya en France en 1709, & que nous avons vu renaître à Beſançon en 1767 & 1768.

Ce qui n'eſt pas moins étonnant, c'eſt que dans les régions brûlantes de la zone torride, le thermometre, dans les plus grandes chaleurs de l'été, ne monte pas beaucoup plus haut qu'à Rome, qu'à Marſeille, qu'en pluſieurs autres villes de l'Europe : ce qui prouve que les intolérables chaleurs de la zone torride accablent plus par leur continuité que par leur intenſité.

IV°. C'eſt ſur les mêmes principes, & d'après la même méthode, que l'on fait auſſi des thermometres d'eſprit de vin & d'autres liqueurs ſemblables que l'on colore comme on veut. Mais on a obſervé que ces liqueurs ſont quelquefois ſujettes à certaines fermentations intérieures : ce qui fait que ces thermometres ne correſpondent point, dans ces circonſtances, au degré de froid extérieur qu'ils devroient marquer. C'eſt pour cette raiſon que l'on préfere aux liqueurs le mercure, lequel n'éprouve point de ſemblables fermentations. Un thermometre bien fait eſt regardé par tous les Phyſiciens comme une regle ſure & infaillible pour évaluer dans une infinité d'expériences le degré précis de chaleur & de froidure que l'on cherche à connoître.

De l'Hygrometre.

453. L'*hygrometre* a été inventé pour connoître les différents degrés de ſéchereſſe & d'humidité que l'air peut contracter : on en fait de pluſieurs ſortes ; mais je me contenterai d'en rapporter ici deux des meilleurs (*Fig.* 218).

I°. On attache à un point fixe E une corde qu'on fait paſſer ſur pluſieurs poulies A, B, C, D, H, diſpoſées comme la figure le montre, & on attache à l'extrémité de la corde un poids P. Quand l'air devient humide, la corde ſe gonfle, & par conſéquent ſe raccourcit ; ce qui fait monter le poids : au contraire, dans les temps ſecs, les fibres de la corde s'étendent, & le poids deſcend. Ainſi par les différents éloignements du poids P à la poulie H, on peut juger de l'humidité ou de la ſéchereſſe de l'air. Mais cet hygro-

metre, & tous ceux qui ſont faits avec des cordes, ont ce défaut, que le poids tirant toujours la corde en fait alonger les fibres beaucoup plus que l'humidité ne peut les faire raccourcir. C'eſt pourquoi j'aimerois mieux l'hygrometre ſuivant (*Fig.* 215).

II°. Prenez une balance ſemblable à celle du manometre : ſuſpendez en B une éponge au lieu du vaſe Q, & en A un poids P qui ſoit en équilibre avec l'éponge. Quand l'air deviendra plus humide, l'éponge ſe chargera de ſes vapeurs, & peſera davantage ; ce qui fera hauſſer le poids : & au contraire, quand l'air deviendra plus ſec, l'éponge ſe deſſéchant deviendra plus légere, & le poids l'emportera. C'eſt pourquoi dans l'un & dans l'autre cas, la languette de la balance marquera ſur le quart de cercle MN les différences d'humidité ou de ſéchereſſe.

454. REMARQUE. La connoiſſance des variétés de l'air & la maniere d'en juger peuvent ſervir beaucoup pour nous faire raiſonner juſte touchant les effets de la poudre à canon, en y ajoutant le ſecours des épreuves. Mais il faut prendre garde que ces épreuves ſoient faites avec beaucoup de diſcernement ; qu'on ſache y démêler les véritables cauſes des variations de l'air, car on vient de voir qu'il y en a d'équivoques ; & qu'on écarte auſſi du côté de la poudre & des bombes à feu tous les accidents qui peuvent provenir d'autre part, & dont nous avons parlé en traitant du jet des bombes. De plus, il faut que les épreuves ſur leſquelles on prétend s'appuyer, ſoient des épreuves conſtantes, régulieres, & qui ne ſe démentent jamais. Faute de prendre ces précautions, il arrive qu'on bâtit des ſyſtêmes, ou, pour mieux dire, des châteaux en Eſpagne, qui ſe diſſipent dès qu'on veut en ſonder la ſolidité.

Par exemple, on établit pour regle aſſurée qu'une même charge de poudre, dans un même canon, porte plus loin lorſqu'on tire avant le lever du ſoleil que lorſqu'on tire ſur l'heure de midi. Pluſieurs expériences, dit-on, nous en convainquent ; & la raiſon qu'on en donne, c'eſt que l'air étant plus dilaté par la chaleur à l'heure de midi que le matin, réſiſte davantage au mouvement du boulet. Il eſt évident que cette raiſon ne vaut rien : mais quand même elle ſeroit bonne, ne peut-il pas ſe faire qu'il faſſe le matin un grand froid qui condenſe extrêmement l'air ; que l'atmoſphere ſe trouve chargée de vapeurs & d'exhalaiſons qui rendent cet air plus peſant ; que ſur les huit ou neuf heures du matin il vienne à pleuvoir, ce qui diminuera le poids de l'air ; & qu'enfin ſur le midi le ſoleil n'échauffe l'air que médiocrement ? Or en ce cas-ci, & en d'autres diverſement combinés, & qui feront pourtant des effets à peu près ſem-

blables, il arrivera que l'air du matin réſiſtera plus au boulet que celui qui regnera vers le midi. Donc on a tort de propoſer la queſtion comme générale, & d'y répondre dans le même ſens.

Un canon porte-t-il plus loin lorſqu'on a tiré pluſieurs coups que la premiere fois? Les uns diſent oui, & c'eſt le plus grand nombre: d'autres au contraire diſent non. Les uns & les autres ont tort, dès qu'ils n'y mettent aucune reſtriction. Si à force de tirer, la lumiere s'évaſe de façon que l'inflammation de la poudre dans la chambre puiſſe s'échapper en partie de ce côté-là; ſi l'ébranlement des parties du métal fait qu'il réſiſte moins à cette inflammation; ſi l'air extérieur devient plus chaud, &c; certainement la portée du boulet deviendra moins grande. Mais ſi tout cela n'arrive point, ou s'il n'arrive que dans un degré très médiocre, il eſt viſible que la charge ſe deſſéchera plutôt, lorſque la piece ſera échauffée: que par conſéquent ſon inflammation ſe fera plus promptement, lorſqu'on y mettra le feu, & que le boulet partira avec plus de vîteſſe.

Il s'eſt élevé depuis quelques années une diſpute touchant les charges des canons qui donnent les plus grandes portées. Un Auteur qui s'imaginoit avoir pénétré plus avant dans les ſecrets de la Nature que le reſte du genre humain, a prétendu que la charge de 9 livres de poudre pour la piece de 24 de calibre, étoit la plus convenable. Les épreuves ont été faites, il les a dirigées lui-même: mais ces épreuves ſur leſquelles il a prétendu s'appuyer, ont démenti ſon ſyſtême; les coups tirés à 12, 14, 16 livres, &c, ont preſque toujours porté plus loin, malgré les irrégularités qui pouvoient y ſurvenir de la part des accidents inſéparables du tir du canon. L'uſage dans lequel MM. de l'Artillerie ſe ſont mis depuis long-temps, de ne battre en breche qu'avec la charge de huit livres pour la piece de 24, & quelquefois avec la charge de ſix livres quand la piece eſt échauffée, ſembloit autoriſer le ſentiment de cet Auteur. Mais il devoit prendre garde que lorſque l'on bat en breche, on cherche à égratigner & à déchirer les revêtements plutôt qu'à faire un trou par une plus grande force qu'on pourroit donner au boulet; & que dans le cas où il s'agit de battre de plein fouet un objet plus éloigné, on tire ordinairement à 12 livres, parcequ'on s'eſt apperçu que l'effet de 8 livres ne ſeroit pas aſſez grand. Au reſte, je n'entre point dans un plus grand détail ſur cette matiere: on peut lire l'excellent Mémoire que M. de Valliere a fait en 1740 ſur les charges & ſur les portées des bouches à feu, & qui a été diſtribué dans les cinq Ecoles d'Artillerie. Tout ce que je pourrois dire après un ſi grand maître, n'auroit peut-être pas la même force qu'on

trouvera dans cet ouvrage, qui eſt vraiment digne d'être lu avec beaucoup d'attention (*).

Ces obſervations, & grand nombre d'autres que je pourrois faire ſur cette matiere, & ſur ce qui concerne les mines & les charges qu'on doit y employer ſelon les terres qu'on veut enlever, font voir qu'il faut être extrêmement attentif à ne pas bâtir des ſyſtêmes chimériques, ſouvent dangereux à l'Etat par l'épargne & l'économie apparente qu'ils ſemblent vous préſenter. La Nature ne veut pas être prévenue dans ſes opérations: elle eſt myſtérieuſe, elle aime qu'on la ſuive pas à pas, qu'on ſoit attentif à ſes effets, & qu'on la ſonde juſques dans ſes replis les plus cachés. Le ſilence & l'attention ſont ici peut-être plus néceſſaires qu'ils ne l'étoient dans l'école de Pythagore, où il falloit reſter ſept ans ſans parler.

DE L'HYDRAULIQUE.

455. L'Hydraulique eſt la ſcience qui traite du mouvement des fluides, & ſur-tout du mouvement des eaux.

PROPOSITION LXXXI.

456. *Si deux vaſes AB*, ab, *qu'on entretient toujours pleins d'eau, ont des ouvertures C, & c, par où l'eau s'écoule, les viteſſes des colonnes CL*, cl, *qui s'écoulent dans des temps égaux, ſont entre elles comme les racines quarrées des hauteurs, c'eſt-à-dire des diſtances CE*, ce, *des orifices à la ſurface ſupérieure de l'eau des vaſes* (Fig. 219).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que les orifices C, *c*, ſoient bouchés par des cloiſons: les preſſions que ces cloiſons ſouffriront, ſeront

(*) Le *Mémoire ſur les charges & les portées des bouches à feu*, dont parle ici M. l'Abbé Deidier, ſe trouve à Paris, chez Jombert pere, imprimé à la ſuite de l'Ouvrage de feu M. de Valliere, intitulé: *Traité de la défenſe des Places par les mines & les contre-mines;* Ouvrage peu volumineux, mais plein de ſolides principes & de grandes vues, digne du créateur de l'artillerie en France, c'eſt-à-dire, d'un génie qui, à une profonde théorie, joignoit une expérience conſommée; qui écrivoit moins pour être Auteur, que pour tranſmettre à un Corps par lui chéri des lumieres utiles à l'Etat; qui ſavoit tout apprécier & tout analyſer, parcequ'il avoit ſu tout voir. C'eſt par l'Auteur de cet excellent Traité, qu'a été créé & accrédité ce bel axiome relatif à la conſtruction & aux qualités eſſentielles des inſtruments de l'artillerie: *ſimplicité, ſolidité, uniformité.*

entre elles comme les produits des grandeurs des cloiſons par leurs diſtances à la ſurface ſupérieure de l'eau ; & partant, ces preſſions ſeront exprimées par C×CE & $c \times ce$. Suppoſons auſſi que les colonnes d'eau qui ſortiront dans des temps égaux, ſoient les cylindres CL, cl : ces cylindres étant entre eux comme les produits de leurs baſes par les hauteurs, ſeront C×CL & $c \times cl$. De plus, leurs hauteurs CL, cl, exprimeront les vîteſſes des colonnes d'eau qui ſortiront dans des temps égaux par les deux orifices : car ſi l'une de ces hauteurs eſt plus longue que l'autre, il eſt clair que cela ne peut provenir que de ce que l'une des colonnes ſort plus vîte que l'autre. Or les quantités de mouvement de ces deux colonnes étant le produit de leurs maſſes par leurs vîteſſes, ſont exprimées par $C \times \overline{CL}^{2}$ & $c \times \overline{cl}^{2}$; & ces quantités de mouvement ſont entre elles comme les forces qui les produiſent, c'eſt-à-dire comme les preſſions C×CE, $c \times ce$. Donc nous avons $C \times \overline{CL}^{2} . c \times \overline{cl}^{2} :: C \times CE . c \times ce$; ou $\overline{CL}^{2} . \overline{cl}^{2} :: CE . ce$: donc $CL . cl :: \sqrt{CE} . \sqrt{ce}$; & partant, les vîteſſes CL, cl, des eaux qui s'écoulent par les orifices C, c, ſont entre elles comme les racines des hauteurs CE, ce.

457. COROLLAIRE I. *Les colonnes d'eau qui s'écoulent dans des temps égaux par les orifices C, c, en ſuppoſant toujours que les vaſes ſoient entretenus pleins d'eau, ſont en raiſon compoſée des orifices & de leurs vîteſſes* (Fig. 219).

DÉMONSTRATION. Les quantités de mouvement de ces colonnes ſont $C \times \overline{CL}^{2}$, & $c \times \overline{cl}^{2}$; & leurs vîteſſes ſont CL, cl : diviſant donc ces quantités de mouvement par les vîteſſes, les quotients C×CL, $c \times cl$, ſeront les valeurs des colonnes qui ſortent par les orifices. Or ces quotients ſont les produits des orifices C, c, par les vîteſſes CL, cl : donc, &c.

458. COROLLAIRE II. *Si les hauteurs CE, ce, ſont égales & les orifices inégaux, les colonnes d'eau qui ſortiront dans des temps égaux, ſont entre elles comme les orifices C, c.*

DÉMONSTRATION. Les quantités de mouvement des colonnes qui ſortent par les orifices ſont $C \times \overline{CL}^{2}$, $c \times \overline{cl}^{2}$; & nous avons $\overline{CL}^{2} . \overline{cl}^{2} :: CE . ce$: donc en ſuppoſant $CE = ce$, nous avons $\overline{CL}^{2} = \overline{cl}^{2}$, & $CL = cl$. Or les colonnes qui ſortent par les orifices dans des temps égaux, ſont comme C×CL & $c \times cl$: donc à cauſe de $CL = cl$, ces colonnes ſont entre elles comme C eſt à c.

459. COROLLAIRE III. *Si les hauteurs CE, ce, ſont inégales, & les orifices C, c, égaux, les colonnes d'eau qui ſortent dans des temps égaux ſont entre elles comme les racines des hauteurs.*

DÉMONSTRATION. Leurs quantités de mouvement ſont $C \times \overline{CL}^{\frac{1}{2}}$ & $c \times \overline{cl}^{\frac{1}{2}}$: diviſant donc par les vîteſſes CL, *cl*, les quotients $C \times CL$ & $c \times cl$ ſeront les valeurs des colonnes qui ſortent par les orifices. Or nous avons $C = c$: donc ces colonnes ſont entre elles comme CL, *cl*, c'eſt-à-dire comme leurs vîteſſes. Mais les vîteſſes ſont comme les racines quarrées des hauteurs CE, *ce*: donc, &c.

460. COROLLAIRE IV. *Si les hauteurs CE, ce, ſont égales & les orifices auſſi, les colonnes d'eau qui ſortent par les orifices ſont égales.*

DÉMONSTRATION. Car ces colonnes ſont entre elles comme $C \times CL$, $c \times cl$, ou comme CL, *cl*, à cauſe de $C = c$: mais les vîteſſes CL, *cl*, ſont auſſi égales, puiſqu'elles ſont comme les racines quarrées des hauteurs CE, *ce*, que l'on ſuppoſe égales: donc les colonnes qui ſortent par les orifices ſont auſſi égales.

461. COROLLAIRE V. *Si les hauteurs CE, ce, ſont inégales & les orifices auſſi, & que cependant les colonnes d'eau qui ſortent dans un même temps ſoient égales, les racines quarrées des hauteurs ſont entre elles réciproquement comme les orifices.*

DÉMONSTRATION. Car les colonnes d'eau ſont $C \times CL$, & $c \times cl$. Or, par la ſuppoſition, nous avons $C \times CL = c \times cl$: donc CL. *cl* :: C. *c*. Mais CL. *cl* :: $\sqrt{CE}$. $\sqrt{ce}$: donc $\sqrt{CE}$. $\sqrt{ce}$ :: C. *c*.

462. REMARQUE. Pour une plus grande intelligence de la propoſition ſuivante, il faut ſe rappeller que j'ai démontré (116) que ſi deux ou pluſieurs corps peſants d'inégales maſſes, & même d'inégales natures, tombent librement vers le centre de la terre, ils parcourent dans des temps égaux des eſpaces égaux.

Les expériences de la machine du vuide, que j'ai rapportées dans l'Airométrie, confirment cette vérité; & par conſéquent ſi cela ne ſe trouve pas exactement vrai lorſque les corps deſcendent vers le centre de la terre au travers de l'air, c'eſt que l'air réſiſte davantage aux corps qui ont plus de ſurface à proportion de leur maſſe. Or de cette vérité il ſuit, 1°. que ſi deux corps qui ont commencé à deſcendre vers le centre de la terre ſe trouvent avoir parcouru des eſpaces égaux, les temps qu'ils auront employés à deſcendre ſeront égaux: 2°. que les vîteſſes acquiſes à la fin de leurs eſpaces ſeront auſſi égales, à cauſe que les vîteſſes acquiſes à la fin des eſpaces ſont toujours entre elles comme les temps ou comme les racines quarrées des eſpaces.

Nous avons auſſi démontré (115) que ſi un corps, après avoir deſcendu librement vers le centre de la terre pendant un certain temps, remonte dans une direction oppoſée à celle de ſa peſanteur, avec la vîteſſe acquiſe à la fin de ſa deſcente; il s'élevera à la hauteur dont il eſt deſcendu dans un temps égal à celui qu'il a employé à deſcendre. Or de là il ſuit 1°. que ſi deux corps, après avoir parcouru en deſcendant des eſpaces égaux, remontent avec leurs vîteſſes acquiſes à la fin de ces eſpaces; ils s'éleveront à des hauteurs égales dans un temps égal à celui qu'ils ont employé à deſcendre : 2°. que ſi ces deux corps remontent à des hauteurs égales, les vîteſſes avec leſquelles ils remonteront ſeront égales, & les temps employés à remonter ſeront égaux auſſi : car ils ne remontent à ces hauteurs égales que parcequ'ils ont des vîteſſes égales à celles qu'ils auroient acquiſes en deſcendant des mêmes hauteurs. Or, ces vîteſſes acquiſes ſont égales, & les temps employés à les acquérir ſont auſſi égaux, comme on vient de voir; donc, &c. Ceci poſé,

PROPOSITION LXXXII.

463. *Si l'on a ſoin de tenir toujours plein un vaſe AB, dont l'eau ſort par un orifice C; la vîteſſe avec laquelle cette eau ſort eſt égale à celle qu'auroit acquis un corps en tombant de la hauteur EC de la ſurface de l'eau* (Fig. 220).

Démonstration. Si l'on met à l'orifice un tuyau CD, de façon que l'eau ne puiſſe ſortir qu'avec une direction verticale & contraire à ſa peſanteur; on ſait par une longue expérience que l'eau qui ſort s'éleve à une hauteur DF à peu de choſe près égale à la hauteur CE de la ſurface de l'eau, & que cette petite différence dans les hauteurs ne vient que de ce que l'air réſiſte à l'eau, & l'empêche de s'élever autant qu'elle feroit : ce qu'on peut aiſément éprouver dans la machine du vuide. Or, ſi un corps, après être deſcendu librement de la hauteur EC, remontoit avec ſa vîteſſe acquiſe; il remonteroit à ſa hauteur DF, égale à la hauteur EC: donc puiſque l'eau & le corps remonteroient à des hauteurs égales, les vîteſſes avec leſquelles ils remonteroient doivent être égales, de même que les temps qu'ils emploieroient à remonter (par la Remarque précédente).

464. Corollaire. *Quand l'eau qui coule d'un vaſe toujours plein, eſt obligée de remonter; la hauteur à laquelle elle s'éleve, n'eſt que*

que la moitié de la longueur qu'elle parcourroit dans un tuyau CH horizontal, dans un temps égal à celui qu'elle emploie à remonter (Fig. 220).

DÉMONSTRATION. Si un corps, après être deſcendu de la hauteur EC, remontoit avec ſa vîteſſe acquiſe, & que ſa peſanteur ne lui fît point obſtacle; ce corps remonteroit à une hauteur double de la hauteur DF ou CE, dans un temps égal à celui qu'il emploieroit à remonter; ainſi qu'il a été dit en parlant du mouvement uniformément accéléré ou retardé: donc la même choſe arriveroit auſſi à l'eau qui remonte à la hauteur DF, ſi ſa peſanteur ne lui faiſoit obſtacle. Or, ſi à la place du tuyau CD, on met un tuyau horizontal CH; la vîteſſe de l'eau au ſortir de l'orifice, ne trouvera point l'obſtacle de la peſanteur dans ce tuyau: & comme cette vîteſſe eſt uniforme, puiſqu'elle eſt produite par la même preſſion; il s'enſuit qu'elle fera parcourir à l'eau dans ce tuyau CH, un eſpace double de la hauteur DF dans un temps égal à celui que l'eau emploieroit à s'élever à cette hauteur.

465. REMARQUE I. On m'objectera peut-être que ſi cela eſt ainſi que je viens de le dire, il s'enſuivra que lorſque l'eau eſt obligée de s'élever perpendiculairement, il ne devroit ſortir par l'orifice C que la moitié de l'eau qu'il en ſortiroit dans le même temps, ſi le tuyau étoit horizontal; ce qui eſt impoſſible, puiſque la preſſion à l'orifice C étant toujours la même, il doit en ſortir d'égales quantités d'eau. Mais il faut prendre garde que lorſque l'eau eſt obligée de remonter, & qu'elle perd de ſa vîteſſe, le jet ſe gonfle peu à peu, de façon qu'il prend la forme d'un cône tronqué renverſé: au lieu que quand le tuyau eſt horizontal, l'épaiſſeur de la colonne d'eau qui ſort eſt la même par-tout; & par conſéquent il ſe fait une compenſation: & ce que l'une des colonnes gagne en longueur, l'autre le gagne par les augmentations de ſon épaiſſeur.

466. REMARQUE II. C'eſt par une raiſon contraire à celle-ci que lorſque l'eau qui coule de l'orifice C, tombe perpendiculairement vers le centre de la terre, elle eſt beaucoup plus épaiſſe à la ſortie de l'orifice que lorſqu'elle en eſt plus éloignée; & qu'à un grand éloignement elle doit ſe réſoudre en gouttes. Car les parties d'eau qui ſortent ſucceſſivement de l'orifice, ont la même vîteſſe; puiſque la preſſion ſubſiſte toujours la même, à cauſe qu'on a ſoin d'entretenir le vaſe toujours plein. Suppoſons donc pour un moment que ces parties d'eau, en tombant ſucceſſivement, n'aient aucune vîteſſe, & paſſent du repos au mouvement; & qu'après un

certain temps on fixe tout d'un coup leur mouvement : les temps de la deſcente des parties qui ſeront ſorties plutôt de l'orifice, ſeront plus longs que les temps de la deſcente des parties qui ſeront ſorties plus tard ; & comme les mouvements de toutes ces parties ſeront accélérés par leurs peſanteurs, les eſpaces parcourus ſeront entre eux comme les quarrés des temps ; & par conſéquent les différences de ces eſpaces iront en diminuant à meſure qu'ils s'approcheront de l'orifice ; de même que les différences des quarrés vont en diminuant, à meſure que ces quarrés diminuent : ainſi les parties d'eau plus proches de l'orifice ſeront plus proches entre elles que celles qui en ſeront plus éloignées. Donc, &c.

PROPOSITION LXXXIII.

467. *Si l'on entretient un vaſe AB toujours plein, & que le long de la hauteur BH de ce vaſe, il y ait pluſieurs orifices égaux, C, D, E, F, &c, par leſquels l'eau s'écoule ; les quantités d'eau qui ſortiront dans un même temps par ces orifices, ſeront entre elles comme les ordonnées d'une parabole HMB, dont le diametre ſeroit la hauteur HB* (Fig. 221).

DÉMONSTRATION. A cauſe de l'égalité des orifices, les quantités d'eau qui coulent par ces orifices dans des temps égaux, ſont entre elles comme les racines des hauteurs HF, HE, HD, HC. Or les ordonnées d'une parabole ſont entre elles auſſi comme les racines de leurs abſciſſes qui ſont ces hauteurs : donc, &c.

468. COROLLAIRE I. *Si au lieu des orifices faits le long de la hauteur HB du vaſe, on fait une fente égale à cette hauteur, & qui ſoit par-tout d'égale largeur ; l'eau qui coulera de cette fente pendant un certain temps, ne ſera que les deux tiers de l'eau qui en couleroit pendant le même temps, ſi toutes les parties de l'eau couloient avec la vîteſſe exprimée par la racine quarrée de la plus grande hauteur* (Fig. 221).

DÉMONSTRATION. Concevons que l'eau contenue dans le vaſe ſoit partagée en une infinité de couches horizontales dont l'épaiſſeur ſoit infiniment petite. Les parties d'eau qui couleront dans un même temps de chacune, ſeront comme les racines quarrées des diſtances de ces couches à la ſurface ſupérieure de l'eau ; & par conſéquent elles ſeront entre elles comme les ordonnées infiniment proches, ou comme les éléments de la parabole : ainſi leur ſomme ſera à la plus grande multipliée par le nombre des termes, comme 2 à 3 ; c'eſt-à-dire, comme la ſomme des éléments de la parabole

HMB eſt au dernier & plus grand élément BM multiplié par le nombre des termes ou la hauteur BH ; & par conſéquent comme la parabole eſt au rectangle circonſcrit BV. Mais de toutes les parties d'eau qui s'écoulent dans un même temps par la fente HB, la plus grande eſt celle qui s'écoule par l'extrémité B de cette fente, puiſque c'eſt celle qui ſort avec la plus grande vîteſſe : donc la ſomme des parties d'eau qui s'écoulent dans un même temps, eſt à celle qui s'écoule par l'extrémité B multipliée par la hauteur HB, comme 2 eſt à 3. Mais multiplier la plus baſſe eau qui ſort par la hauteur HB, c'eſt la même choſe que de ſuppoſer que toutes les autres parties d'eau qui ſortent des différentes couches d'eau ſont égales à celle-ci : donc les différentes parties d'eau qui ſortent de chaque couche chacune avec ſa vîteſſe particuliere, ne ſont que les deux tiers des différentes parties d'eau qui ſortiroient toutes de chaque couche avec la vîteſſe de la plus baſſe.

469. COROLLAIRE II. *Si l'on prend deux vaſes priſmatiques* AB, ab, *de même hauteur, & dont le ſecond* ab *ait la largeur* mb *de ſa baſe égale à ſa hauteur ; je dis que ſi l'on fait ſur l'un des côtés du premier vaſe AB une fente verticale HC, & ſur la longueur* mb *de la baſe du ſecond, une fente horizontale* fb *de même largeur que la verticale, & que les deux vaſes ſoient toujours entretenus pleins d'eau ; l'eau qui ſortira par la fente verticale HC dans un certain temps, ſera à l'eau qui ſortira par la fente horizontale* fb *dans le même temps, comme* 2 *eſt à* 3 (Fig. 222).

DÉMONSTRATION. Les deux fentes ayant la même longueur & la même largeur ; les quantités d'eau qui ſe préſenteront pour ſortir de l'une & de l'autre ſeront égales. Mais toutes les parties de la quantité d'eau qui ſe préſente pour ſortir de la fente verticale, ſont entre elles comme leurs vîteſſes inégales, c'eſt-à-dire, comme les racines des hauteurs ou de leurs diſtances à la ſurface ſupérieure de l'eau, ou comme les ordonnées d'une parabole dont les abſciſſes ſont les mêmes hauteurs ; & au contraire toutes les parties d'eau qui ſortent par la fente horizontale ſont égales, & peuvent être exprimées chacune par la racine de la hauteur HC. Auſſi toutes les parties d'eau qui ſortent par la fente horizontale dans un certain temps, ſeroient égales à toutes les parties d'eau qui ſortiroient dans le même temps par la fente verticale, ſi elles avoient toutes la vîteſſe exprimée par $\sqrt{\text{HC}}$. Or nous venons de voir (468) que les parties d'eau qui ſortent dans le même temps par la fente verticale HC chacune avec ſa vîteſſe particuliere, ſont aux quantités

d'eau qui ſortiroient avec la vîteſſe commune $\sqrt{HC}$, comme 2 à 3 : donc elles ſont auſſi à celles qui ſortent par la fente horizontale, comme 2 à 3.

470. REMARQUE I. Lorſque les parties d'eau qui ſortent par une fente verticale BH (*Fig.* 221), ſont entre elles comme les éléments d'une parabole ; il ſe trouve toujours une de leurs vîteſſes, laquelle étant multipliée par le nombre qui en exprime la multitude, ou par la hauteur BH, donne un produit égal à la ſomme des vîteſſes ; & c'eſt ce qu'on nomme *vîteſſe moyenne :* de façon que ſi toutes les parties de l'eau qui ſort par la fente, ſortoient avec cette vîteſſe moyenne, la quantité d'eau qui ſortiroit pendant un certain temps ſeroit égale à celle qui en ſortiroit dans un temps égal, en ſuppoſant que chaque partie d'eau conſervât ſa vîteſſe particuliere.

471. REMARQUE II. Or pour trouver cette vîteſſe moyenne, il n'y a qu'à prendre les deux tiers de la plus grande vîteſſe $\sqrt{HB}$: car la ſomme des vîteſſes, ou, ce qui eſt la même choſe, la ſomme des éléments de la parabole, eſt les $\frac{2}{3}$ du rectangle circonſcrit ; & par conſéquent cette ſomme eſt $\frac{2}{3}$ BM×BH. Mais la vîteſſe BM eſt exprimée par $\sqrt{HB}$: donc la ſomme eſt $\frac{2}{3}\sqrt{HB}\times BH$.

472. PROBLÊME I. *Trouver la quantité d'eau qui ſort dans un certain temps de l'orifice C d'un vaſe AB que l'on entretient toujours plein* (Fig. 220).

SOLUTION. L'expérience nous apprend qu'*un corps qui, paſſant du repos au mouvement, deſcend librement vers le centre de la terre, parcourt environ quinze pieds dans une ſeconde ;* & nous ſavons auſſi qu'un corps avec la vîteſſe acquiſe par ſa chûte, peut parcourir un eſpace double de l'eſpace parcouru par ſa chûte dans un temps égal à celui de ſa chûte.

I°. Si nous ſuppoſons donc que la diſtance de l'orifice C à la ſurface ſupérieure de l'eau, ſoit de 15 pieds, l'eau qui ſort de l'orifice aura la même vîteſſe qu'auroit acquiſe un corps en tombant de cette hauteur : & comme cette vîteſſe ſera uniforme, à cauſe que la preſſion eſt toujours la même, cette eau parcourra dans le tuyau CH un eſpace de 30 pieds dans une ſeconde ; & par conſéquent cet eſpace exprimera ſa vîteſſe uniforme, & en même temps la quantité d'eau qui ſortira dans une ſeconde, laquelle ne ſera autre choſe que le produit de la largeur de l'orifice par l'eſpace CH parcouru dans cette ſeconde. Ainſi ſi l'on demande combien il en ſortira dans une minute ou 60 ſecondes, on dira par regle de trois : ſi dans une

ſeconde il ſort une colonne d'eau qui a pour baſe la grandeur de l'orifice, & pour longueur 30 pieds, combien en ſortira-t-il dans 60 ſecondes ? & l'on trouvera qu'il en ſortira 60 colonnes égales à la premiere.

II°. Si la hauteur CE eſt plus ou moins grande que 15 pieds, & qu'elle ſoit, par exemple, de 6 pieds, il ſera toujours vrai de dire qu'il ſortira de l'orifice une colonne de 12 pieds de longueur dans un temps égal à celui qu'un corps auroit employé à deſcendre de cette hauteur. Mais le temps ſera moindre qu'une ſeconde ; & pour le trouver, on obſervera que les temps des hauteurs parcourues par la chûte d'un corps, à commencer toujours depuis le commencement de la chûte, ſont entre eux comme les racines quarrées des hauteurs. C'eſt pourquoi on dira par regle trois : la racine quarrée de la hauteur 15, eſt à la racine quarrée de la hauteur 6, comme le temps, une ſeconde, employé à deſcendre de la hauteur 15, eſt à un quatrieme terme qui ſera le temps employé à deſcendre de la hauteur 6. Ainſi on aura $\sqrt{15}.\sqrt{6}::1.\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$; & ce quatrieme terme $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$ ou $\sqrt{\frac{6}{15}}$ ou $\sqrt{\frac{2}{5}}$, ſera le temps employé à deſcendre de la hauteur 6.

Après quoi on fera une autre regle de trois, en diſant : ſi pendant le temps $\sqrt{\frac{2}{5}}$, l'eau, avec la viteſſe égale à celle qu'un corps auroit acquiſe en tombant de la hauteur 6, parcourt 12 pieds, combien en parcourra-t-elle dans le temps 1 ſeconde ? C'eſt-à-dire qu'en nommant x le quatrieme terme de cette proportion, on aura $\sqrt{\frac{2}{5}}.12::1.x$; & élevant tous les termes aux quarrés, on aura $\frac{2}{5}.144::1.xx$: ce qui donne $\frac{2}{5}xx=144$. D'où l'on tire $xx=\frac{720}{12}=360$; donc $x=18$ pieds & un peu plus. Ainſi l'eau qui s'écoulera dans une ſeconde, ſera une colonne de 18 pieds de longueur & un peu plus.

473. Remarque. Si l'on prend donc ſur un diametre indéfini AC une grandeur de 15 pieds de A en B (*Fig.* 223), & qu'après avoir élevé en B une perpendiculaire BH qu'on fera double de AB, on décrive avec le diametre AB & l'ordonnée BH, une parabole AHL indéfinie ; on trouvera les longueurs des colonnes qui peuvent ſortir de l'orifice d'un vaſe AL entretenu toujours plein, à quelque diſtance que cet orifice ſoit de la ſurface ſupérieure de l'eau. Car ſi, par exemple, l'orifice eſt en T, on menera de ce point T l'ordonnée TS ; & meſurant cette ordonnée, elle ſera la longueur ou la viteſſe de l'eau qui ſortira de l'orifice T dans une ſeconde, & ainſi des

autres : ce qui eſt d'une extrême commodité, ſur-tout lorſqu'on fait une échelle ſur le papier.

474. PROBLÊME II. *Ayant un vaſe qu'on entretient toujours plein d'eau, qui s'écoule par une fente AC verticale ; trouver le point de la hauteur auquel répond la vîteſſe moyenne* (Fig. 223).

SOLUTION. Je décris ma parabole comme il vient d'être dit (473); & ſuppoſant que la droite AC ſoit la hauteur verticale ou le diametre, je mene du point C l'ordonnée CL qui marque la plus grande vîteſſe. Et pour trouver la vîteſſe moyenne, j'en prends les deux tiers de C en V ; & du point V élevant la perpendiculaire VM qui coupe la parabole en M, je mene du point M l'ordonnée MP, laquelle eſt la vîteſſe moyenne, puiſqu'elle eſt égale à $CV = \frac{2}{3}$ CL (470). Ainſi le point P eſt le point cherché.

Si l'on pratiquoit donc en P un orifice ou une fente horizontale de la même grandeur que la verticale, l'eau qui s'écouleroit pendant un certain temps de cet orifice ou de cette fente, ſeroit égale à l'eau qui s'écouleroit dans le même temps de la fente verticale.

475. REMARQUE. Quand on veut mettre en pratique tout ce que nous venons de dire, & ce que nous dirons dans la ſuite, il ſe trouve du déchet, c'eſt-à-dire toujours un peu moins que les calculs ne donnent; & cela vient de ce que dans nos regles & nos calculs nous faiſons abſtraction du frottement de l'eau contre les parois du vaſe, & contre le contour des orifices, lequel frottement doit diminuer un peu la vîteſſe de l'eau. Or, comme ces ſortes de déchets ne peuvent mieux être eſtimés que par la pratique & l'expérience ; nous laiſſons le ſoin à ceux qui travaillent, d'examiner de quelle façon ils doivent y avoir égard.

Généralement parlant, la Géométrie, conſidérant les ſurfaces des corps comme parfaitement plane, & les corps comme parfaitement homogenes dans toutes les parties, fait abſtraction des irrégularités qui ſe trouvent dans ces ſujets : & comme les effets de ces ſortes d'irrégularités qui nous ſont ſouvent inſenſibles, ne peuvent ſe diſcerner que par l'expérience ; ceux qui s'adonnent à la pratique, doivent y avoir recours, & prendre garde cependant de ne pas établir trop vîte des regles générales. Qu'on ait trouvé, par exemple, qu'une ſurface de tant de baſe & de hauteur a donné un certain déchet, il ne s'enſuivra pas toujours qu'une ſurface double de celle-là doive donner un double déchet : il faudroit, pour que cela fût, que l'irrégularité des parties de l'une des ſurfaces fût

la même que l'irrégularité des parties de l'autre; ce qui ne ſe trouve preſque jamais.

Tout varie dans la nature; & l'on raiſonneroit fort mal ſur ſes effets, ſi l'on croyoit pouvoir en parler avec la derniere préciſion. A la bonne heure qu'on aille par des à-peu-près : mais dire qu'en conſéquence de quelques expériences on puiſſe tirer des regles préciſes & géométriques, c'eſt ſe tromper ſoi-même & en impoſer aux Lecteurs. Il arrive même de là qu'on fait par trop d'entêtement des fautes conſidérables, dans leſquelles on ne tomberoit pas, ſi on étoit accoutumé à avoir l'eſprit moins entiché de ſyſtêmes. Les regles de la nature vont leur train, tandis qu'un ſyſtême va auſſi le ſien; & au bout du compte, l'un & l'autre ſe trouvent étrangement éloignés.

PROPOSITION LXXXIV.

476. *Si un vaſe priſmatique AB plein d'eau, ſe déſemplit par un orifice E, le mouvement de l'eau qui coule par cet orifice, eſt un mouvement uniformément retardé* (Fig. 224).

Démonstration. Concevons que le vaſe ſoit coupé par des plans paralleles à la baſe, dont les hauteurs CH, CI, CL, CA, ſoient comme les quarrés 1, 4, 9, 16, &c, des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Quand l'eau commencera à couler, ſa vîteſſe étant comme la racine de la hauteur CA=16, ſera 4; & quand le niveau de l'eau ſera deſcendu juſqu'en L*l*, ſa vîteſſe ſera comme $\sqrt{CL}=\sqrt{9}$, ou comme 3; & quand le niveau ſera en I*i*, ſa vîteſſe ſera comme $\sqrt{CI}=\sqrt{4}$, ou comme 2, & ainſi de ſuite. Or, les cylindres CD, C*l*, C*i*, C*h*, étant entre eux comme leurs hauteurs, à cauſe de la baſe commune, ſont par conſéquent comme les nombres 16, 9, 4, 1; & leurs différences, c'eſt-à-dire les cylindres d'eau LD, I*l*, H*i*, C*h*, ſont comme les nombres 7, 5, 3, 1 : donc à meſure que l'eau, en deſcendant, parcourra les cylindres LD, I*l*, H*i*, C*h*, elle perdra des degrés égaux de vîteſſe, & par conſéquent il arrivera à l'eau ce qui arrive à un corps qui, en remontant avec un certain degré de vîteſſe acquiſe, perd des degrés égaux de vîteſſe à meſure qu'il parcourt des eſpaces qui ſont entre eux comme les nombres impairs pris en rétrogradant. Or, le mouvement de ce corps eſt uniformément retardé : donc le mouvement de l'eau d'un vaſe qui ſe déſemplit, eſt auſſi uniformément retardé.

477. Remarque. Il faut obſerver que ſi l'orifice étoit dans le fond du vaſe, il faudroit qu'il fût beaucoup moindre que le fond,

Car ſi l'orifice étoit égal au fond du vaſe, l'eau tomberoit toute d'une piece; de façon que les parties inférieures & les ſupérieures auroient la même vîteſſe, & par conſéquent cette maſſe d'eau ſuivroit la loi ordinaire des corps peſants, & parcourroit dans des temps égaux des eſpaces qui ſeroient entre eux comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c: & ſi l'ouverture, quoique moindre que le fond, étoit un peu trop grande, la colonne d'eau qui ſeroit au-deſſus de cette ouverture, étant d'un poids conſidérable, s'affaiſſeroit trop vîte, & formeroit une eſpece d'entonnoir.

478. COROLLAIRE I. *Si l'on laiſſe déſemplir un vaſe plein d'eau par un orifice E, la quantité d'eau qui en ſera ſortie ne ſera que la moitié de la quantité d'eau qui en ſortiroit dans le même temps, ſi l'on entretenoit le vaſe toujours plein d'eau* (Fig. 224).

DÉMONSTRATION. Quand le vaſe ſe déſemplit, la vîteſſe $\sqrt{AC}$ avec laquelle l'eau commence à couler, diminue à chaque inſtant; & au contraire, quand on entretient le vaſe toujours plein, la vîteſſe $\sqrt{AC}$ avec laquelle l'eau commence à couler, reſte toujours la même, & par conſéquent elle eſt uniforme. Or, ſelon les regles du mouvement uniformément retardé, une vîteſſe qui diminue à chaque inſtant, fait parcourir un eſpace qui n'eſt que la moitié de celui qu'elle fait parcourir dans le même temps lorſqu'elle eſt uniforme. Donc la quantité d'eau qui ſort lorſque le vaſe ſe déſemplit, ne parcourt que la moitié de l'eſpace de la quantité d'eau qui ſortiroit dans le même temps, ſi le vaſe étoit entretenu toujours plein: c'eſt-à-dire que ſi on adaptoit un long tuyau à l'orifice, la colonne d'eau qui ſe trouveroit dans ce tuyau quand le vaſe ſe ſeroit déſempli, n'auroit que la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui s'y trouveroit, ſi le vaſe toujours plein avoit coulé pendant tout le temps qu'il a fallu pour ſe déſemplir; & par conſéquent la premiere quantité d'eau ne ſeroit que la moitié de la ſeconde.

479. COROLLAIRE II. *De là il eſt aiſé de trouver dans combien de temps toute l'eau d'un vaſe s'écoule lorſque le vaſe ſe déſemplit.*

DÉMONSTRATION. Il n'y a qu'à chercher combien d'eau il ſortiroit de l'orifice pendant une ſeconde, ſi le vaſe reſtoit toujours plein (472); chercher auſſi la quantité d'eau que le vaſe contient; doubler cette quantité; & dire enſuite par regle de trois: ſi une telle quantité s'écoule dans une ſeconde, quand le vaſe eſt toujours plein; le double de la quantité d'eau que le vaſe contient, pendant

dant combien de temps s'écoulera-t-elle, le vaſe reſtant toujours plein ? Le temps que l'on trouvera ſera celui pendant lequel le vaſe doit ſe déſemplir : car quand le vaſe ſe déſemplit, il ne ſort, comme on a vu ci-deſſus, que la moitié de la quantité d'eau qui ſortiroit dans le même temps, ſi le vaſe étoit toujours entretenu à même hauteur.

Nommant donc a la baſe; h la hauteur du vaſe ; b la grandeur de l'orifice ; m la longueur de la colonne d'eau qui ſortiroit dans une ſeconde, ſi le vaſe étoit toujours plein ; & x le temps qu'on cherche : la quantité d'eau que le vaſe contient ſera ah ; & le double de cette quantité $2ah$: la colonne d'eau qui ſortiroit dans une ſeconde ſera bm : ainſi l'on aura $bm. 1 :: 2ah. x$; ce qui donne $x = \frac{2ah}{bm}$.

Soit $a = 10$ pouces quarrés, $h = 15$ pieds, $b = 2$ pouces quarrés, & $m = 30$ pieds : nous aurons $x = \frac{2\times10\times15}{2\times30} = \frac{20\times15}{60} = \frac{300}{60} =$ 5 ſecondes : ainſi le vaſe ſe déſemplira en 5 ſecondes ; & ainſi des autres.

480. COROLLAIRE III. *Si deux vaſes AB, ab, pleins d'eau, ſe déſempliſſent par des orifices E, e ; les temps des écoulements ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des baſes, de la raiſon directe des hauteurs, de la raiſon inverſe des orifices, & de la raiſon inverſe des longueurs des colonnes d'eau qui ſortiroient dans une ſeconde, ſi les vaſes étoient toujours pleins* (Fig. 225).

DÉMONSTRATION. Nommant A, a, les baſes ; H, h, les hauteurs ; B, b, les orifices ; M, m, les longueurs des colonnes qui ſortiroient dans une ſeconde, les vaſes étant toujours pleins ; & X, x, les temps qu'ils faut aux vaſes pour ſe déſemplir ; nous aurons $X = \frac{2AH}{BM}$ pour le temps qu'il faut au premier vaſe pour ſe déſemplir (478) ; & $x = \frac{2ah}{bm}$, pour le temps qu'il faut au ſecond vaſe ; & partant $X. x :: \frac{2AH}{BM}\cdot\frac{2ah}{bm} :: \frac{AH}{BM}\cdot\frac{ah}{bm}$: & multipliant les termes de la derniere raiſon par BM & bm, nous aurons $X. x :: AH\times bm. ah \times BM$. Or, la raiſon $AH\times bm. ah\times BM$, eſt compoſée des raiſons A, a ; H, h ; b, B ; & m. M : donc, &c.

Si l'on fait $A = a$; on aura $X. x :: H\times bm. h\times BM$; c'eſt-à-dire, ſi les baſes des deux vaſes ſont égales, les temps des écoulements ſont entre eux en raiſon compoſée de la raiſon directe des hauteurs

H, h; de la raiſon inverſe b, B, des orifices; & de la raiſon inverſe m, M, des longueurs.

Si l'on fait A=a, & H=h; on aura X. x :: bm. BM; c'eſt-à-dire, les baſes des vaſes étant égales, & les hauteurs auſſi, les temps des écoulements ſont en raiſon compoſée de la raiſon inverſe b, B, des orifices, & de la raiſon inverſe des longueurs m, M. Mais il faut prendre garde qu'en ce cas on aura toujours M=m, à cauſe des hauteurs égales H, h: ainſi l'on aura X. x :: b. B; c'eſt-à-dire, les baſes & les hauteurs étant égales, les temps ſont entre eux en raiſon inverſe des orifices.

Si l'on fait H=h, & par conſéquent M=m; on aura X. x :: A $\times b$. $a\times$B; c'eſt-à-dire, les hauteurs étant égales, les temps des écoulements ſont entre eux en raiſon compoſée de la directe des baſes, & de l'inverſe des orifices.

Si l'on ſuppoſe H=h, & B=b, ce qui donne M=m; on aura X. x :: A. a; c'eſt-à-dire, les hauteurs & les orifices étant égaux, les temps des écoulements ſont entre eux dans la raiſon des baſes.

481. PROBLÊME. *Connoiſſant le temps pendant lequel un vaſe ſe déſemplit; connoître les quantités d'eau qui en ſortent à chaque partie de ce temps* (Fig. 224).

SOLUTION. Suppoſons que le vaſe DC ſe déſempliſſe dans 4 ſecondes. Je diviſe ſa hauteur en quatre parties, en ſorte que les hauteurs CH, CI, CL, CM, ſoient entre elles comme les quarrés 1, 4, 9, 16, des nombres 1, 2, 3, 4: & concevant que l'eau du vaſe ſoit coupée par des paralleles à la baſe qui paſſent par les points de diviſion; les cylindres d'eau DC, lC, iC, hC, ſeront entre eux comme les quarrés 16, 9, 4, 1; & leurs différences, c'eſt-à-dire les cylindres DL, lI, iH, hC, ſeront comme les nombres impairs 7, 5, 3, 1, & exprimeront les quantités d'eau qui ſortiront dans chacune des quatre ſecondes. Car la vîteſſe avec laquelle l'eau commence à couler, étant uniformément retardée pendant ſon mouvement; il eſt clair que les eſpaces que l'eau parcourt pendant les quatre temps égaux qui compoſent la durée de ſon mouvement, doivent être entre eux comme les nombres 7, 5, 3 & 1.

DES MACHINES HYDRAULIQUES.

482. Les *machines hydrauliques* ſont des machines qui ont été imaginées pour élever l'eau dans les endroits où on ne ſauroit en

trouver naturellement. Sur quoi voici quelques obſervations générales.

I°. L'eau étant du nombre des corps peſants ne s'éleve jamais au-deſſus de ſon origine ; mais ſi après avoir deſcendu pendant un certain temps, elle trouve un obſtacle qui l'empêche de deſcendre plus bas & de s'étendre horizontalement de côté & d'autre ; ſa vîteſſe acquiſe la fait remonter à une hauteur égale à celle dont elle eſt deſcendue dans un temps égal à celui qu'elle a employé à deſcendre (*Fig.* 226).

Pour faire remonter l'eau par le moyen de ſa vîteſſe acquiſe, on la fait couler depuis la ſource A, par un tuyau AB cylindrique ou priſmatique, perpendiculaire ou incliné à l'horizon. Après quoi on recourbe le tuyau de façon que l'eau ne puiſſe ſortir par l'ouverture D qu'avec une direction verticale ou inclinée à l'horizon ; & c'eſt ce qu'on nomme des *jets d'eau.*

Que ſi entre le lieu M (*Fig.* 227), auquel on veut l'élever, & ſa ſource A, il ſe trouve un vallon ABC ; on fait deſcendre le tuyau AB juſqu'au fond du vallon : après quoi on le recourbe juſqu'en C, ou on en adapte un autre CM, par le moyen duquel l'eau remonte en M, ſuppoſé que M ne ſoit pas plus haut que A.

Il faut prendre garde que dans ces ſortes de conduits, de même que dans les jets, l'eau ne remonte pas tout-à-fait auſſi haut qu'elle eſt deſcendue : ce qui provient du frottement de l'eau contre les parois des tuyaux, & de la réſiſtance de l'air, qui diminuent la vîteſſe avec laquelle l'eau remonteroit ſans ces obſtacles.

II°. Quelque polies que nous paroiſſent les ſurfaces intérieures des tuyaux dont on ſe ſert pour conduire les eaux ; elles ont cependant des irrégularités, des enfoncements & des éminences imperceptibles, qui, comme autant de petits plans inclinés, ralentiſſent le mouvement de l'eau : car on ſait que les corps peſants deſcendent moins vîte le long des plans inclinés, que s'ils deſcendoient par une direction verticale. Ainſi quand l'eau eſt parvenue juſqu'au bas du tuyau, ſa vîteſſe acquiſe n'eſt pas auſſi grande qu'elle l'auroit été, ſi elle n'avoit pas rencontré ces petits plans ; & par conſéquent on ne doit pas s'étonner ſi elle n'eſt pas capable d'élever l'eau à la hauteur dont elle eſt deſcendue. De plus, lorſque l'eau vient à remonter, l'air à travers lequel elle paſſe s'oppoſe à ſon paſſage, & diminue encore ſon mouvement. Or, pour pouvoir juger exactement & géométriquement de combien la vîteſſe de l'eau eſt ralentie, il faudroit pouvoir découvrir quelle eſt la diminution de vîteſſe cauſée par les petites éminences des ſurfaces intérieures

des tuyaux, & celle que cauſe la réſiſtance de l'air, ce qui me paroît bien difficile, ou, pour mieux dire, impoſſible pour bien des raiſons, quand même on appelleroit l'expérience à ſon ſecours.

En premier lieu, la Géométrie ne tire des conſéquences certaines, qu'autant qu'elle connoît les rapports des ſurfaces, des plans, de leurs dimenſions, & des angles qu'elles forment. Or, tout cela ne ſe peut connoître dans ces petites irrégularités qui ſe trouvent dans les ſurfaces intérieures des tuyaux. Ces irrégularités ſont différentes par leurs figures, & ne ſont pas par-tout en même nombre; car toutes les parties des tuyaux ne ſauroient être homogenes. L'eau en paſſant par deſſus les émouſſe; l'expérience qu'on aura faite aujourd'hui, ne répondra par conſéquent pas à celle qu'on fera demain. Les machines un peu vieilles ont beaucoup moins de frottement que les neuves: d'ailleurs, l'expérience faite à l'égard d'une certaine ſurface, ne peut ſervir de regle pour une autre ſurface plus ou moins grande, qu'autant qu'on voudroit ſuppoſer que les irrégularités ſeroient de même nature par-tout, ce qui eſt faux.

II°. L'air réſiſte plus ou moins, ſelon les différentes altérations qu'il peut ſouffrir, & dont nous avons déja parlé plus haut: les pertes que ſouffre la vîteſſe de l'eau ne ſont donc pas toujours les mêmes. Mais ſuppoſons que par le moyen d'un barometre, d'un thermometre, d'un hygrometre, on puiſſe venir à bout de déterminer exactement les effets de l'air ſelon les circonſtances: il reſtera encore à ſavoir quelle eſt la réſiſtance de l'air au premier inſtant où l'eau commence à s'élever. Il eſt démontré qu'à la fin des temps 1, 2, 3, 4, &c, les réſiſtances ſont entre elles comme les quarrés des vîteſſes reſtantes: pour trouver donc la ſomme des réſiſtances à la fin d'un temps déterminé compoſé de petits temps égaux, il faut néceſſairement connoître la premiere. Et comment pouvoir y parvenir? Eſt-il facile de fermer un tuyau préciſément à la fin d'un certain temps, de façon qu'il n'en ſorte ni plus ni moins d'eau qu'il n'en faut? Suppoſé même qu'on en vienne à bout, peut-on démêler dans la diminution d'eau qu'on trouvera à la fin de cet inſtant, quelle eſt la partie de diminution qui a été cauſée par le frottement, & celle qui a été cauſée par la réſiſtance? Et quand on pourroit le trouver dans un certain cas particulier, ce qui eſt bien difficile, pourroit-on en tirer quelques conſéquences pour le général? Ces conſidérations & grand nombre d'autres que j'y pourrois ajouter, font voir quel fonds l'on peut faire ſur les regles que quelques Auteurs ont voulu nous donner touchant les frottements

des tuyaux, & la réſiſtance de l'air. Les calculs ſur leſquels ils ont voulu appuyer ces regles, ſeront toujours admirables & certains, dès qu'on accordera les ſuppoſitions qu'ils ont faites: mais comme rien n'eſt fixe dans la Nature, & que la combinaiſon des choſes varie d'un inſtant à l'autre; la ſuppoſition faite dans le fond d'un cabinet, n'eſt preſque jamais d'accord avec ce qui ſe paſſe réellement: le calcul tombe, & le calculateur en eſt pour les frais d'avoir calculé.

III°. Les machines hydrauliques que l'on emploie pour élever l'eau au-deſſus de ſa ſource, ſont de deux ſortes. Les unes élevent l'eau renfermée dans un vaſe de la même façon qu'on éleve un poids. C'eſt ainſi qu'on ſe ſert des ſeaux pour tirer de l'eau d'un puits à la faveur d'une poulie; qu'on attache des ſeaux à la circonférence d'une grande roue dont une partie eſt plongée dans l'eau, afin que les ſeaux ſe trouvant au bas de la roue ſe rempliſſent, & que lorſqu'ils ſont en haut ils puiſſent ſe vuider dans un canal, &c. Le calcul de ces machines ſe fait de la même façon que ſi on leur attachoit un poids égal à celui de l'eau qu'elles élevent; & par conſéquent je n'en parlerai pas après ce que j'ai dit ci-deſſus touchant ces ſortes de machines.

Celles de la ſeconde eſpece élevent l'eau par le moyen de l'air, & ſont beaucoup plus ingénieuſes que les précédentes. Les Anciens s'en ſervoient de même que nous; mais comme ils n'avoient aucune connoiſſance de la peſanteur de l'air & de ſon reſſort, tout ce qu'ils ont écrit là-deſſus n'a rien de ſatisfaiſant, & leurs machines étoient bien éloignées de la perfection de celles qu'on fait aujourd'hui. Je vais en rapporter quelques-unes des plus ſimples: la connoiſſance de celles-ci fera aiſément juger de ce qu'on doit penſer des autres, qui n'en ſont que des différentes combinaiſons.

Du Siphon.

483. Le *ſiphon* eſt un inſtrument dont on ſe ſert pour faire ſortir la liqueur d'un vaſe par le haut ſans toucher au vaſe. On en fait de pluſieurs façons; mais ordinairement c'eſt un tuyau ABC (*Fig.* 228); dont l'une des branches AB eſt plus grande que l'autre BC. Quand on veut s'en ſervir, on plonge la branche BC dans la liqueur du vaſe MN qu'on veut vuider: on applique la bouche à l'extrémité A de l'autre branche AB, & l'on aſpire juſqu'à ce que la liqueur vienne mouiller les levres: alors on ſe retire, & la liqueur du vaſe coule par l'ouverture A.

La raiſon de ceci, eſt qu'en aſpirant on étend la capacité de la poitrine, de ſorte qu'une partie de l'air qui étoit dans le ſiphon venant à paſſer dans les poumons, ce qui reſte étant plus dilaté, a moins de reſſort & de force que la colonne d'air qui peſe ſur la ſurface de la liqueur contenue dans le vaſe. Ainſi cette colonne fait monter l'eau, laquelle étant parvenue en B, deſcend par ſon propre poids le long de la branche BA : ce qui continue juſqu'à ce que la liqueur contenue dans le vaſe, ſe trouve au-deſſous de l'orifice C de l'autre branche BC.

On dira peut-être que la colonne d'air qui répond à l'ouverture A étant en équilibre avec celle qui peſe ſur la ſurface de la liqueur contenue dans le vaſe, doit empêcher l'eau qui eſt dans la branche AB de couler. Mais il faut obſerver que la branche AB étant toujours plus longue que la branche BC, contient une plus grande quantité d'eau que la branche BC ; & que par conſéquent la colonne d'air qui répond à l'ouverture A ayant une plus grande quantité d'eau à ſoutenir, que la colonne d'air qui fait remonter l'eau par l'autre ouverture, ſe trouve plus foible & doit laiſſer le paſſage libre à l'eau.

Il faut prendre garde que ſi dans la branche BC la partie BE qui ſe trouve au-deſſus du niveau de l'eau contenue dans le vaſe, n'étoit pas moindre de 32 pieds, l'eau ne couleroit jamais par l'autre branche. Car ſuppoſé même qu'on pût en aſpirant, tirer tout l'air qui eſt dans le ſiphon ; la colonne d'air qui eſt au-deſſus de la ſurface du vaſe, ne pourroit élever l'eau qu'à 32 pieds de hauteur. Or, il reſte toujours de l'air dans le ſiphon ; & cet air, quoique dilaté, a toujours une certaine force qui s'oppoſe à l'action de la colonne extérieure : donc, cette colonne extérieure ne peut élever l'eau juſqu'à 32 pieds. Ainſi l'ancien Méchanicien *Héron* avoit tort de dire qu'avec un ſeul ſiphon il feroit paſſer l'eau au-deſſus de la plus haute montagne.

484. Remarque I. On peut ſe ſervir du ſiphon ſans être obligé d'aſpirer : ce qui ſe fait de différentes façons, ainſi qu'on va voir (*Fig.* 229).

J'adapte un ſiphon au côté MS d'un vaſe MN, de façon que la petite branche BC ſoit dans le vaſe, la plus grande AB en dehors, & que le ſommet B ſoit moins haut que le ſommet M du vaſe. Je verſe de l'eau dans le vaſe, & tant que cette eau ne montera pas juſqu'en B, elle entrera dans la branche BC, & ſe mettra en équilibre ou de niveau avec l'eau contenue dans le reſte du vaſe, & par conſéquent elle ne deſcendra point par la branche BA. Mais

dès que l'eau du vaſe ſera à une hauteur plus grande que BS, elle paſſera par la branche BC; & forcée par le poids de celle qui reſtera dans le vaſe, elle commencera à couler par la branche BA, & ne ceſſera de couler que lorſque l'eau du vaſe ſe trouvera plus baſſe que l'ouverture C de la branche BC.

La raiſon en eſt, que ſi l'eau qui aura paſſé dans la branche BA pouvoit s'écouler par A & ſe ſéparer de celle qui eſt dans la branche BC, il ſe trouveroit entre ces deux eaux un air qui ſe dilateroit de plus en plus à meſure que l'eau de la branche BA deſcendroit: c'eſt pourquoi cet air dilaté ayant moins de force que celui qui peſe ſur la ſurface de l'eau du vaſe, celui-ci forceroit l'eau de couler de nouveau par la branche BA.

Ces ſortes de ſiphons, adroitement cachés dans les parois d'un vaſe, & diſpoſés de différentes façons, produiſent des effets gracieux, & qui ſurprennent beaucoup ceux qui n'en connoiſſent pas la cauſe.

485. REMARQUE II. Soit un grand vaſe ou réſervoir AC (*Fig.* 230) plein d'eau. Je range pluſieurs caiſſes MN, RS, &c, horizontalement & au niveau du baſſin: j'adapte au fond de ces caiſſes, des tuyaux DE, FH, &c, qui ont à leurs extrémités E, H, des robinets: j'adapte auſſi au-deſſus de ces caiſſes des tuyaux LX, PQ, qui entrent dans d'autres caiſſes TZ, YV, poſées de façon que les plus éloignées du baſſin AC, ſoient plus hautes que celles qui en ſont plus proches: les extrémités X, Q, des tuyaux LX, PQ, doivent entrer bien avant dans les caiſſes TZ, YV, mais non pas tout-à-fait juſqu'à la ſurface ſupérieure. Je mets à la caiſſe TZ, un tuyau *ab* qui plonge dans le vaſe AC & entre dans la caiſſe TZ: je mets un autre tuyau *hf* dont l'extrémité *f* plonge dans la caiſſe TZ.

Cette machine étant faite, je remplis d'eau les caiſſes inférieures MN, RS, par le moyen d'une ouverture qui eſt ſur leur ſurface ſupérieure, & je ferme cette ouverture de façon que l'air ne puiſſe pas y entrer. J'ouvre le robinet E; & à meſure que l'eau de la caiſſe MN commence à deſcendre & à couler par E, l'air qui ſe trouve dans les caiſſes ſupérieures & dans leurs tuyaux de communication avec les inférieures, ſe dilate de plus en plus, & ſon reſſort s'affoiblit: c'eſt pourquoi l'air qui peſe ſur la ſurface de l'eau du vaſe AC, devenant le plus fort, fait monter l'eau par le tuyau *be*, & la caiſſe TZ s'en remplit. Je ferme le robinet E avant que toute l'eau de la caiſſe MN ſe ſoit écoulée: car ſi cela arrivoit, l'air qui rentreroit par E, dans les tuyaux ED, LX, ſe trouvant auſſi fort que celui

qui eſt ſur la ſurface du vaſe AC, empêcheroit l'eau de continuer à monter dans le tuyau *ab*.

J'ouvre le robinet H, & l'eau de la caiſſe RS commençant à couler, l'air de la caiſſe ſupérieure YV ſe dilate & perd de ſon reſſort : ainſi l'eau de la caiſſe TZ monte par le tuyau *fh*, & coule dans la caiſſe YV; & continuant à mettre des caiſſes dans la diſpoſition que je viens de dire, je pourrois aiſément faire monter l'eau au-deſſus du réſervoir AC auſſi haut que je voudrois ; à condition cependant que les tuyaux *ba*, *fh*, &c, fuſſent chacun d'une hauteur au-deſſous de 32 pieds, pour les raiſons que j'ai déja dites.

Cette machine eſt fort propre à faire voir comment on peut élever l'eau auſſi haut que l'on voudra, par moyen de la ſeule dilatation de l'air : mais il eſt aiſé de voir qu'elle ne ſeroit pas des plus commodes pour l'uſage.

De la Fontaine de Héron d'Alexandrie.

486. Cette fontaine fait monter l'eau par le moyen de la compreſſion de l'air. On la conſtruit ainſi (*Fig.* 231).

D'abord, AB eſt un grand vaſe, dont le couvercle ſupérieur AEFC eſt concave : HL eſt une cloiſon ou un diaphragme, qui coupe le vaſe en deux parties : FS eſt un tuyau adapté au fond concave AEFC, qui paſſe à travers le diaphragme HL & qui deſcend à une petite diſtance du fond MB : PR eſt un autre tuyau adapté au diaphragme HL, qui entre très peu dans la partie inférieure HB, & qui monte dans la ſupérieure AL à une petite diſtance du couvercle AEFC : enfin TX eſt un autre tuyau adapté au couvercle AEFC, & qui deſcend dans la cavité ſupérieure AL, juſqu'à une petite diſtance du diaphragme HL.

Pour ſe ſervir de cette machine, on verſe de l'eau par l'orifice T du tuyau TX, juſqu'à ce qu'on entende qu'elle coule dans la cavité inférieure HB, par l'orifice P du tuyau PR. Alors on bouche l'orifice T, & on verſe de l'eau par l'orifice F du tuyau FS : cette eau, en montant peu à peu dans la cavité HB, comprime l'air qui eſt dans cette cavité, & celui qui eſt reſté dans la cavité AL ; de ſorte que lorſqu'elle eſt parvenue à une certaine hauteur YZ, l'air comprimé la tient en balance & l'empêche de monter plus haut. Or cette eau monteroit juſqu'en F ſi elle ne trouvoit point d'obſtacle dans toute la capacité AB : donc, l'air comprimé par cette eau, preſſe l'eau qui eſt dans la capacité ſupérieure AL, avec une force

force capable de l'élever à une hauteur égale à ZF.

Ainſi, ſi l'on débouche l'orifice T, la colonne d'air extérieur qui porte ſur cet orifice, & qui ſeroit en équilibre avec l'air intérieur s'il n'étoit pas comprimé, cédera à la force de cet air comprimé; & l'eau de la capacité ſupérieure AL jaillira par l'orifice T à une hauteur égale à ZF: ce qui durera juſqu'à ce que l'eau de la capacité AL ſe trouve plus baſſe que l'extrémité X du tuyau TX. Car quoiqu'à meſure que l'eau de la cavité AL jaillit, l'air comprimé puiſſe ſe dilater davantage dans cette cavité; cependant l'eau qu'on verſera toujours par l'orifice F du tuyau FS, montera davantage dans la cavité inférieure HB; ce qui tiendra l'air des deux cavités dans lemême état de compreſſion.

De la Pompe aſpirante.

487. La pompe aſpirante eſt un cylindre creux AB, ayant à ſa baſe LB un tuyau CD auquel eſt une *ſoupape* ou couvercle CH qui s'ouvre en dedans du cylindre & qui peut ſe refermer par ſon propre poids: on adapte à ce cylindre un piſton MVRZSX, auquel eſt une autre ſoupape EF qui s'ouvre de bas en haut & qui ſe referme par ſon propre poids (*Fig.* 232).

I°. Quand on veut ſe ſervir de cette machine on plonge le tuyau CD verticalement dans l'eau: on enfonce le piſton juſqu'en L; & l'air compris entre le piſton & le fond LB de la pompe, ſe trouvant comprimé de plus en plus à meſure que le piſton deſcend, ſe fait jour en ouvrant la ſoupape EF, laquelle ſe referme lorſque le piſton eſt parvenu en L. On éleve le piſton; & comme à meſure qu'il s'éloigne du fond il laiſſe un vuide dans lequel il ne ſe trouve que très peu d'air extrêmement raréfié qui ne ſauroit être en équilibre avec celui du tuyau, celui-ci ſe dilate en ouvrant la ſoupape CH, laquelle, après cette dilatation, ſe referme par ſon propre poids. Cependant l'air dilaté du tuyau n'étant plus en équilibre avec l'air qui peſe ſur la ſurface de l'eau, il eſt clair que l'eau doit monter juſqu'à ce que l'air dilaté ſoit comprimé de façon à être en équilibre avec elle.

On enfonce de nouveau le piſton juſqu'en L: & l'air compris entre lui & le fond LB, ſe trouvant de nouveau comprimé, ſe fait encore jour par la ſoupape EF qui ſe referme quand le piſton eſt parvenu en L. C'eſt pourquoi retirant le piſton, ce qui étoit reſté d'air dans le tuyau ſe dilate, & l'eau monte dans le cylindre juſqu'à une certaine hauteur où elle ſe tient en équilibre avec l'air dilaté qu'elle condenſe, & la ſoupape CH ſe referme.

On enfonce encore le piſton juſqu'en L ; & non ſeulement l'air qui étoit reſté, mais encore l'eau qui eſt montée dans le cylindre, ſortent par la ſoupape EF laquelle ſe referme : & continuant à relever & à enfoncer ſucceſſivement le piſton, on fera monter de l'eau tant qu'on voudra au-deſſus de la ſoupape EF ; & on la fera couler par un tuyau PQ, adapté horizontalement au ſommet du cylindre AB.

II°. Mais il faut obſerver que *la hauteur du tuyau CD au-deſſus de l'eau qu'on veut élever, doit être moindre que 32 pieds.* Car l'air qui preſſe la ſurface de l'eau, ne peut élever l'eau qu'à cette hauteur ; & c'eſt même à une de ces pompes aſpirantes que nous ſommes redevables de la découverte de cette propriété de l'air. Le Jardinier de Galilée, à ce qu'on dit, arroſoit ſon jardin par le moyen d'une pompe : au bout de quelques années la pompe ſe trouvant uſée, il en fit conſtruire une autre ; & ſoit par haſard ou de deſſein prémédité, la longueur du tuyau d'aſpiration fut faite de plus de 32 pieds. Mais quel fut l'étonnement du Jardinier, lorſque la machine ayant été placée, il trouva qu'il faiſoit de vains efforts pour faire remonter l'eau. Surpris de cet événement auquel il n'avoit garde de s'attendre, il courut l'annoncer à ſon maître comme un prodige étonnant qui venoit d'arriver dans ſa maiſon.

Galilée étoit auſſi profond Phyſicien que ſavant Géometre. Accoutumé à rechercher les cauſes des effets les plus ſurprenants qu'on voit dans la Nature, il s'apperçut qu'il n'y avoit que l'air qui fût capable de faire remonter l'eau dans une pompe ; & de là il conclut aiſément que ſi l'eau ne remontoit qu'à 32 pieds, cela ne provenoit que de ce qu'une colonne d'air de même baſe que celle de l'eau, & dont la hauteur eſt égale à celle de l'atmoſphere, peſoit autant qu'une colonne d'eau de même baſe & de 32 pieds de hauteur. Les expériences qu'il fit en conſéquence, & une infinité d'autres qu'on a faites après, ont établi pour regle certaine & inconteſtable, ce qu'il ne regardoit d'abord que comme une conjecture.

III°. Ce qu'il y a encore à obſerver à l'égard des pompes, c'eſt que les charnieres des ſoupapes ne ſoient pas faites de métaux qui ſont ſujets à la rouille, ni de façon que le limon de l'eau entre dans leurs jointures : car dans l'un & l'autre cas, le jeu de ces charnieres deviendroit trop dur, & quelquefois même il s'arrêteroit tout court. C'eſt pour cette raiſon qu'on a toujours cru que les meilleures ſoupapes étoient celles qu'on conſtruit ainſi qu'on va voir (*Fig.* 233).

Suppoſons que le cercle HL repréſente le fond d'une pompe ou d'un piſton, & que le cercle NCR repréſente l'ouverture : on prend

une piece de cuir MNCRS, dont la partie NCR couvre exactement l'ouverture, ſans pouvoir tomber par deſſous, & dont l'autre partie MNRS ſoit bien attachée ſur le cercle HL : ainſi la ligne NR de ce cuir, qu'on doit prendre flexible, lui ſert de charniere. Mais comme l'eau, en venant à peſer au-deſſus de la partie NCR, pourroit la faire fléchir, on a ſoin de mettre ſur cette partie une plaque de fer ou de cuivre de même grandeur. Toutes les ſoupapes qu'on a voulu ſubſtituer à la place de celle-ci, ont preſque toujours réuſſi fort mal, quoique leur invention parût d'abord ingénieuſe.

De la Pompe foulante.

488. La *pompe foulante* ne differe de l'aſpirante, qu'en ce que le piſton MNVXT entre dans la pompe par le bas, & que le diaphragme PL eſt environ vers le milieu (*Fig.* 234).

Quand on tire le piſton de P en M, l'eau qui eſt par deſſous ouvre la ſoupape FH, & entre dans la pompe : & quand on repouſſe le piſton de M en P, la ſoupape FH ſe referme, & l'eau qui eſt entrée au-deſſus du piſton, ſe trouvant comprimée à meſure que le piſton monte, ouvre la ſoupape RS, & entre dans la cavité AL ; après quoi la ſoupape RS ſe referme. C'eſt pourquoi ſi l'on continue à baiſſer & hauſſer le piſton ſucceſſivement, on fera monter tant d'eau qu'on voudra.

Quelquefois le piſton de la pompe foulante eſt placé au-deſſus, au lieu d'être placé au-deſſous de la ſurface de l'eau : mais le jeu de la machine eſt toujours le même pour le fond des choſes, & on conçoit aiſément qu'on peut en varier à l'infini la conſtruction & le méchaniſme. Par le moyen de cette machine, on peut élever l'eau à telle hauteur que l'on veut, pourvu qu'on y emploie une force ſuffiſante. Tout le monde connoît les pompes foulantes dont on ſe ſert dans les incendies : le méchaniſme qui les met en jeu, eſt le même, pour le fond des choſes, que celui qu'on vient d'expliquer.

Du Choc des Fluides contre les Corps ſolides.

489. Lorſqu'un corps ſolide ABCD choque un autre corps ſolide EF, il faut faire attention à la maſſe, à la vîteſſe, & à ſa direction : le produit de la maſſe par la vîteſſe eſt la force du corps ABCD ; & ce corps choque avec toute ſa force, ſi la direction OR de ſon mouvement eſt perpendiculaire au corps choqué EF ; & avec moins de force, ſi cette direction eſt oblique (*Fig.* 235).

Quant à l'étendue de la face BC qui choque le corps EF, il importe peu qu'elle ſoit plus ou moins grande : car toutes les parties du corps ABCD étant étroitement liées enſemble, leur effort commun ſe réunit à leur centre de gravité O ; de ſorte que EF reçoit le même choc que ſi toutes les parties du corps ABCD le touchoient.

490. Il n'en eſt pas de même du choc des fluides contre les corps ſolides. Les fluides n'ayant pas toutes leurs parties intimement unies les unes aux autres, n'ont point de centre de gravité, à moins qu'on ne renferme un fluide dans un vaſe bien bouché qu'on laiſſe enſuite tomber vers le centre de la terre. Ainſi un ſolide choqué par un fluide ne reçoit à chaque inſtant que l'impreſſion des molécules d'eau qui le touchent. C'eſt pourquoi dans ces ſortes de chocs, il faut avoir égard à la direction, à la grandeur de la ſurface choquée, & à la vîteſſe. Plus la ſurface choquée eſt grande, la vîteſſe étant la même, plus y a de molécules d'eau qui touchent le corps choqué : & plus la vîteſſe eſt grande, la ſurface étant la même, plus il ſe trouve auſſi de molécules qui choquent cette ſurface dans un certain temps (*Fig.* 236).

Suppoſons, par exemple, que deux fluides de même nature MABN, *mabn*, choquent les ſurfaces égales AB, *ab*, avec des vîteſſes inégales, en ſorte que la vîteſſe du premier ſoit, ſi l'on veut, double de celle du ſecond. Les molécules d'eau du fluide MABN feront donc dans une ſeconde un chemin double de celui que feront les molécules du fluide *mabn* ; & par conſéquent dans un même temps, c'eſt-à-dire dans une ſeconde, le nombre des molécules qui choqueront la ſurface AB, ſera double du nombre des molécules qui choqueront la ſurface *ab*. D'où il ſuit que les ſurfaces étant égales, les volumes des fluides qui choquent dans un même temps, ſont entre eux comme leurs vîteſſes.

PROPOSITION LXXXV.

491. *Si deux fluides de même nature choquent avec une même direction ou ſous un même angle, deux plans inégaux AB & ab ; les forces dont ces plans ſont choquées, ſont entre elles comme les plans* (Fig. 236).

Démonstration. Les deux fluides, étant d'une même nature, ont une même denſité ; & l'on ſuppoſe que les vîteſſes ſont égales de même que les directions : ainſi la différence des chocs ne peut provenir que de la différence des volumes qui choquent. Or, à

cauſe de l'égalité des vîteſſes, la quantité de molécules qui choquent le plan AB, eſt à la quantité de molécules qui choquent le plan *ab* dans le même temps, comme le plan AB eſt au plan *ab* (490): donc la force du choc du fluide contre le plan AB eſt à celle du choc du fluide contre le plan *ab*, comme AB eſt à *ab*.

492. COROLLAIRE. *Si les vîteſſes ſont inégales & les plans égaux, les forces des chocs ſont entre elles comme les quarrés des vîteſſes.* Car dans cette ſuppoſition les quantités de molécules qui choquent dans le même temps ſont entre elles comme les vîteſſes (490): ainſi les forces, c'eſt-à-dire les volumes, ou maſſes, ou quantités de molécules, multipliées par leurs vîteſſes, ſont entre elles comme les vîteſſes multipliées pas les vîteſſes; c'eſt-à-dire comme les quarrés des vîteſſes.

493. REMARQUE. Suppoſant toujours que les fluides ſoient de même nature, & qu'ils choquent avec la même direction: ſi nous nommons le plan AB=A, le plan *ab*=*a*, la vîteſſe du premier fluide=V, la vîteſſe du ſecond = *u*, la force du choc du premier fluide contre le plan AB = F; & celle du ſecond fluide contre l'autre plan *ab* = *f*, & que nous faſſions la raiſon A×VV, *auu*, qui eſt la compoſée de la raiſon A, *a*, des plans, & de la raiſon VV, *uu*, des quarrés des vîteſſes, nous aurons pour tous les cas, F. *f* :: A×VV. *auu*. Car,

I°. Si V=*u*, l'analogie F. *f* :: A×VV. *auu*, ſe changera en F. *f* :: A. *a*; & c'eſt ce que nons venons de voir (491).

II°. Si A=*a*, nous aurons F. *f* :: VV. *uu*; & c'eſt ce qu'on a vu (492).

III°. Si A=*a*, & V=*u*; donc A×VV=*auu*, & partant F=*f*.

IV°. Enfin, ſi tout eſt inégal, nous aurons F. *f* :: AVV. *auu*: c'eſt-à-dire, les forces des chocs ſont en raiſon compoſée de la raiſon des quarrés des vîteſſes, & de la raiſon des plans. Car à cauſe de l'inégalité des plans & des vîteſſes, les volumes ou maſſes qui choquent, ſont en raiſon compoſée de la raiſon des plans, & de celle des vîteſſes: c'eſt-à-dire, ces volumes ſont entre eux comme AV eſt à *au*. Or, les forces ſont comme les volumes ou maſſes multipliées par les vîteſſes: donc elles ſont comme AVV eſt à *auu*.

Suppoſons A=2, & *a*=1: il eſt clair que ſi les vîteſſes étoient égales, la quantité de molécules qui choquent A, ſeroit à celle qui choque *a* dans le même temps, comme 2 eſt à 1 (491): ainſi A ſeroit choqué par une maſſe d'eau double de celle qui choqueroit *a*. Maintenant, ſuppoſons encore V=3 & *u*=1: le plan A

ſe trouvant choqué avec une vîteſſe triple de celle avec laquelle le plan *a* eſt choqué, ſera par conſéquent choqué avec une maſſe triple de la précédente : ainſi cette maſſe ſera ſextuple de celle qui choque *a* ; c'eſt-à-dire, les maſſes qui choqueront A, *a*, ſont entre elles comme 6 à 1. Or, pour avoir les forces, il faut multiplier les maſſes par les vîteſſes 3, 1 : donc ces forces ſont comme 3×6, & 1 ; ou comme le plan 2 multiplié par le quarré 9 de la vîteſſe 3, eſt au plan 1 multiplié par le quarré 1 de la vîteſſe 1 : & ainſi des autres.

494. PROBLÊME. *Déterminer les forces des chocs de deux fluides de différente nature, qui choquent deux plans avec la même direction* (Fig. 236).

SOLUTION. En premier lieu, ſi l'on ſuppoſe que les plans AB, *ab*, ſoient égaux, & les vîteſſes égales, les quantités de molécules qui choqueront les deux plans ſeront égales entre elles. Mais à cauſe qu'on ſuppoſe les fluides de différente nature, & par conſéquent de différente denſité, les maſſes de ces quantités de molécules ſeront entre elles comme les denſités : ainſi les forces étant dans ce cas comme les maſſes multipliées par les vîteſſes, ſeront auſſi comme les denſités multipliées par les vîteſſes. Mais les vîteſſes ſont égales ; donc les forces des chocs ſeront entre elles comme les denſités.

En ſecond lieu, ſi les vîteſſes ſont égales & les plans inégaux, les quantités de molécules qui choquent les plans dans un même temps ſeront non ſeulement dans le rapport des plans (491), mais encore dans la raiſon des denſités. Ainſi ces quantités de molécules ou maſſes ſeront comme les produits des plans par les denſités. Or, les forces des chocs ſont entre elles comme les produits des maſſes par les vîteſſes, & les vîteſſes ſont égales : donc les forces des chocs ſeront comme les maſſes, ou comme les produits des plans par les denſités.

En troiſieme lieu, ſi les vîteſſes ſont inégales & les plans égaux, les quantités des molécules qui choqueront les plans dans un même temps, ſeront dans la raiſon des vîteſſes & dans celle des denſités. Ainſi ces quantités de molécules ou maſſes ſeront comme les produits des denſités par les vîteſſes. Or les forces des chocs ſont comme les produits des maſſes par les vîteſſes : donc ces forces ſont entre elles comme les produits des denſités par les vîteſſes multipliés par les vîteſſes, c'eſt-à-dire comme les denſités multipliées par les quarrés des vîteſſes.

Enfin, ſi les vîteſſes ſont inégales & les plans auſſi, les quantités

de molécules ſeront entre elles dans la raiſon des plans, dans celle des vîteſſes, & dans celle des denſités ; & par conſéquent elles ſeront comme les produits des plans, des vîteſſes, & des denſités. Or, les forces des chocs ſont entre elles comme les produits des quantités de molécules ou des maſſes par les vîteſſes : donc ces forces ſont comme les produits des plans, des denſités, & des vîteſſes, multipliés par les vîteſſes ; c'eſt-à-dire comme les produits des plans & des denſités multipliés par les quarrés des vîteſſes, ou en raiſon compoſée de la raiſon des plans, de celle des denſités, & de celle des quarrés des vîteſſes.

495. COROLLAIRE. Ainſi nommant A le premier plan, *a* le ſecond, V la vîteſſe du fluide qui choque A, & D ſa denſité, *u* la vîteſſe de l'autre fluide, & *d* ſa denſité, F la force du choc du premier fluide, & *f* la force du ſecond ; & faiſant la raiſon A × D×VV, *aduu*, qui eſt la compoſée de la raiſon des plans, de celle des denſités, & de celle des quarrés des vîteſſes ; & faiſant F. *f* :: A×D×VV. *aduu* ; cette analogie répondra à tous les cas.

Car ſi l'on fait V=*u*, & A=*a* ; on aura F. *f* :: D. *d*, ainſi que nous l'avons vu.

Si l'on fait V=*u*, & le reſte inégal ; on aura F. *f* :: A×D. *ad*, comme nous l'avons vu auſſi ; & ainſi des autres.

REMARQUE. Tout ce que nous venons de dire dans la Propoſition & dans le Problême précédents à l'égard des fluides qui choquent des plans qui ne ſe meuvent pas, doit s'entendre auſſi des plans qui ſe mouvroient dans des fluides tranquilles : étant certain que la réſiſtance que ces plans éprouveroient de la part des fluides, ſeroit égale à la force du choc qu'ils reſſentiroient s'ils étoient en repos, & que les fluides vinſſent à les choquer avec la vîteſſe avec laquelle ils ſe meuvent.

PROPOSITION LXXXVI.

496. *Si un fluide choque obliquement une droite AB, ſelon des droites paralleles AC, DB ; ſa vîteſſe abſolue eſt à ſa vîteſſe relative, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence* (Fig. 237).

DÉMONSTRATION. Suppoſons que la vîteſſe abſolue ſoit exprimée par la droite AC. Je mene du point C la droite CF perpendiculaire ſur AB ; & ſelon les loix du mouvement compoſé, la droite AC eſt équivalente aux deux vîteſſes CF, FA. Mais la

vîteſſe FA n'agit point ſur la ligne AB qui lui eſt parallele : donc le fluide n'agit ſur AB qu'avec la vîteſſe CF. Or en prenant CA pour le ſinus total, la droite CF eſt le ſinus de l'angle d'inclinaiſon CAF du fluide ſur la ligne AB : donc la vîteſſe abſolue du fluide eſt à ſa vîteſſe relative, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon.

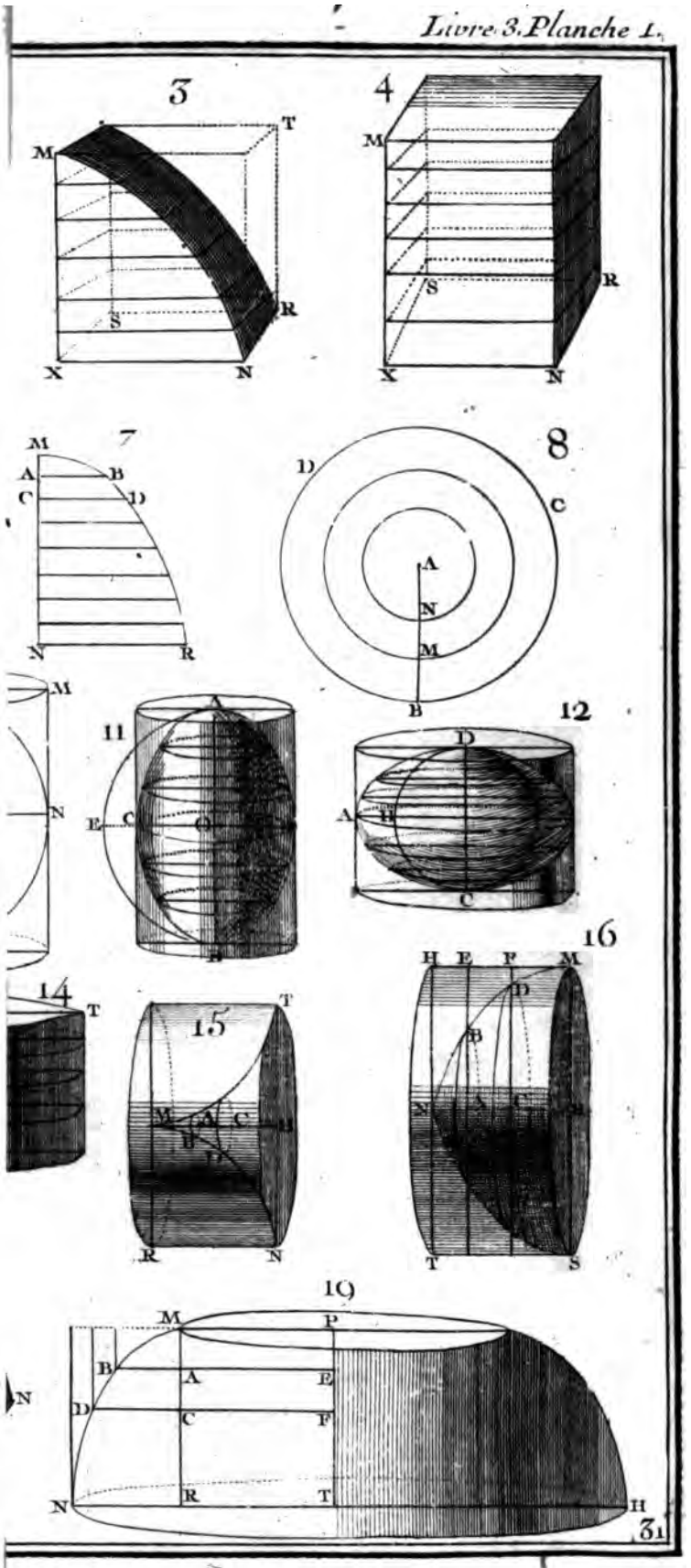
497. COROLLAIRE I. *La maſſe du fluide qui choque indirectement la ligne AB, eſt à celle qui le choqueroit directement, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus total* (Fig. 237).

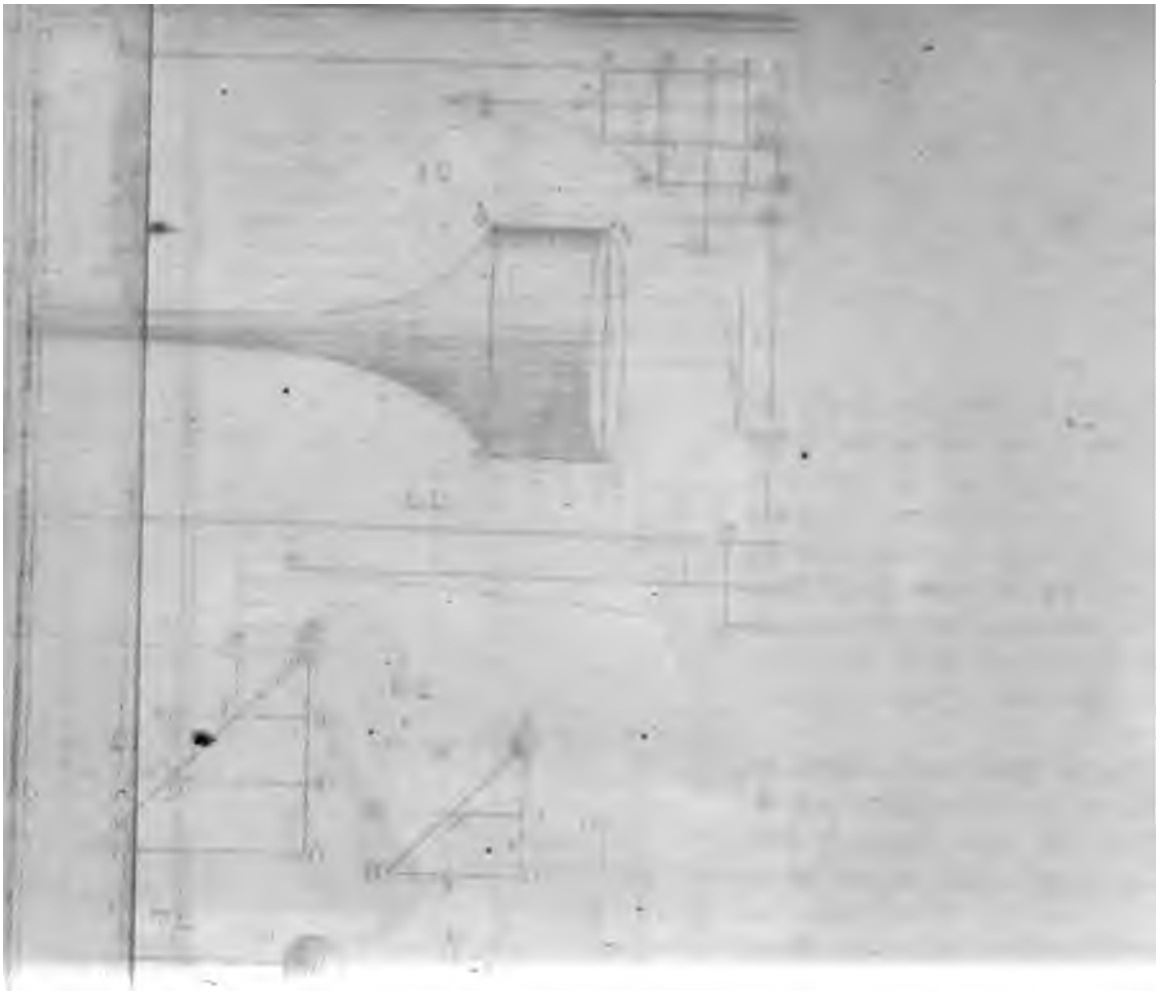
DÉMONSTRATION. Je mene du point B la perpendiculaire BE ſur AC : il n'y a pas plus de filets d'eau qui choquent AB, qu'il n'y en a qui choqueroient la droite BE ſur laquelle ces filets ſont perpendiculaires. C'eſt pourquoi le nombre de filets qui choquent AB eſt exprimé par la droite BE : au lieu que ſi AB étoit choqué directement, le nombre de filets qui le choqueroient, ſeroit exprimé par AB.

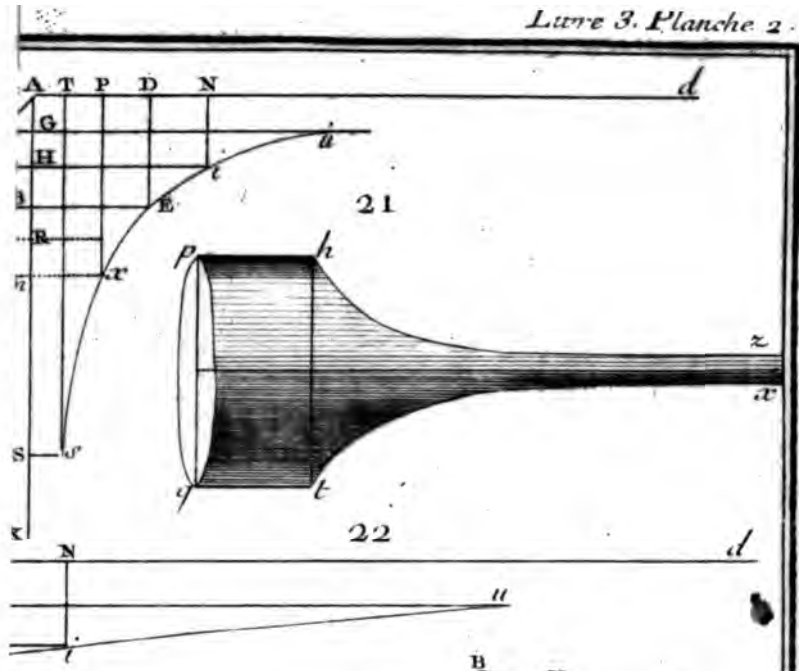
Or, nous ſuppoſons la vîteſſe égale dans le choc direct & dans le choc indirect : donc le volume du choc oblique eſt au volume du choc direct, comme EB eſt à AB. Prenant donc AB pour ſinus total, la droite EB ſera le ſinus de l'angle CAB d'incidence du fluide ; & partant la maſſe du choc oblique eſt à la maſſe du choc direct, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus total.

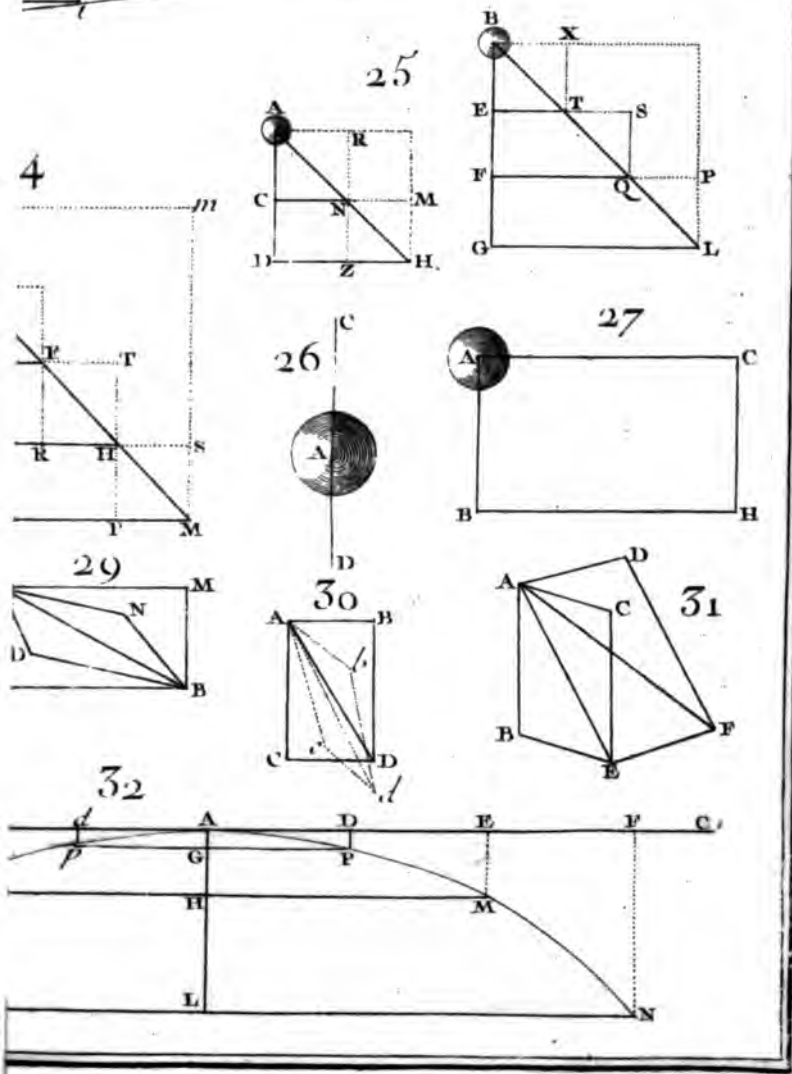
498. COROLLAIRE II. *La force du choc oblique du fluide contre la droite AB, eſt à la force avec laquelle il le choqueroit directement, comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence, eſt au quarré du ſinus total* (Fig. 237).

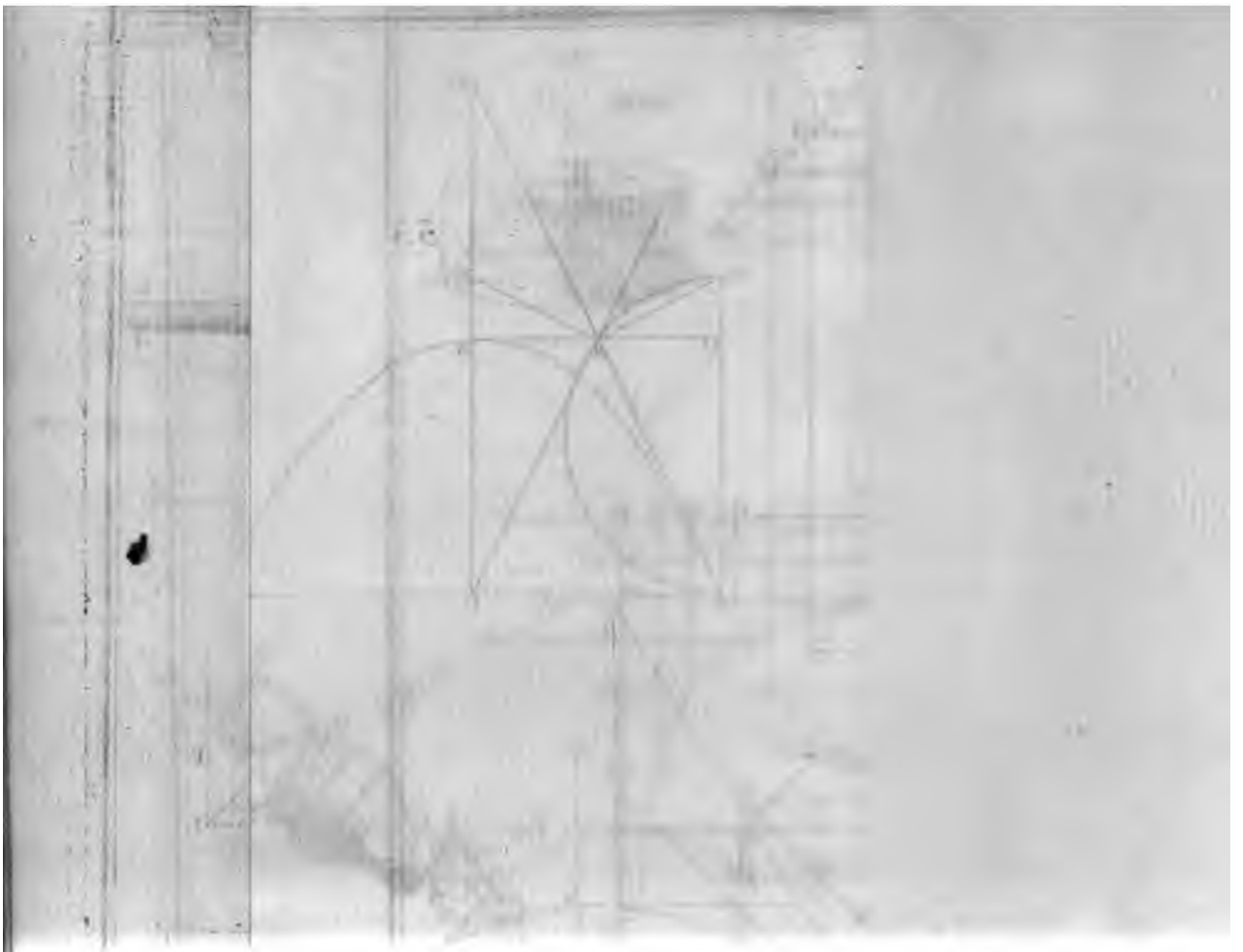
DÉMONSTRATION. La vîteſſe abſolue eſt à la reſpective, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence (496) ; & le volume ou la maſſe qui choqueroit directement, eſt au volume qui choque indirectement, dans la même raiſon du ſinus total au ſinus de l'angle d'incidence (497). Or, la force qui choquera directement, eſt le produit de la maſſe directe par la vîteſſe abſolue ; & la force qui choque indirectement, eſt le produit de la maſſe qui choque indirectement par la vîteſſe relative : donc ces deux forces ſont entre elles, comme le produit du ſinus total par le ſinus total eſt au produit du ſinus de l'angle d'incidence par le même ſinus ; ou comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'angle d'incidence : & partant, la force du choc indirect eſt à celle du choc direct,

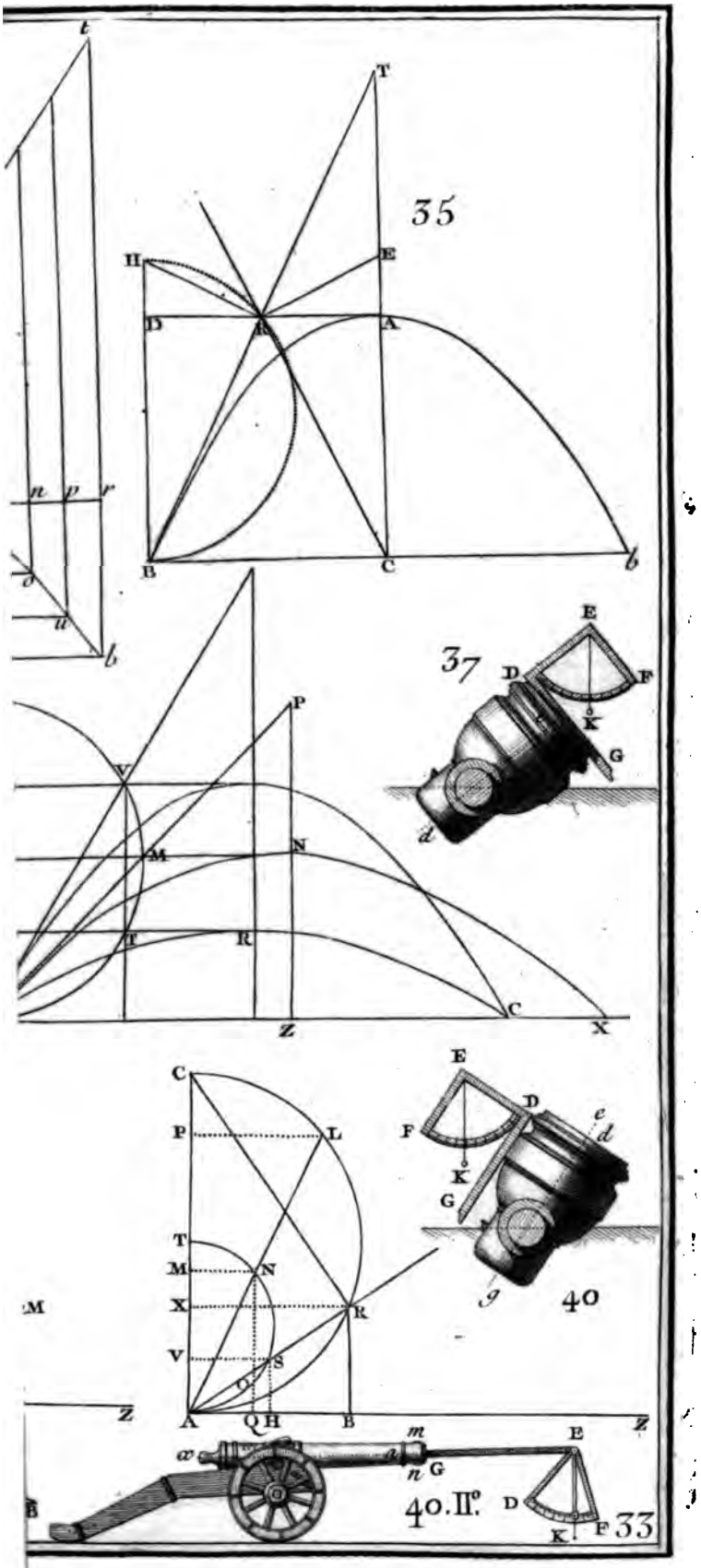

3
M
T
R
S
X
N
4
M
R
S
X
N
7
M
A
B
C
D
N
R
8
D
C
A
N
M
B
M
N
11
A
E
C
G
B
12
D
A
H
C
14
T
15
T
M
N
C
R
N
16
H
E
F
M
D
B
N
C
T
S
19
M
P
B
A
E
N
D
C
F
N
R
T
H
31

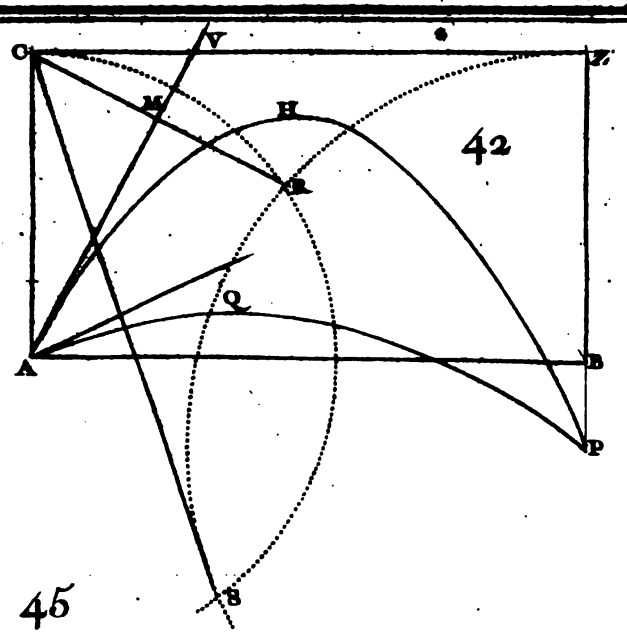



A T P D N
d
G
H
E
R
S
21
p
h
z
x
t
22
N
d
u


25
B
X
E
T
S
F
P
Q
G
L
A
R
C
N
M
D
Z
H
4
m
T
R
H
S
M
26
C
A
D
27
A
C
B
H
29
M
N
D
B
30
A
B
C
D
31
A
D
C
B
F
E
32
d
A
D
E
F
C
p
G
P
H
M
L
N

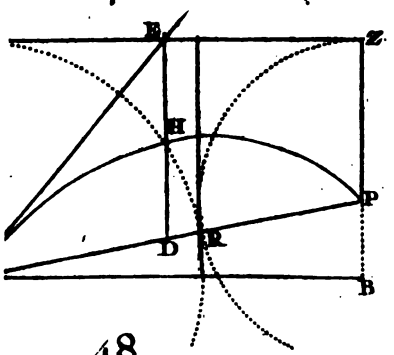



t
T
35
H
E
D
A
B
C
b
n
p
r
o
u
b
37
E
D
F
K
G
d
P
V
M
N
T
R
C
Z
X
C
P
L
T
M
N
X
R
V
S
A
Q
H
B
Z
Z
E
D
F
K
G
e
d
g
40
m
E
w
n
G
B
40.II.
D
K
F
33

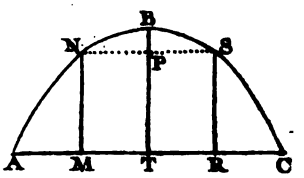


42

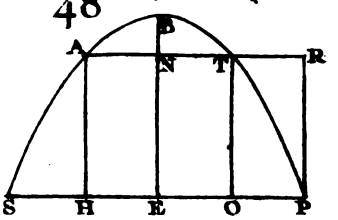
45

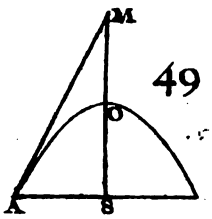


46

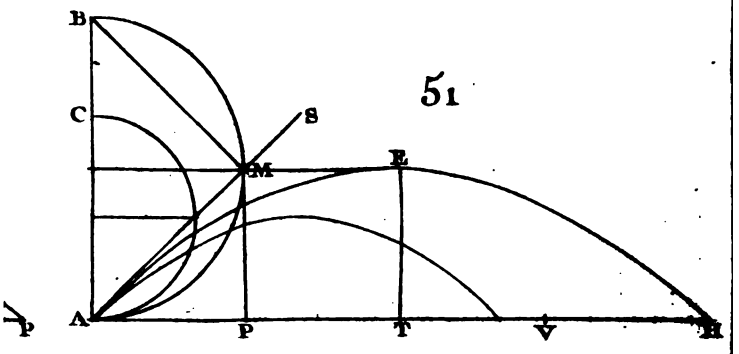


48



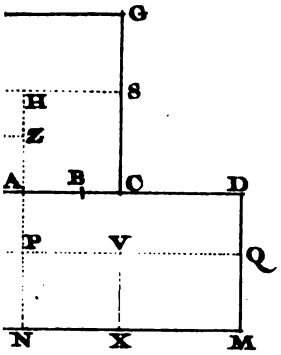


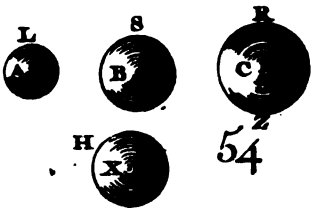
49



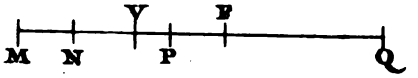
51

53

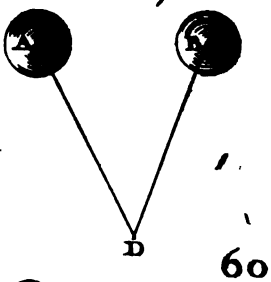




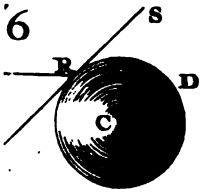
54



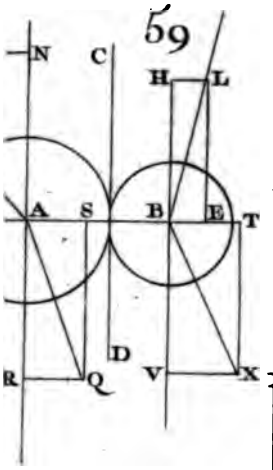
57



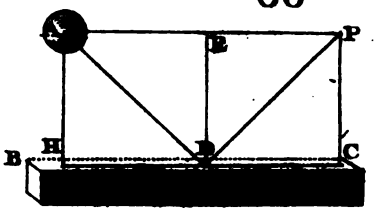
6



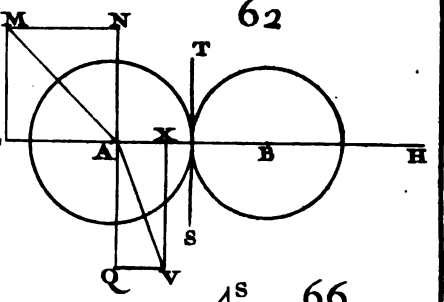
59



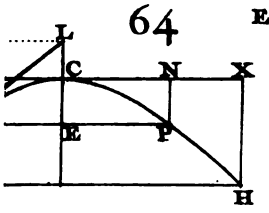
60



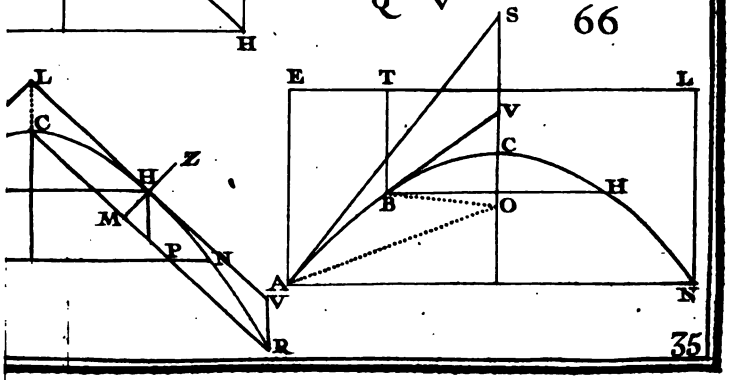
62

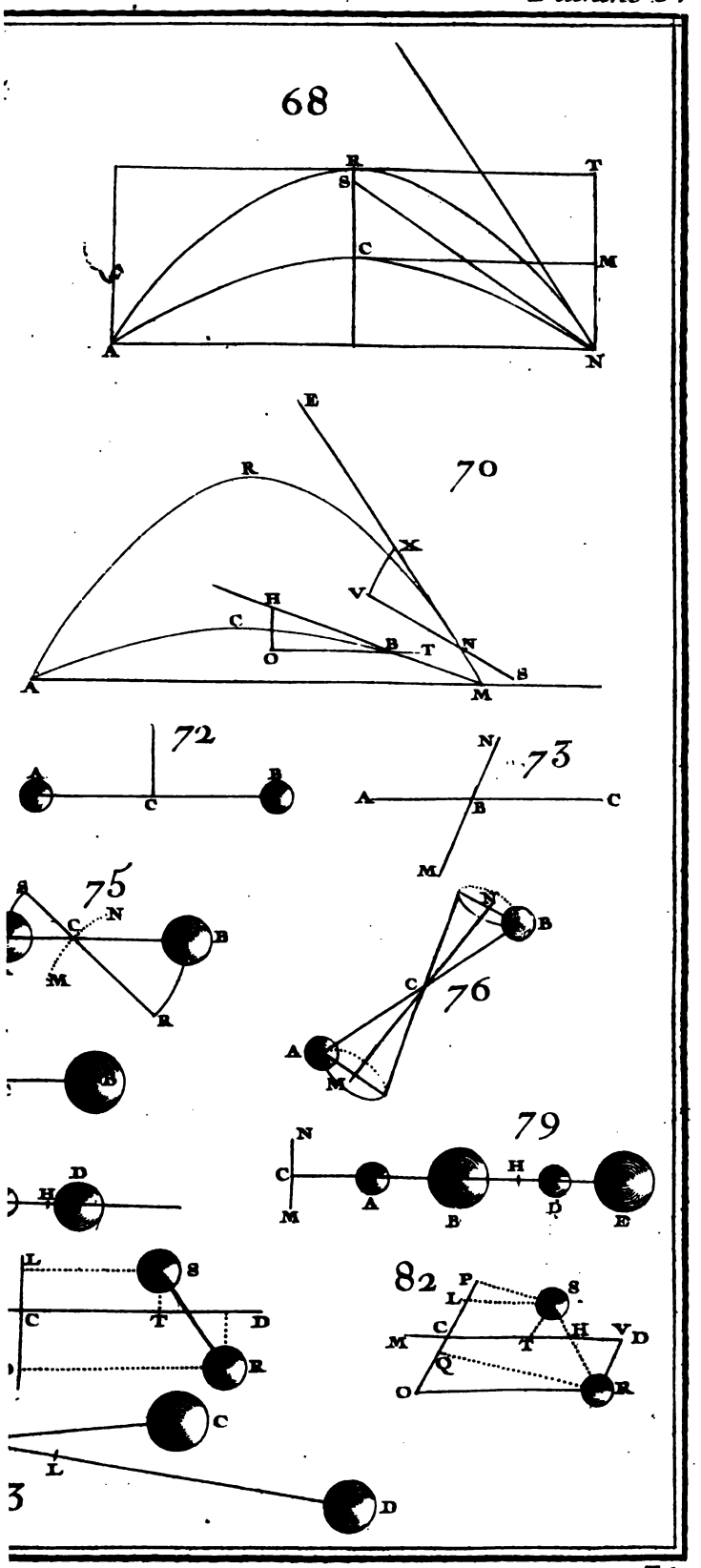


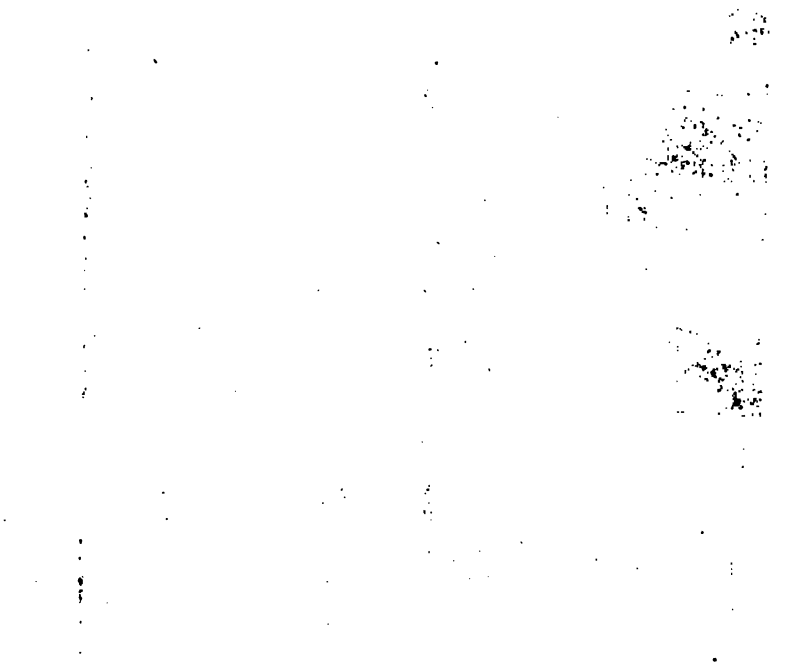
64

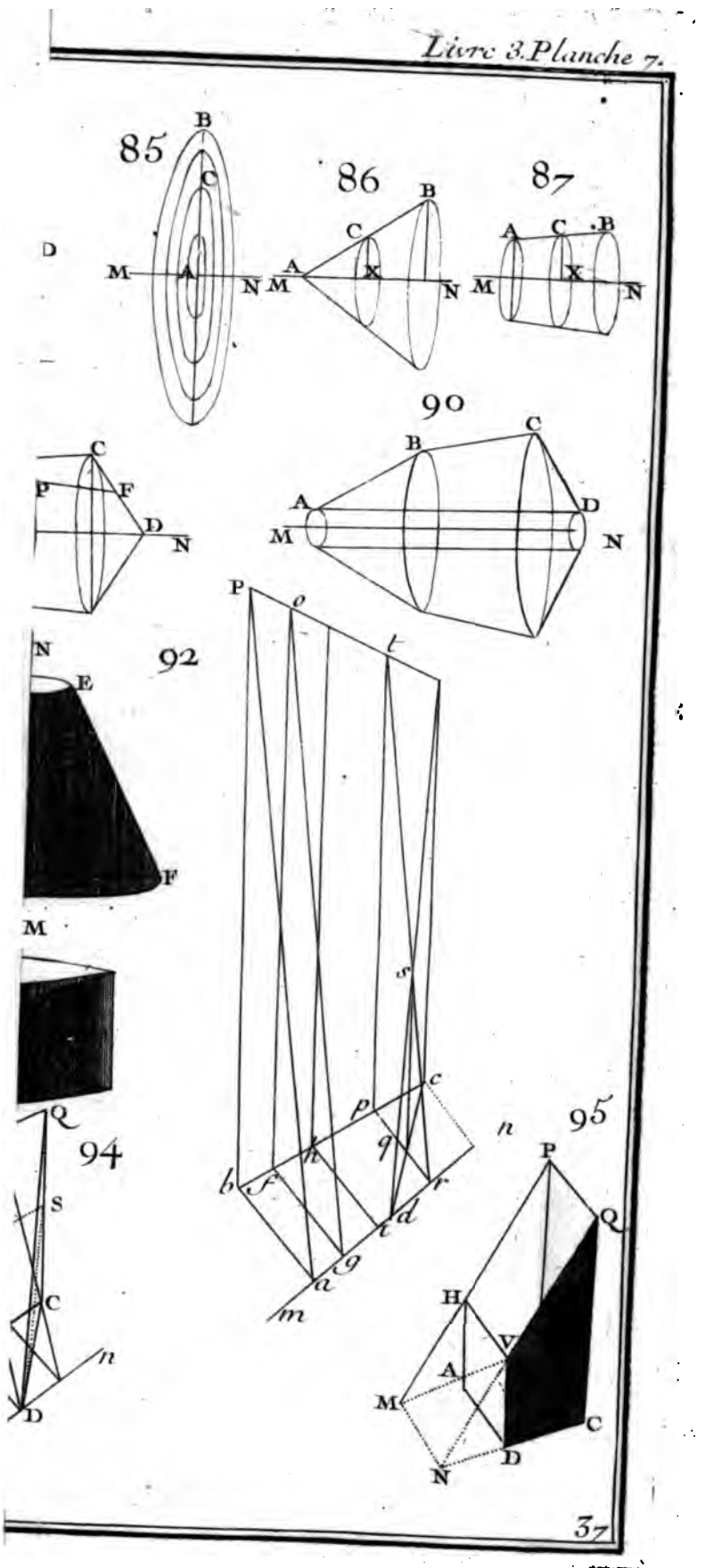


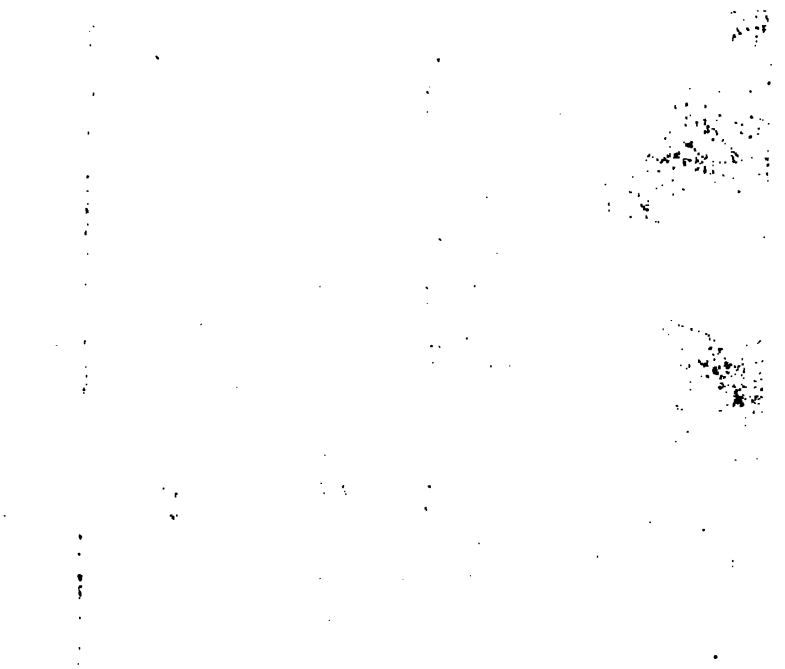
66

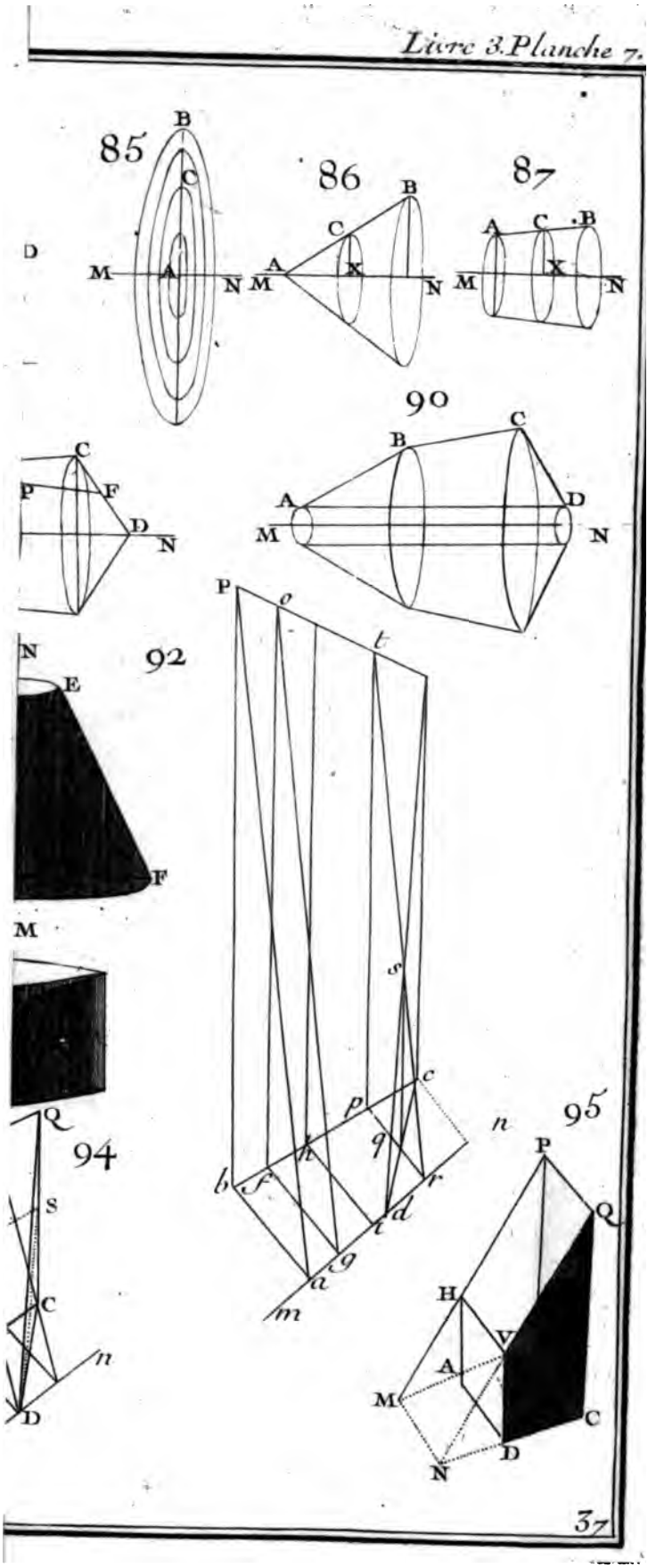


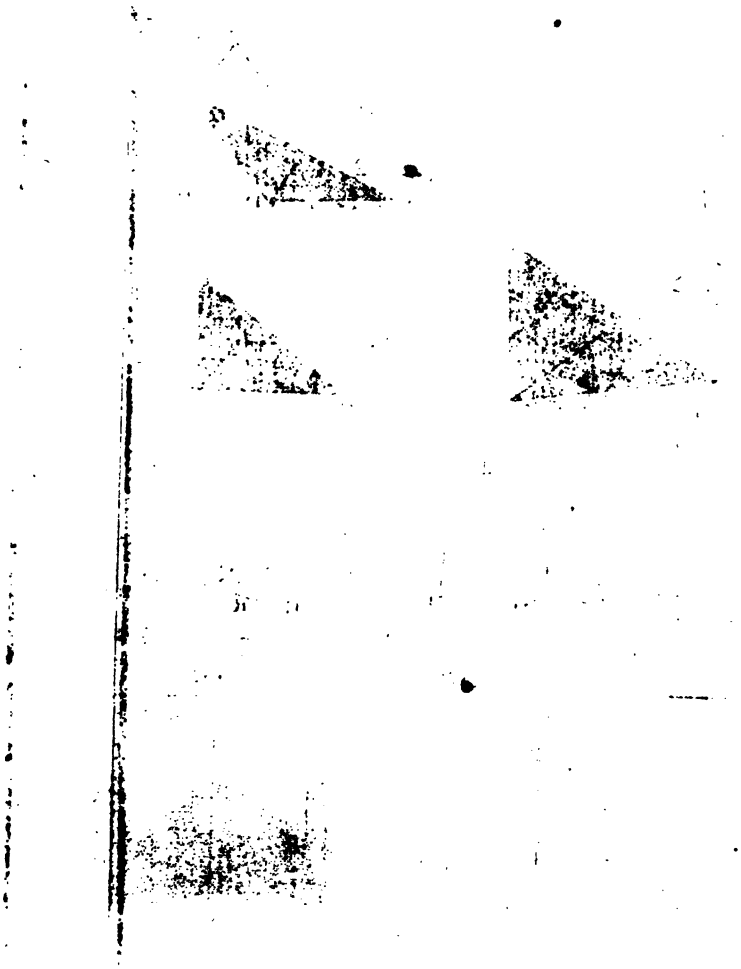

68
R
T
S
C
M
A
N
E
70
R
X
V
H
C
O
B
T
N
S
A
M
72
A
B
C
73
N
A
B
C
M
75
S
C
N
B
M
R
76
C
A
M
79
N
C
M
H
A
B
D
E
82
P
L
S
C
T
H
V
D
M
Q
O
R
L
S
C
T
D
R
C
L
3
D

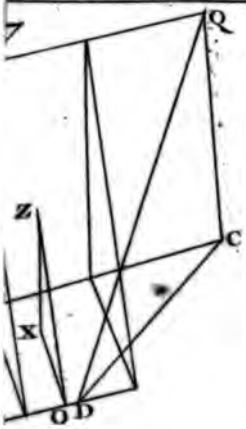



85
B
C
D
M
A
N
86
B
C
A
M
X
N
87
A
C
B
M
X
N
90
C
B
A
D
M
N
C
P
F
D
N
92
N
E
F
M
P
o
t
s
c
p
q
r
b
f
h
d
i
g
a
m
94
Q
S
C
n
D
95
n
P
Q
H
V
A
M
C
N
D

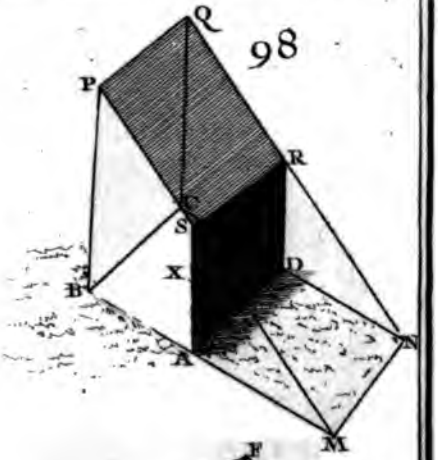


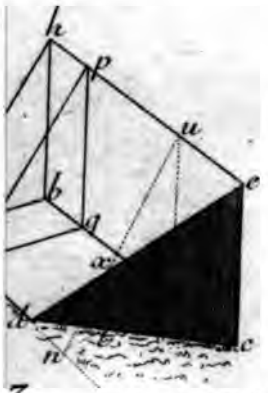

85
B
C
D
M
A
N
86
B
C
A
M
X
N
87
A
C
B
M
X
N
90
C
B
A
D
M
N
C
P
F
D
N
92
N
E
F
M
P
e
t
s
c
p
q
r
b
f
h
d
i
g
a
m
94
Q
S
C
n
D
95
n
P
Q
H
V
A
M
C
D
N



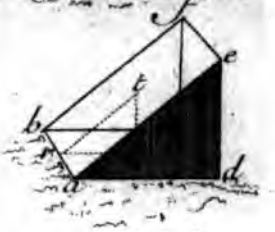


98



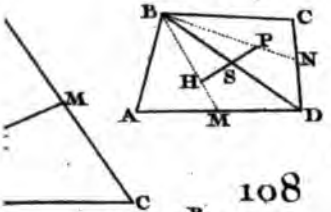


100

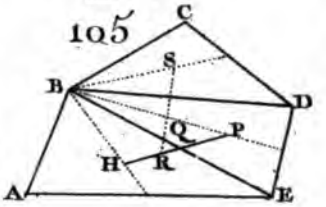


3

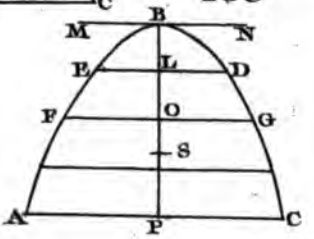
104



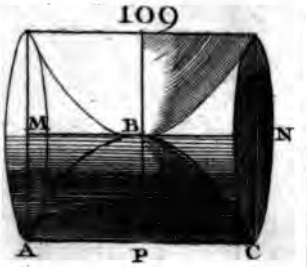
105



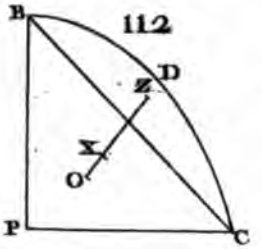
108



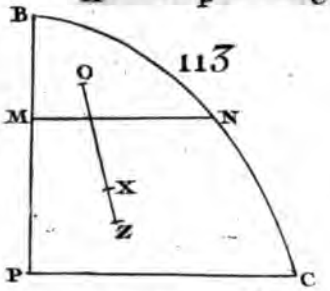
109

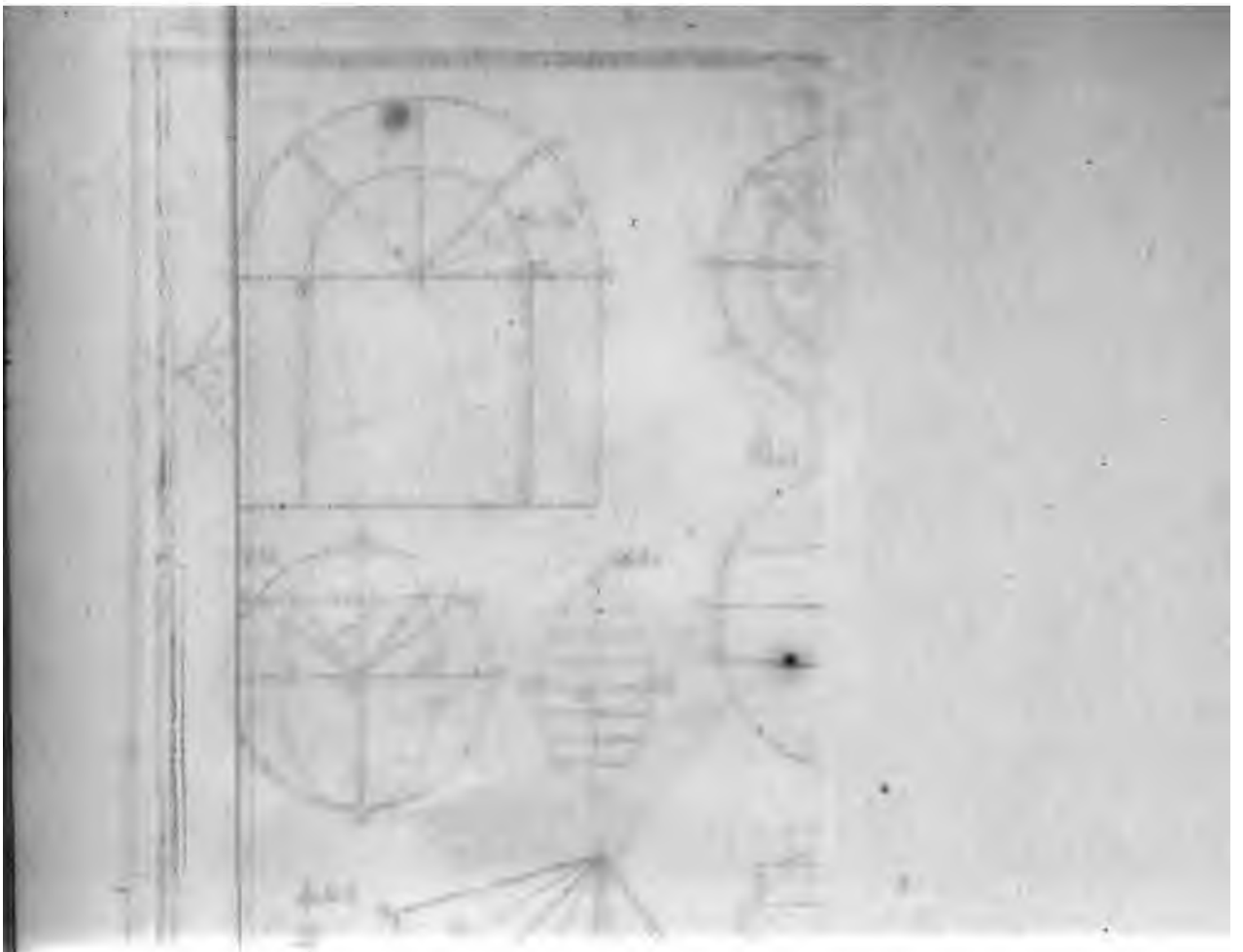


112

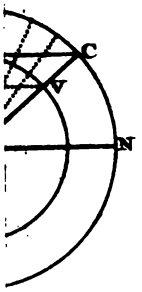


113

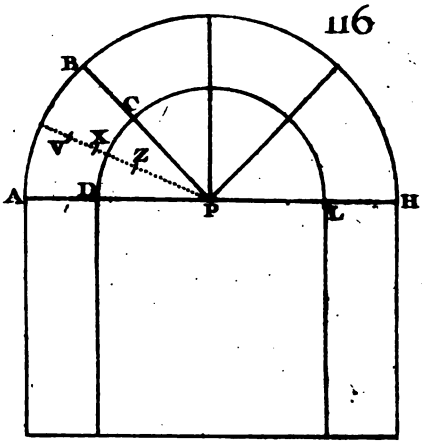




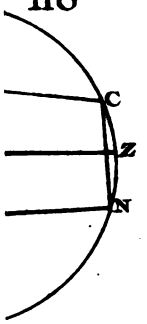
115



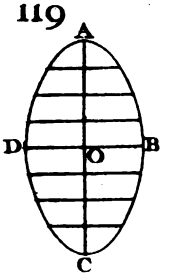
116



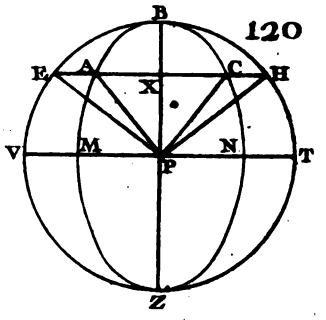
118

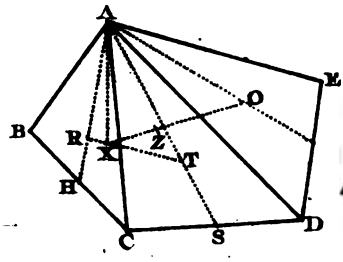


119

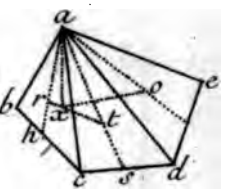


120

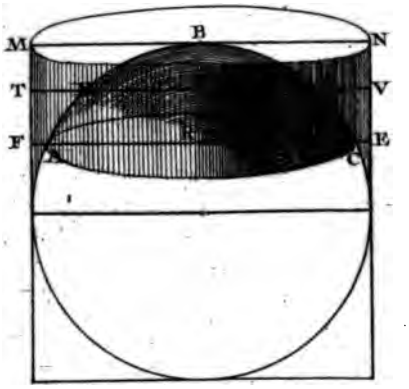




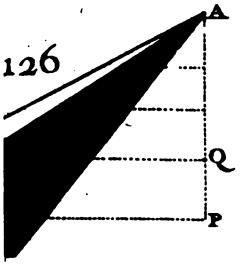
124

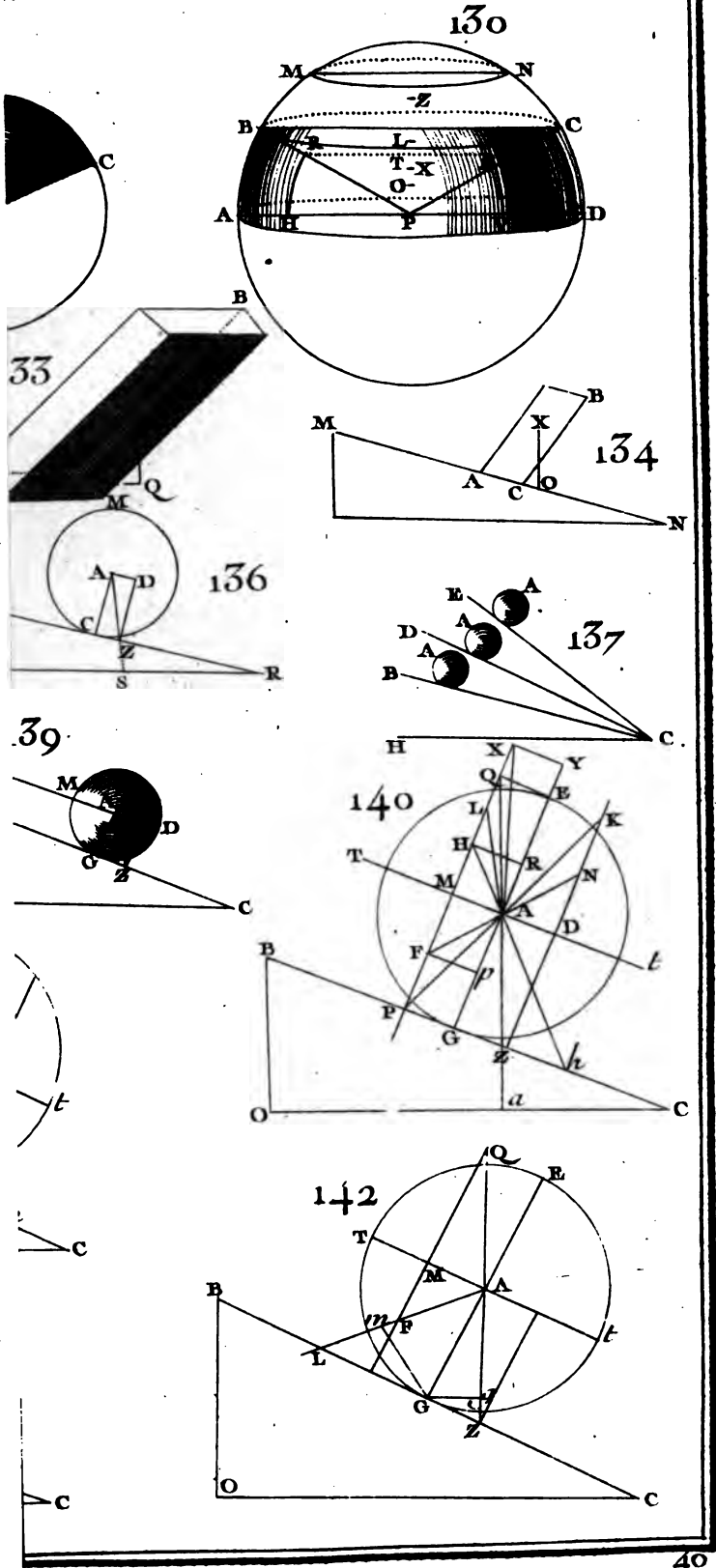


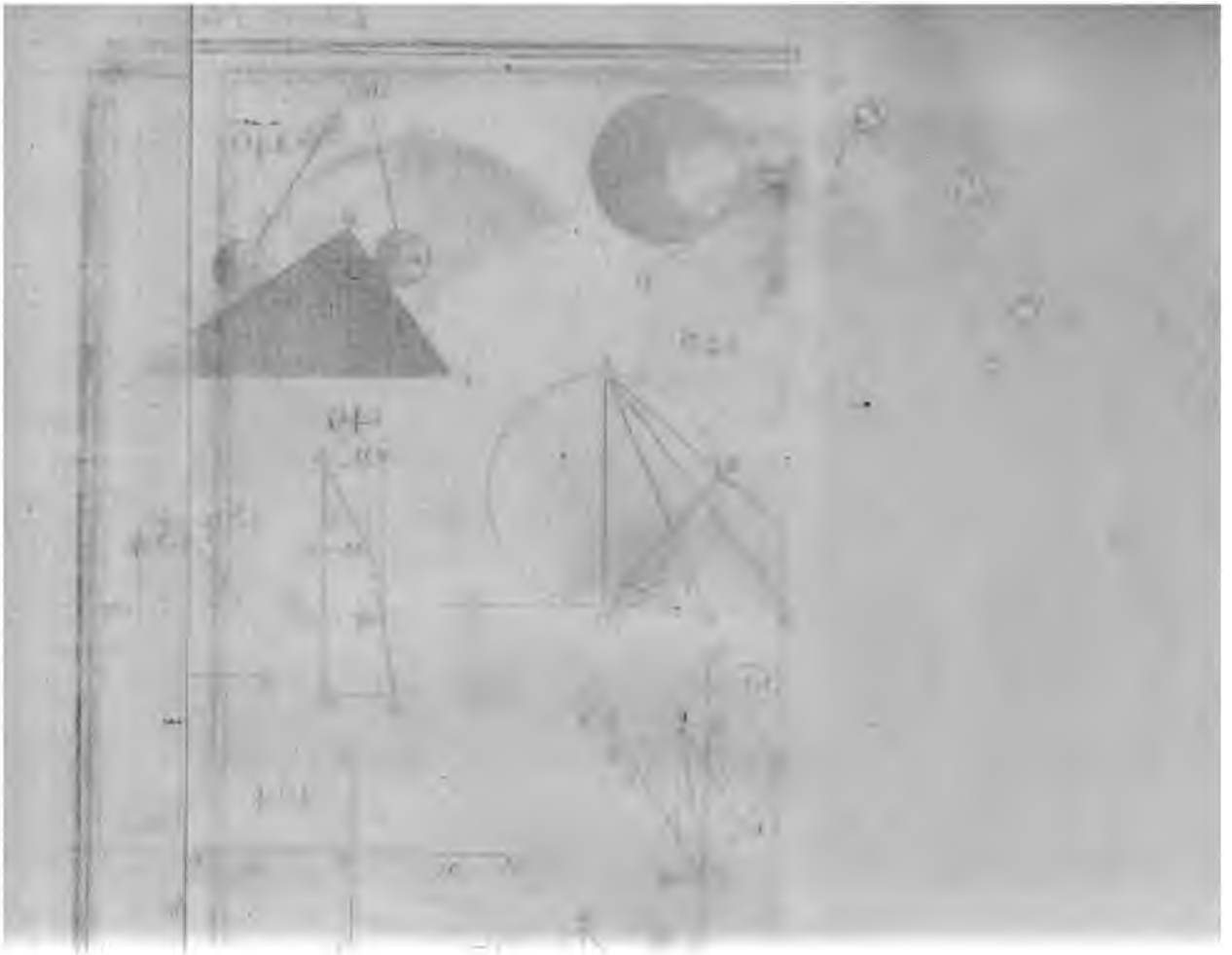
127

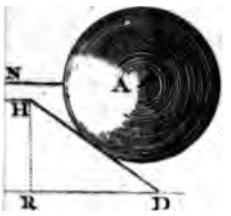


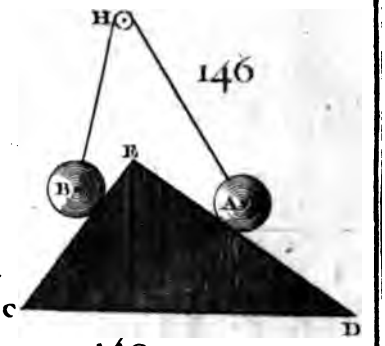
126



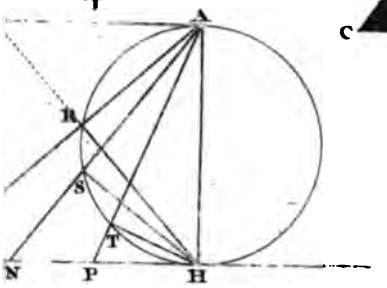

130
M
N
Z
B
C
L
T
X
O
A
H
P
D
C
B
33
Q
M
A
D
136
C
Z
S
R
M
X
B
134
A
C
O
N
E
A
137
D
A
B
C
H
39
M
D
C
Z
C
t
C
X
Y
Q
E
140
L
K
H
R
T
M
N
A
D
F
t
p
B
P
G
Z
h
O
a
C
Q
E
142
T
M
A
B
m
P
t
L
G
Z
O
C



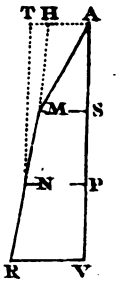




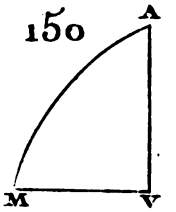
148



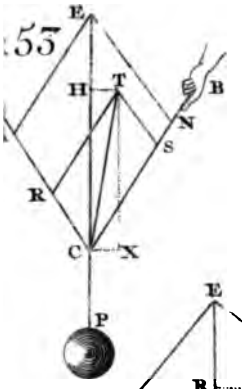
149



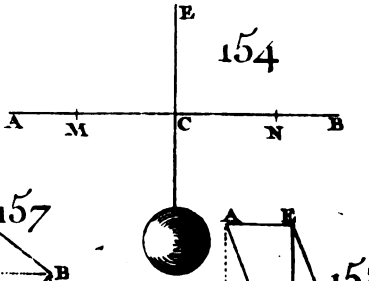
150



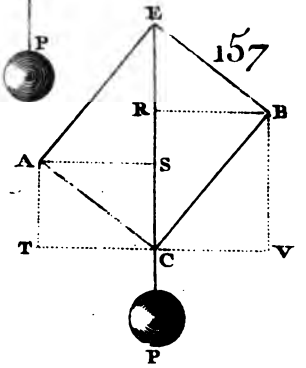
153



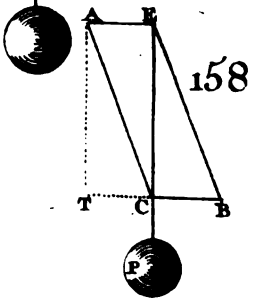
154



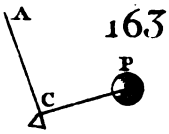
157



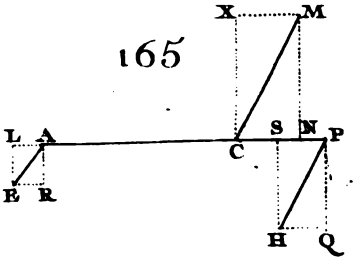
158



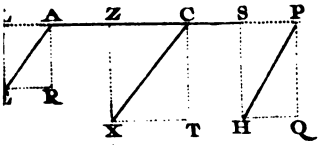
163

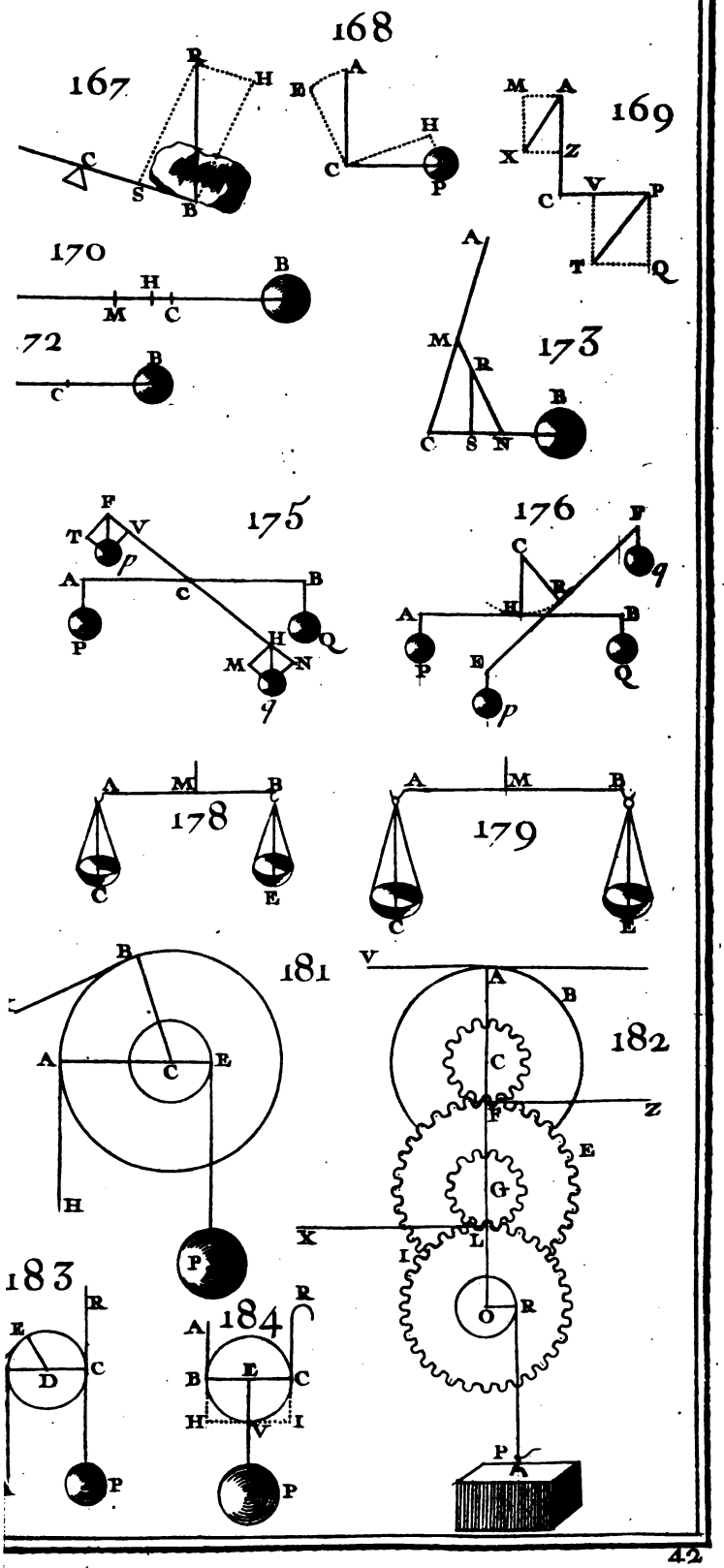


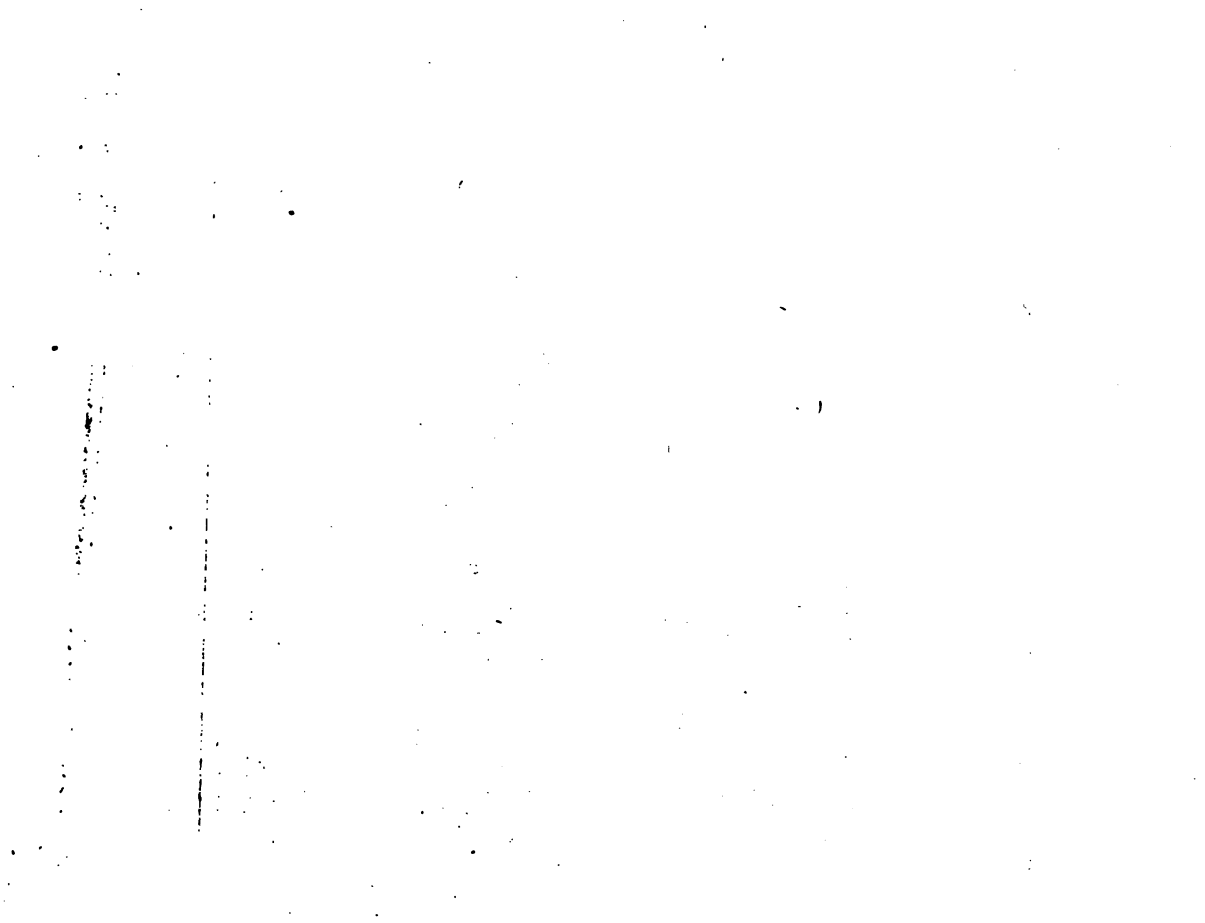
165

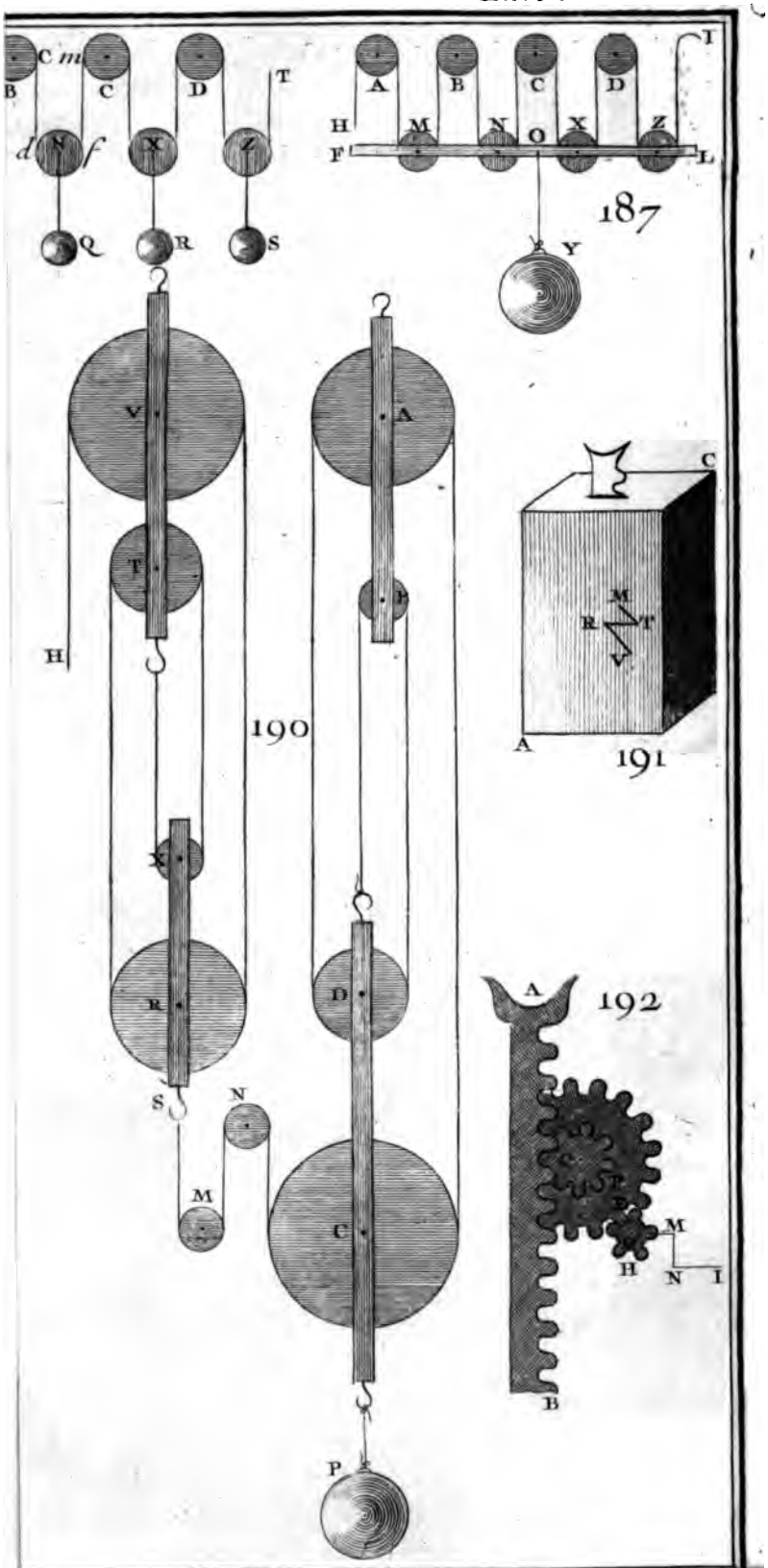


164

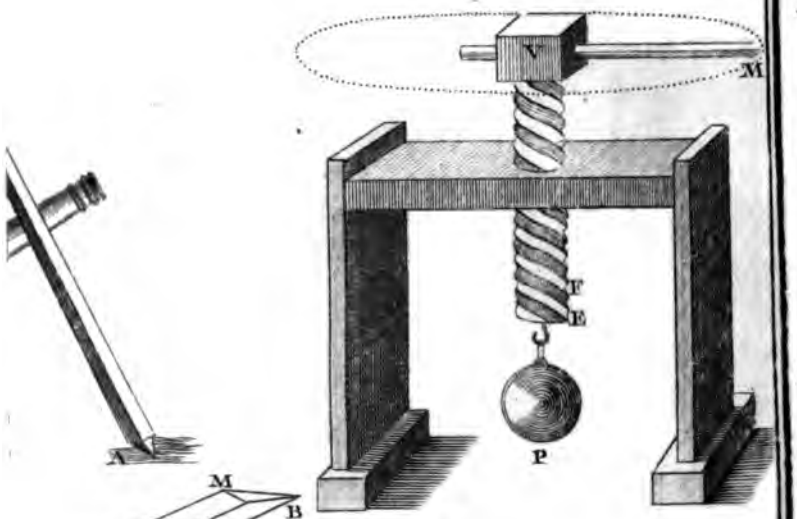


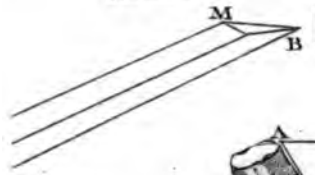

167
168
169
170
172
173
175
176
178
179
181
182
183
184
R
H
A
E
C
S
B
M
X
Z
V
P
T
Q
F
p
q
N
G
I
L
O
D



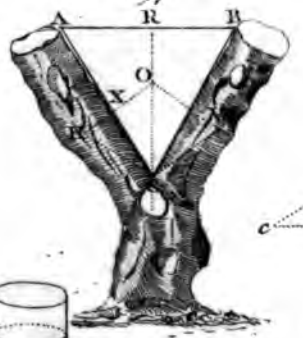

B
C m
C
D
T
d
N
f
X
Z
Q
R
S
187
A
B
C
D
I
H
M
N
O
X
Z
F
L
Y
V
T
H
190
A
B
C
M
R
T
V
A
191
X
R
S
N
M
D
C
P
A
192
T
M
H
N
I
B

195

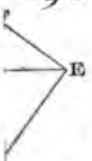




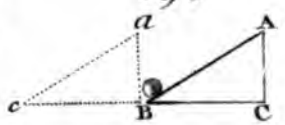
197



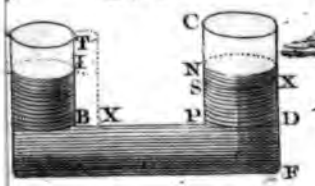
196



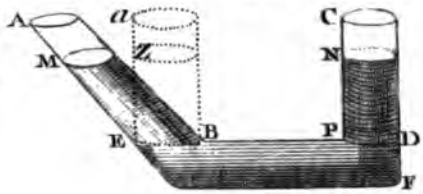
198



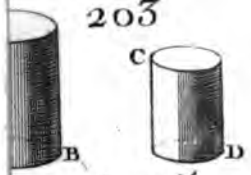
200



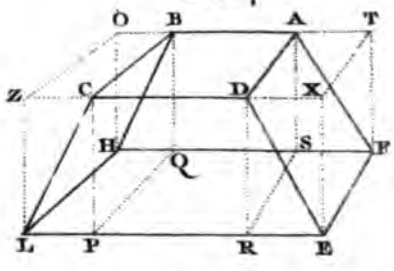
201



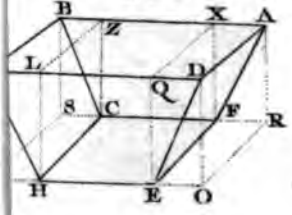
203



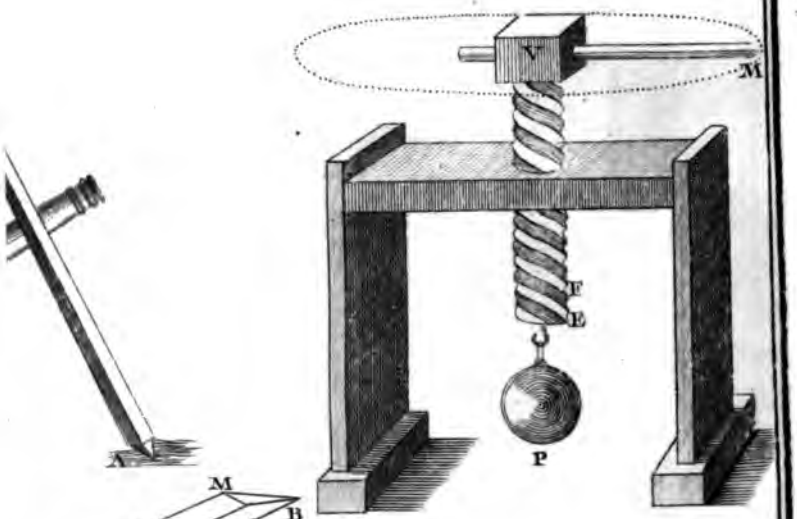
204

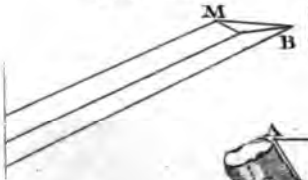


205

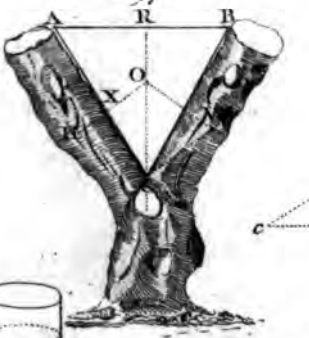


195

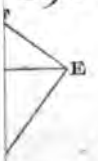




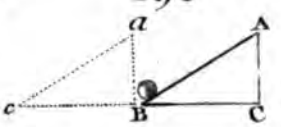
197



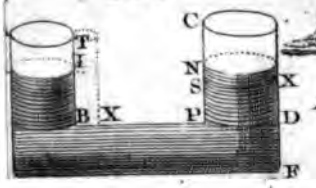
196



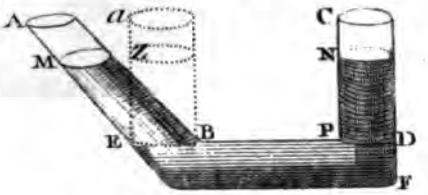
198



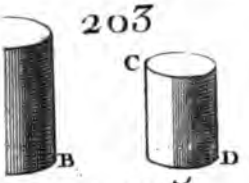
200



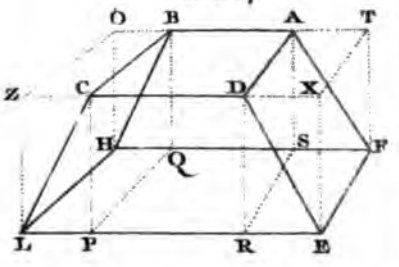
201



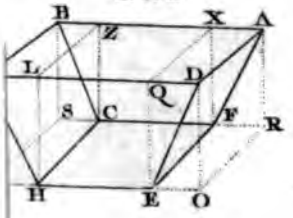
203

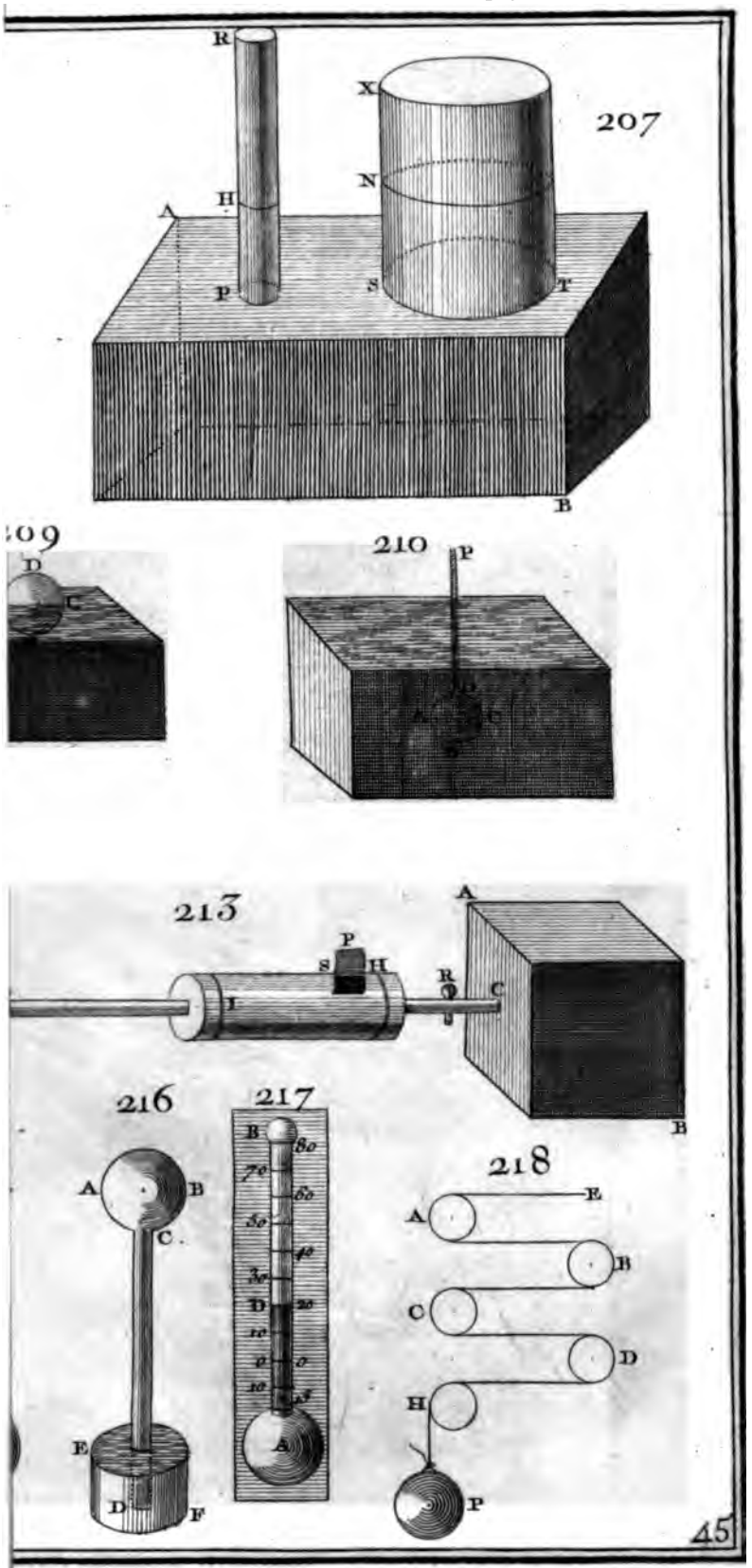


204

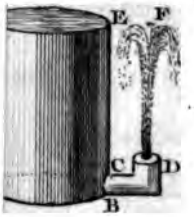


205



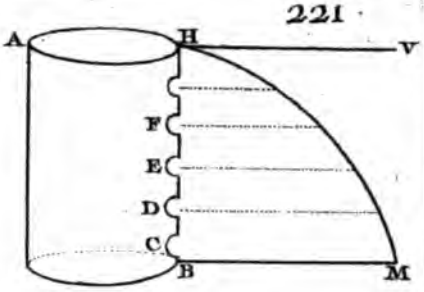

207
R
X
N
H
A
P
S
T
B
209
D
C
210
P
A
C
B
213
A
P
S
H
R
C
I
B
216
A
B
C
E
D
F
217
B
A
218
A
E
B
C
D
H
P

220

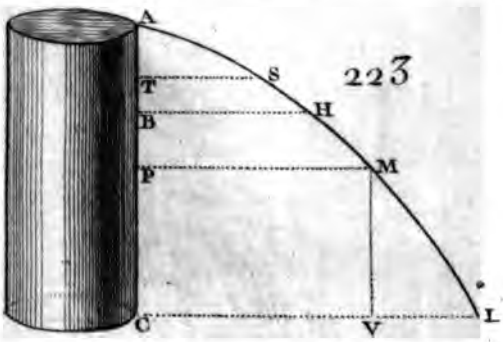


H

221



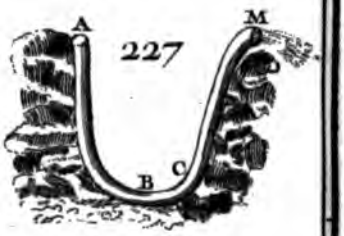
223



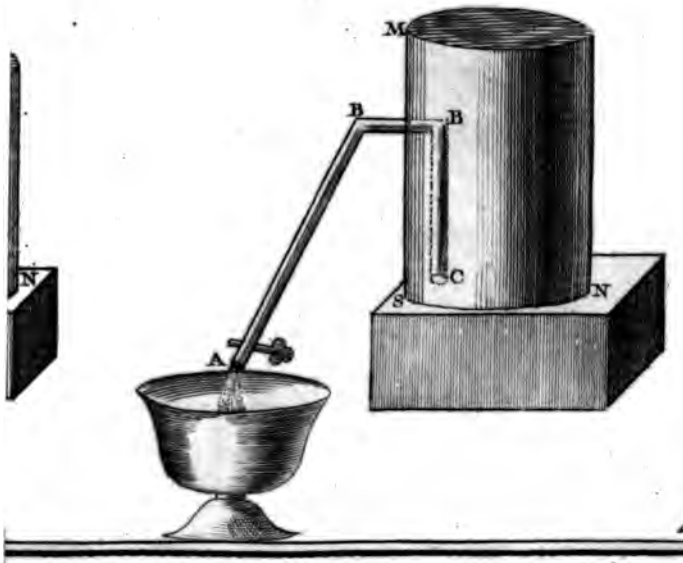
225

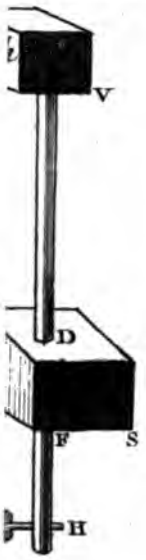
226

227

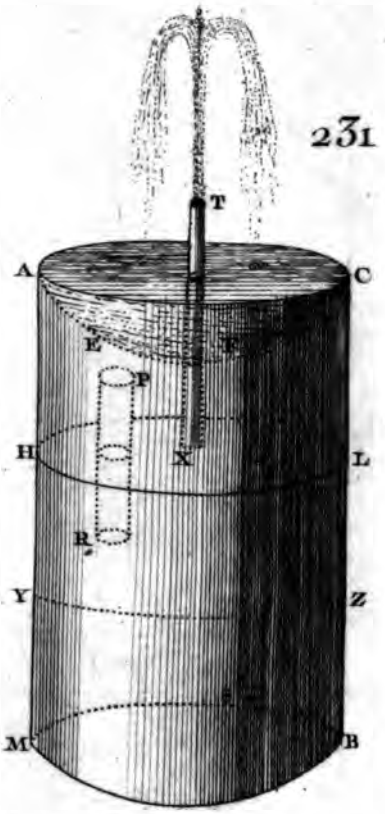


229

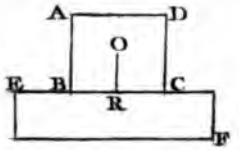


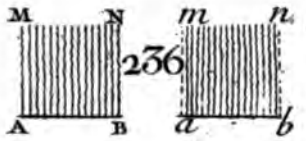


231



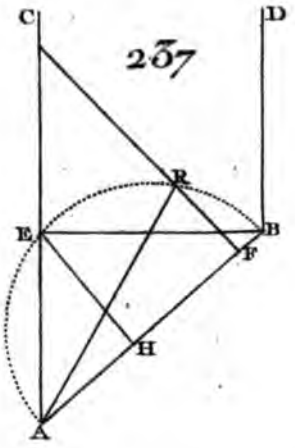
235

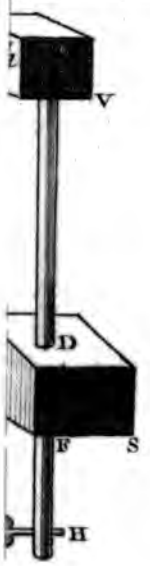




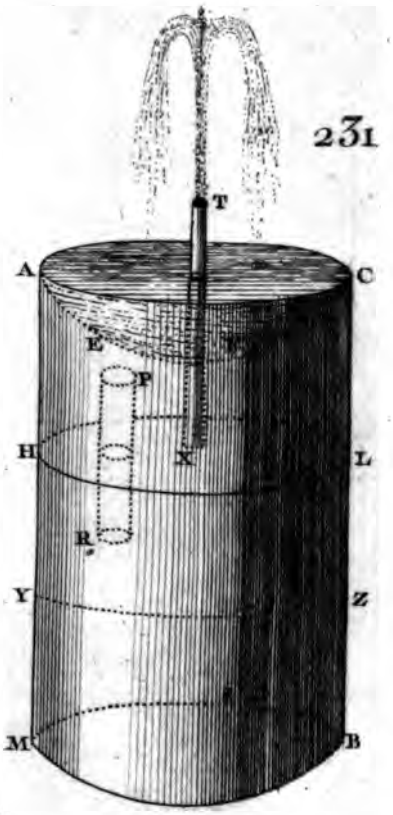
236

237

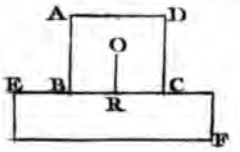


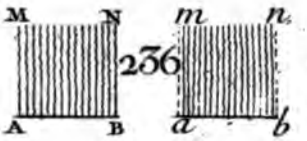


231



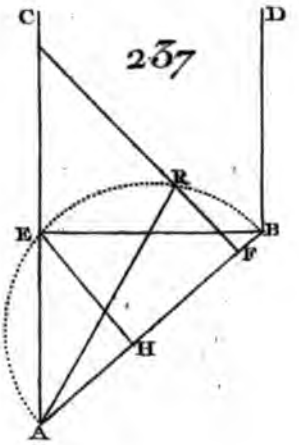
235

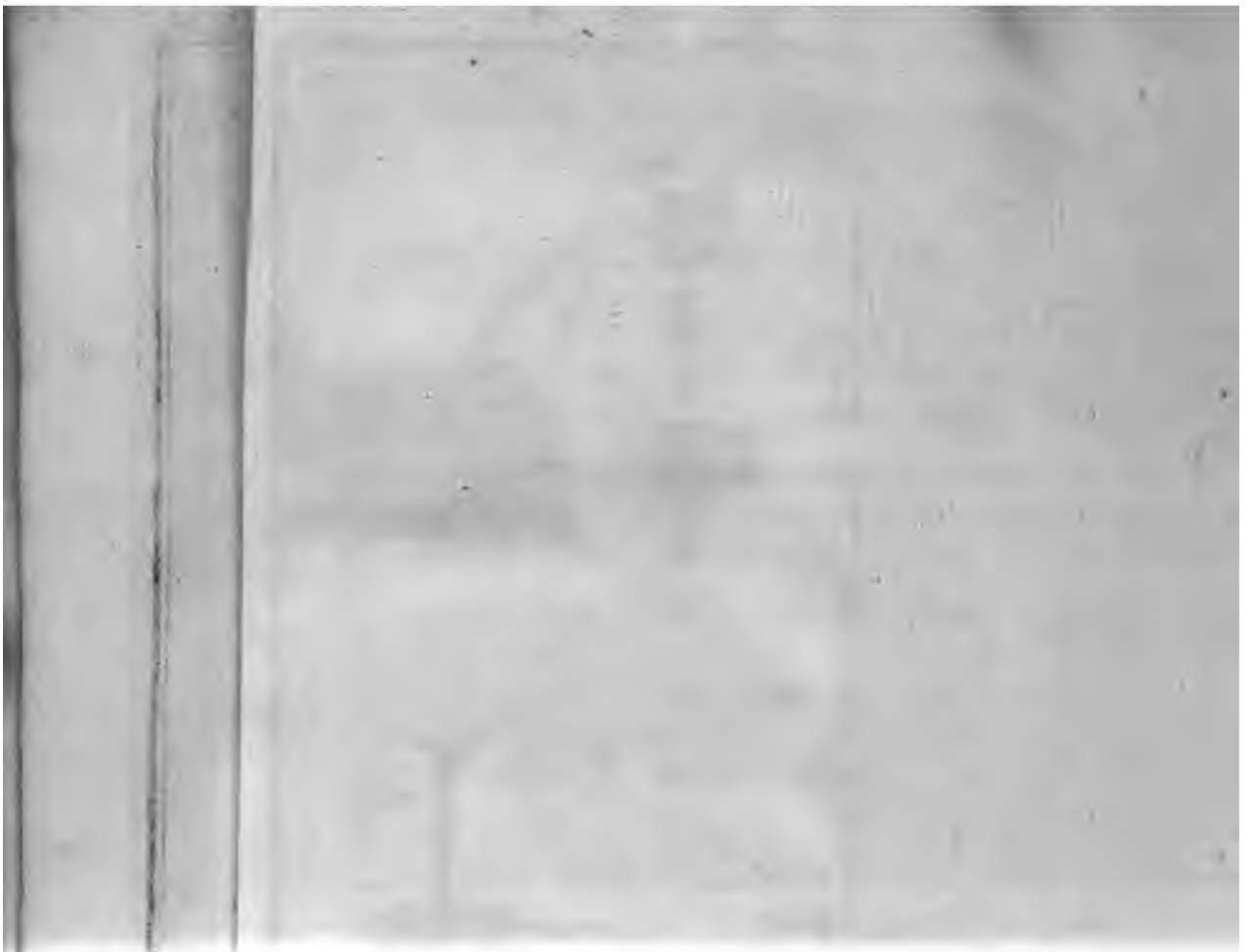




236

237





direct, comme le quarré du ſinus de l'angle d'incidence eſt au quarré du ſinus total.

499. COROLLAIRE III. Si l'on décrit un demi-cercle AEB autour de la ligne AB, & que du point B on mene la droite BE au point E où la direction CA coupe le cercle; & du point E, une droite EH perpendiculaire ſur AB; *la force du choc direct ſera à la force du choc oblique, comme le diametre AB eſt à ſa partie BH* (Fig. 237).

DÉMONSTRATION. A cauſe des triangles ſemblables AEB, BEH; nous avons AB. BE :: BE. BH: donc $\overline{AB}$. $\overline{BE}$ :: AB. BH. Mais par le Corollaire précédent, la force du choc direct eſt à celle du choc oblique, comme $\overline{AB}$ eſt à $\overline{BE}$: donc ces deux forces ſont auſſi comme AB. BH.

500. COROLLAIRE IV. Par le moyen du Corollaire précédent, on peut aiſément *trouver le rapport des différentes forces des chocs d'un même fluide qui choqueroit une même ligne avec la même vîteſſe ſous différentes directions* (Fig. 237).

DÉMONSTRATION. Par exemple, ſi l'on demande la force du choc ſous la direction RA; j'abaiſſe du point R, la droite RF perpendiculaire ſur AB: & par conſéquent la force du choc direct eſt à celle du choc oblique ſous la direction AR, comme AB eſt à BF. Or, nous avons auſſi: la force du choc direct eſt à celle du choc oblique ſous la direction AC, comme AB eſt à BH. C'eſt pourquoi nommant F la force du choc direct, O la force du choc oblique ſous la direction CA, & *o* la force du choc oblique ſous la direction RA; nous aurons d'une part F. O :: BA. BH; ou F. BA :: O. BH: & de l'autre, F. *o* :: BA. BF; ou F. BA :: *o*. BF. Donc O. BH :: *o*. BF; ou O. *o* :: BH. BF; c'eſt-à-dire, la force du choc oblique ſous la direction CA, eſt à celle du choc oblique ſous la direction RA, comme BH eſt à BF; & ainſi des autres.

501. COROLLAIRE V. *Si le fluide choquoit directement la droite AB; le volume qui choqueroit ſeroit comme la ligne AB multipliée par la vîteſſe* (Fig. 237).

DÉMONSTRATION. Ce volume devient d'autant plus grand, que la vîteſſe eſt plus grande (490). Ainſi nommant V la vîteſſe, le volume qui choqueroit directement ſeroit AB×V; & par conſéquent la force du choc ſeroit AB×V×V, ou AB×V^2. Or nous venons de voir que le choc direct eſt au choc indirect ſous la direction AC,

comme AB eſt à BH : faiſant donc AB. BH :: AB×V^2. $\frac{BH \times AB \times V^2}{AB}$ = BH×V^2 ; ce quatrieme terme BH×V^2 exprimera la force du choc ſous la direction AC : & par la même raiſon on trouvera que BF×V^2 exprime la force du choc ſous la direction AR ; & ainſi des autres.

502. COROLLAIRE VI. *Si la vîteſſe ſous la direction AC étoit exprimée par V, & la vîteſſe ſous la direction RA par* u ; *la force du choc ſous la direction AC, ſeroit BH×V^2 ; & celle du choc ſous la direction RA, ſeroit BF×*u^2 (Fig. 237).

DÉMONSTRATION. Si la vîteſſe du fluide qui choque ſous la direction AC étoit = V, & ſa denſité = D, & que la vîteſſe du fluide qui choque ſous la direction RA fût = *u*, & ſa denſité *d* ; le choc direct du premier fluide ſeroit AC×D×V^2, & ſon choc ſous la direction AC ſeroit BH×B×V^2. De même le choc direct du ſecond fluide ſeroit AC×*d*×u^2, & ſon choc ſous la direction RA ſeroit BF×*d*×u^2. De ſorte que le choc oblique du premier fluide ſous la direction AC, ſeroit au choc oblique du ſecond ſous la direction RA, comme BH×D×V^2 eſt à BF×*d*×u^2 ; & ainſi des autres cas.

FIN DU TROISIEME ET DERNIER LIVRE.

& qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers-Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de haro, charte normande, & lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Paris le vingt-ſeptieme jour du mois de Janvier l'an de grace mil ſept cent ſoixante-treize, & de notre regne le cinquante-huitieme. PAR LE ROI EN SON CONSEIL. LE BEGUE.

Regiſtré ſur le Regiſtre XIX de la Chambre royale & ſyndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 2464, fol. 22, conformément au Réglement de 1723. A Paris ce 4 Février 1773. C. A. JOMBERT *pere, Syndic.*

AVIS AU RELIEUR.

LES onze dernieres planches du Livre ſecond, cotées en haut depuis la planche 19 juſqu'à la planche 29, ſeront placées à la fin du ſecond Livre, Tome II, page 122.